

К ВОПРОСУ О ТЕНЗОРЕ ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

О. С. МЕРГЕЛЯН, С. Н. СТОЛЯРОВ

В работе обсуждается вопрос о выборе тензора энергии-импульса электромагнитного поля в среде. Ввиду того, что вариационный принцип дает неоднозначное выражение для тензора энергии-импульса, делается попытка получить однозначное выражение, исходя из физических соображений. Показано, что если в безграничной среде в любой координатной системе выполняется соотношение $\vec{S} = \vec{W} \cdot \vec{V}_g$, то в такой среде необходимо пользоваться тензором Минковского.

1. Вопрос об определении вида тензора энергии-импульса электромагнитного поля в среде обсуждается в течение более чем полувека [1]. Для установления однозначного выражения для этого тензора предпринимались многочисленные попытки как с помощью усреднения микроскопических выражений для действующих на диэлектрик сил [1] — [2], так и с помощью применения феноменологического вариационного принципа [3] (см. также ссылки на работы в [4]). В настоящее время из многих предлагавшихся видов тензора энергии-импульса T_{ik} наиболее распространенными остались лишь два, каждый из которых обладает своими достоинствами и недостатками: тензор Абрагама T_{ik}^A и тензор Минковского T_{ik}^M , которые в покоящейся среде имеют вид [1]

$$T_{ik}^A = \begin{pmatrix} T_{\alpha\nu}^A & -ic\vec{G}^A \\ -\frac{i}{c}\vec{S}^A & W^A \end{pmatrix}; \quad T_{ik}^M = \begin{pmatrix} T_{\alpha\nu}^M & -ic\vec{G}^M \\ -\frac{i}{c}\vec{S}^M & W^M \end{pmatrix}; \quad (1)$$

где

$$T_{\alpha\nu} = \frac{1}{8\pi} \left\{ [(E_\alpha D_\nu + E_\nu D_\alpha) + (H_\alpha B_\nu + H_\nu B_\alpha)] - (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B})\delta_{\alpha\nu} \right\},$$

$$\vec{G}^A = \frac{1}{c^2} \vec{S}^A; \quad \vec{S}^A = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}\vec{H}]; \quad W^A = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}), \quad (2)$$

$$T_{\alpha\nu}^M = \frac{1}{8\pi} \left\{ (E_\alpha D_\nu + H_\alpha B_\nu) - \frac{1}{2} (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}) \right\},$$

$$\vec{G}^M = \frac{1}{4\pi} [\vec{E}\vec{B}]; \quad \vec{S}^M = \vec{S}^A; \quad W^M = W^A. \quad (3)$$

Здесь индексы $i, k = 1, 2, 3, 4$ и $\alpha, \nu = 1, 2, 3$, а векторы индукции $\vec{D}$ и $\vec{B}$ связаны с полями $\vec{E}$ и $\vec{H}$ известными соотношениями [1].

Величины W и $\vec{S}$ определяют соответственно плотность и поток энергии электромагнитного поля в среде, а вектор $\vec{G}$ электромагнитный импульс этого поля. Тензоры $T_{\alpha\beta}$ связаны с теми напряжениями, которые возникают в среде под действием электромагнитного поля.

Приведенные выше два тензора в покоящейся среде отличаются только видом тензоров натяжений $T_{\alpha\beta}$ и различным характером связи векторов $\vec{G}$ и $\vec{S}$. (Отметим, что в покоящейся изотропной среде тензоры натяжений у Минковского и Абрагама также совпадают и различие сводится только к выражению для импульса поля). Если в покоящейся среде это различие реально проявляется весьма редко и приводит к малым эффектам, то в движущихся средах эти различия становятся весьма существенными. В частности, для среды, движущейся со скоростью $\vec{U} = c\vec{\beta}$, выражения для плотности W и потока $\vec{S}$ энергии поля имеют вид [1]

$$\vec{S}^A = \frac{c}{4\pi} \left\{ |\vec{E}\vec{H}| + \frac{\vec{\beta}}{1-\beta^2} (\vec{\beta}, [\vec{D}\vec{B}] - [\vec{E}\vec{H}]) \right\}; \quad (4a)$$

$$\vec{W}^A = \frac{1}{8\pi} \left\{ (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}) + \frac{(\vec{\beta}, [\vec{D}\vec{B}] - [\vec{E}\vec{H}])}{1-\beta^2} \right\};$$

$$\vec{S}^M = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}\vec{H}], \quad W^M = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}). \quad (4b)$$

Как видно из (4b), выражения для потока $\vec{S}^M$ и плотности энергии W^M в движущейся среде сохраняют свой вид (то же можно сказать о $T_{\alpha\beta}$ и $\vec{G}$).

Отметим, что микроскопический подход к такой сугубо макроскопической проблеме, как правило, приводит к громоздким и трудно анализируемым выражениям (см. напр., [5]). По-видимому, более простым и наглядным является или феноменологический подход к данной проблеме, исходя из общих принципов, или анализ данного вопроса на конкретном примере среды, например, на примере движущейся полностью ионизованной плазмы.

В данной работе мы покажем, что применение вариационного принципа к данной проблеме не говорит в пользу однозначного выбора тензора Абрагама (2), как это утверждалось в работе [3], а скорее указывает на большой произвол в выборе тензора T_{ik} . Кроме того, мы приведем некоторые соображения, которые говорят в пользу применения в ряде конкретных электродинамических расчетов тензора T_{ik} в форме Минковского (3).

2. Применим вариационный принцип для вычисления тензора энергии и импульса в среде, характеризуемой антисимметричными тензорами полей F_{ik} и индукций H_{ik} вида [1]

$$i\vec{E} = (F_{41}, F_{42}, F_{43}); \vec{B} = (F_{23}, F_{31}, F_{12}); i\vec{D} = (H_{41}, H_{42}, H_{43}); \\ \vec{H} = (H_{23}, H_{31}, H_{12}) \quad (5)$$

в той форме, в которой он был применен при рассмотрении электромагнитного поля в гравитационном поле, т. е. в неевклидовом пространстве с метрикой g_{ik} [6],

$$\frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{ik} = \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial (V \sqrt{-g} \Lambda)}{\partial \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^k} \right)} - \frac{\partial}{\partial g^{ik}} (V \sqrt{-g} \Lambda), \quad (6)$$

где Λ — плотность функции Лагранжа в неевклидовом пространстве с метрикой g_{ik} , детерминант которой равен $(-g)$.

Поскольку мы в дальнейшем будем иметь дело с инерциальной (галилеевой) системой координат, в которой $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, $g_{44} = -1$, а остальные $g_{ik} = 0$ при $i \neq k$, то тогда первый член в правой части выражения (6) обращается в нуль и мы имеем

$$T_{ik} = - \frac{2}{V \sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial g^{ik}} (V \sqrt{-g} \Lambda). \quad (7)$$

Выберем теперь функцию Лагранжа Λ в среде в виде

$$\Lambda = - \frac{1}{16\pi} F_{pt} H^{pt}. \quad (8)$$

С помощью известных формул связи ко- и контравариантных компонент тензоров

$$H^{pt} = H_{em} g^{pl} g^{tm} \quad (9)$$

запишем функцию Лагранжа в виде

$$\Lambda = - \frac{1}{16\pi} F_{pt} H_{em} g^{pl} g^{tm}. \quad (10)$$

Варьируя функцию Λ , даваемую формулами (8) — (10), авторы работ [3], [12], [13] и ряда других получали тензор энергии-импульса Абрагама (формула (2)). При этом они исходили из требования симметрии T_{ik} .

Подставляя (10) в формулу (7), мы получим следующее выражение

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{2} (F^l_i H_{kl} + H^l_i F_{kl}) - \frac{1}{4} F_{lm} H^{lm} g_{ik} \right\}. \quad (11)$$

При этом были использованы соотношения $\frac{\partial g}{\partial g^{ik}} = -g g_{ik}$ и $\frac{\partial g^{pl}}{\partial g^{ik}} =$

$= \frac{1}{2} [g^p_l g^l_k + g^p_k g^l_l]$, а также известные формулы перехода от ко-к контравариантным компонентам тензоров и обратно [6], аналогичные (9). Компоненты H^l_i и F^l_i являются смешанными компонентами тензоров. Заметим, что в галилеевой (инерциальной) системе координат нет различия между ко- и контр-, а также и смешанными компонентами тензоров, т. е. все индексы будут опущены вниз и, кроме того, g_{ik} ведет себя в T_{ik} как δ_{ik} .

Рассмотрим теперь тензор T_{ik} из (11) в галилеевой системе координат,

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{2} (F_{il} H_{kl} + H_{il} F_{kl}) - \frac{1}{4} F_{lm} H_{lm} \delta_{ik} \right\}. \quad (12)$$

Нетрудно убедиться, что полученный тензор является симметричным, однако он не совпадает с тензором Абрагама, хотя мы использовали тот же лагранжиан, что и авторы [3], [12], [13]. Не совпадает наше выражение и с тензором Минковского.

Это означает, что выбор тензора T_{ik} из вариационного принципа осуществляется неоднозначно. Такая неоднозначность связана с тем, что физический смысл имеют не компоненты этого тензора, а сила f_i , определяющая действие поля на среду. Она равна $f_i = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}$ и поэтому мы всегда можем определить T_{ik} с точностью до тензора $g_{ik}(x)$ вида $\frac{\partial \Psi_{ikl}}{\partial x^l}$, дивергенция от которого обращается в нуль (это будет тогда, когда Ψ_{ikl} антисимметричен по индексам $i; k$).

Иными словами, вид тензора T_{ik} зависит от тех условий или ограничений, которые накладываются на него при выборе этого тензора. В частности, если мы наложим условие симметричности ($T_{ik} = T_{ki}$), то это не значит, что мы автоматически получаем тензор Абрагама (2), как это утверждалось в работе [3]. В нашем случае условие симметрии привело к тензору, у которого T_{av} совпадает с Абрагамовским выражением, а для $\vec{S}$ и $\vec{G}$ имеем

$$\vec{G} = \frac{1}{c^2} \vec{S} = \frac{1}{8\pi c} \{ [\vec{E}\vec{H}] + [\vec{D}\vec{B}] \}. \quad (12a)$$

Таким образом, однозначный выбор вида тензора энергии-импульса поля в среде должен, на наш взгляд, осуществляться наложением на этот тензор, т. е. на его компоненты, определенных условий. В зависимости от характера наложенных условий и будет определяться характер тензора T_{ik} .

В покоящихся средах имеет место соотношение между потоком электромагнитной энергии $\vec{S}$, ее плотностью $\mathcal{W}$ и групповой скоростью $\vec{V}_g$,

$$\vec{S} = W \cdot \vec{V}_g \quad (13)$$

Это соотношение в покоящейся среде не связано с выбором тензора энергии-импульса, так как в покоящейся среде

$$T_{ik}^A = T_{ik}^M.$$

Нашей целью будет показать, что для безграничной среды, у которой соотношение (13) выполняется и в том случае, если она движется со скоростью $\vec{u} = c\vec{\beta}$, в конкретных расчетах надо пользоваться тензором энергии-импульса Минковского.

3. Докажем теперь, что соотношение (13) выполняется в движущейся среде только для $\vec{S}$ и W вида (3). Для этого рассмотрим однородную и изотропную среду с диэлектрической постоянной $\varepsilon (\mu=1)$, измеренной в системе ее покоя, движущуюся со скоростью $\vec{u} = c\vec{\beta}$. Дисперсионное уравнение для плоских монохроматических электромагнитных волн в такой среде имеет вид [7]

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\varepsilon - 1}{1 - \beta^2} (\vec{k} \vec{u} - \omega)^2 = 0, \quad (14)$$

где k — волновой вектор волны частоты ω , а диэлектрическая постоянная ε , вообще говоря, является функцией частоты волны ω' в системе покоя среды, т. е. $\varepsilon = \varepsilon(\omega')$, где

$$\omega' = \frac{\omega - \vec{k} \vec{u}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (15)$$

В пространстве волновых векторов $\vec{k}$ или в пространстве показателей преломления $\vec{n} = \frac{ck}{\omega}$ уравнение (14) представляет некоторую поверхность.

Тогда групповая скорость $\vec{V}_g = \frac{d\omega}{d\vec{k}}$ волн в такой среде направлена по нормали к поверхности волновых векторов (14) и ее направление совпадает с направлением радиуса-вектора, проведенного от источника в точку наблюдения [8].

Направление потока вектора Пойнтинга $\vec{S}$ по отношению к поверхности волновых векторов (14) можно определить следующим образом [11].

Выпишем уравнения Максвелла для плоских монохроматических волн с $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B} \sim e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$,

$$\vec{B} = [\vec{n} \vec{E}], \quad \vec{D} = [\vec{H}, \vec{n}], \quad [\vec{n} \vec{D}] = 0, \quad [\vec{n} \vec{B}] = 0 \quad (16)$$

и проварьируем их по направлению $\vec{n} = \frac{c\vec{k}}{\omega}$ при фиксированной частоте волны ω .

Умножая вариацию первого уравнения в (16) скалярно на $\vec{H}$, а второго — скалярно на $\vec{E}$ и складывая, получим

$$(\vec{\partial} \vec{n} \vec{S}_0) - \frac{c}{8\pi} \Delta, \quad (17)$$

где

$$\Delta = \{(\vec{E} \vec{\partial} \vec{D}) - (\vec{D} \vec{\partial} \vec{E})\} + \{(\vec{H} \vec{\partial} \vec{B}) - (\vec{B} \vec{\partial} \vec{H})\} \quad \text{и} \quad \vec{S}_0 = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{H}].$$

Вектор $\vec{\partial} \vec{n}$ параллелен касательной к поверхности (14) волновых векторов $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}(\omega, \vec{k})$. Естественно, что обращение величины Δ в нуль означает, что поток $\vec{S}_0$ направлен перпендикулярно поверхности (14) и, следовательно, параллелен направлению групповой скорости $\vec{V}_g$. Последнее автоматически выполняется для случая покоящихся изотропных ($\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{\partial} \vec{D} = \varepsilon \vec{\partial} \vec{E}$) и анизотропных ($D_i = \varepsilon_{ij} E_j$) сред с симметричным тензором ε_{ij} .

Для произвольных покоящихся и движущихся сред соотношения между $(\vec{D}, \vec{B})$ и $(\vec{E}, \vec{H})$ имеют весьма сложный вид и, вообще говоря, величина Δ в (17) может оказаться отличной от нуля (см. ниже раздел 4). Однако для движущихся изотропных и однородных сред эта связь имеет вид [1]

$$\vec{D} = \gamma^2 \{(\varepsilon - \beta^2) \vec{E} - (\varepsilon - 1) \vec{\beta} (\vec{\beta} \vec{E}) + (\varepsilon - 1) [\vec{\beta} \vec{B}]\}, \quad (18)$$

$$\vec{H} = \gamma^2 \{(1 - \varepsilon \beta^2) \vec{H} + (\varepsilon - 1) \vec{\beta} (\vec{\beta} \vec{B}) + (\varepsilon - 1) [\vec{\beta} \vec{E}]\},$$

где $\gamma^{-2} = 1 - \beta^2$, а $\mu = 1$.

Если среда не обладает дисперсией, т. е. $\varepsilon = \text{const}$, то, определяя из соотношений (18) вариации $\vec{\partial} \vec{D}$ и $\vec{\partial} \vec{n}$ через $\vec{\partial} \vec{E}$ и $\vec{\partial} \vec{B}$ и используя уравнения Максвелла, после несложных вычислений можно показать, что в этом случае ($\varepsilon = \text{const}$) $\Delta = 0$ и, следовательно, поток энергии $\vec{S}_0 = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{H}]$ в движущейся среде без дисперсии параллелен направ-

лению групповой скорости. Как мы видим, величина $\vec{S}_0$ совпадает с величиной $\vec{S}$ в (3). В то же время поток энергии S^A из (2) кроме составляющей $\vec{S}_0 = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{H}]$ имеет дополнительное векторное слагае-

мое, пропорциональное $\vec{\beta}$, и, следовательно, вектор не будет параллелен вектору $\vec{V}_g$. Заметим при этом, что групповая скорость $\vec{V}_g$ волн в движущейся среде не зависит от вида рассматриваемого нами тензора.

Покажем теперь, что вектор $\vec{S}^M$ не только параллелен $\vec{V}_g$, но и что для W^M и $\vec{S}^M$ выполняется соотношение (13). Для этого рассмотрим простой случай цилиндрической системы, когда $\vec{\beta} = \beta \vec{e}_z$, $\vec{E} = E_\rho \vec{e}_\rho + E_z \vec{e}_z$ и $\vec{k} = k_\rho \vec{e}_\rho + k_z \vec{e}_z$ и вычислим W^M и компоненты $\vec{S}^M$ через одну из компонент поля (E_z) и параметры среды. С помощью соотношений (18), уравнений Максвелла (16) и дисперсионного уравнения (14) можно показать, что

$$S_z^M = \frac{\varepsilon E_z^2}{4\pi n_p^2} \cdot c(1 - \beta^2) \{ (1 - \beta^2 \varepsilon) n_z + \beta(\varepsilon - 1) \}, \quad (19)$$

$$S_\rho^M = \frac{\varepsilon E_z^2}{4\pi n_p^2} \frac{cn_z}{\gamma^2}, \quad S_\parallel^M = 0, \quad W_M = \frac{\varepsilon E_z^2}{4\pi n_p^2} \{ (\varepsilon - \beta^2) - \beta(\varepsilon - 1) n_z \},$$

где $n_p = \frac{ck_\rho}{\omega}$ определяется через $n_z = \frac{ck_z}{\omega}$ с помощью (14).

С другой стороны, для движущейся среды без дисперсии групповая скорость $\vec{V}_g$ имеет вид [10]

$$\vec{V}_g = c \frac{\vec{n} + (\varepsilon - 1) \gamma^2 \beta (1 - \beta^2 \vec{n})}{1 + (\varepsilon - 1) \gamma^2 (1 - \beta^2 \vec{n})}. \quad (20)$$

Сравнивая компоненты $\vec{V}_g$ с выражениями (19), нетрудно убедиться в том, что $\vec{S}^M = W^M \cdot \vec{V}_g$.

В заключение заметим, что для произвольного электромагнитного поля (не плоских и монохроматических волн) в движущейся среде без дисперсии из уравнений Максвелла и соотношений связи Минковского (18) можно показать, что для величин W^M и $\vec{S}^M$ выполняется закон сохранения (в отсутствии внешних токов)

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x^k} = \frac{\partial W^M}{\partial t} + \text{div } \vec{S}^M = 0. \quad (21)$$

Последнее оказалось возможным потому, что в движущейся среде без дисперсии выполняется соотношение $\vec{E} d\vec{D} + \vec{H} d\vec{B} = \vec{D} d\vec{E} + \vec{B} d\vec{H}$, что нетрудно проверить с помощью (18), что аналогично условию $\Delta = 0$ для монохроматических плоских волн.

Таким образом, мы показали, что в движущейся среде без дисперсии соотношение (13) выполняется для компонент тензора Минковского и не справедливо для компонент тензора Абрагама.

4. Рассмотрим каким образом наличие дисперсии в движущейся среде сказывается на справедливости высказанных нами выше утверждений. Пусть диэлектрическая проницаемость среды ε ($\mu = 1$) зависит в системе ее покоя от частоты ω' , т. е. $\varepsilon = \varepsilon(\omega')$. Тогда в лаборатор-

ной системе координат, относительно которой среда движется со скоростью $\vec{u} = c\vec{\beta}$, в силу соотношения (15) величина $\varepsilon(\omega')$ будет зависеть и от волнового вектора $\vec{k}$, т. е. движение диспергирующей среды приводит к появлению пространственной дисперсии [10], и следовательно, диэлектрическая постоянная будет зависеть от направления распространения $\vec{n} = \frac{c\vec{k}}{\omega}$ так, что

$$\varepsilon(\omega') = \varepsilon(\gamma, \omega' [1 - \vec{\beta} \vec{n}]). \quad (22)$$

Это означает, что при варьировании величин $\vec{P}$ и $\vec{H}$ в (18) по направлению $\vec{n}$ мы должны варьировать не только вектора $\vec{E}$ и $\vec{B}$, но и величину ε . Расчет показывает, что в этом случае величина Δ отлична от нуля и равна

$$\Delta = \delta\varepsilon \gamma^2 f(\vec{E}, \vec{B}, \vec{n}),$$

$$f(\vec{E}, \vec{B}, \vec{n}) = E^2 - (\vec{\beta} \vec{E}) - \beta^2 B^2 - (\vec{\beta} \vec{B}) + 2(\vec{B}, [\vec{E} \vec{\beta}]), \quad (23)$$

или, используя (22), получим

$$\Delta = -\omega \gamma^3 (\vec{\beta} \vec{\partial} \vec{n}) \cdot f \cdot \varepsilon'(\omega'),$$

$$\varepsilon'(\omega') = \frac{\partial \varepsilon(\omega')}{\partial \omega'}. \quad (24)$$

Поскольку в данном случае Δ пропорционально $\vec{\partial} \vec{n}$, то с помощью (24) соотношение (17) можно записать так —

$$(\vec{\partial} \vec{n} \cdot \vec{S}) = 0, \quad (25)$$

где

$$\vec{S} = \vec{S}_0 + \vec{S}_1, \quad \vec{S}_1 = \frac{c}{8\pi} \omega \gamma^3 \vec{\beta} \cdot \varepsilon' f. \quad (26)$$

Таким образом, для движущейся среды при наличии дисперсии роль потока энергии, который нормален к поверхности (14) волновых векторов и, следовательно, параллелен направлению групповой скорости $\vec{V}_g$, играет не вектор $\vec{S}_0 = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{H}]$, а суммарный вектор потока

$\vec{S} = \vec{S}_0 + \vec{S}_1$ в (26). Это совершенно аналогично отличию направления потока энергии $\vec{S}$ от вектора $\vec{S}_0 = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{H}]$ в покоящихся средах при учете пространственной дисперсии [9] и, как мы видим, в обоих случаях связано с учетом пространственной дисперсии.

Для доказательства справедливости соотношения (13) и в данном случае рассмотрим опять конкретный случай аксиально-симметричной задачи, когда $\vec{\beta} = \beta \vec{e}_z$, $\vec{E} = E_\rho \vec{e}_\rho + E_z \vec{e}_z$, $\vec{k} = k_\rho \vec{n}_\rho + k_z \vec{n}_z$. В этом слу-

чае, как нетрудно видеть из (26), вектор $\vec{S}_1$ имеет только z -ую компоненту. Ее можно вычислить в явном виде через параметры среды и одну из компонент электрического поля (E_z). С помощью уравнений Максвелла (16) и дисперсионного уравнения (14) можно получить

$$S_{1z} = \frac{c}{8\pi} \omega \gamma \beta \varepsilon' \frac{\varepsilon}{n_p^2} \gamma^2 E_z^2 (1 - \beta n_z)^2. \quad (27)$$

В то же время групповая скорость волн в движущейся среде с дисперсией имеет вид [10]

$$\vec{V}_g = c \frac{\vec{n} + \beta \gamma^2 (1 - \beta n) \{(\varepsilon - 1) + \frac{\gamma}{2} \varepsilon' (1 - \beta n)\}}{1 + \gamma^2 (1 - \beta n) \{(\varepsilon - 1) + \frac{\gamma}{2} \varepsilon' (1 - \beta n)\}}, \quad (28)$$

где опять $\gamma^{-2} = 1 - \beta^2$, $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, $\varepsilon' = \frac{d\varepsilon}{d\omega}$.

Сравнивая выражения (28) и (26), мы видим, что в данном случае соотношение (13) оказывается выполненным, если под плотностью энергии W^M в движущейся диспергирующей среде понимать величину $W^M(\omega)$, равную

$$W(\omega) = \frac{\varepsilon E_z^2 \gamma^2}{4\pi n_p^2} \{(\varepsilon - \beta^2) - \beta(\varepsilon - 1)n_z\} \left\{ 1 + \gamma^2 (1 - \beta n_z) \left[(\varepsilon - 1) + \frac{\gamma}{2} \varepsilon' (1 - \beta n_z) \right] \right\}. \quad (29)$$

Это выражение аналогично [9] можно получить и из рассмотрения законов сохранения для волнового пакета в движущейся диспергирующей среде.

В заключение мы хотим отметить специфическую особенность движущейся полностью ионизированной плазмы, для которой

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega'^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\gamma^2 (\omega - \vec{k} \vec{n})^2}. \quad (30)$$

Нетрудно видеть, что в этом случае поверхность волновых векторов (14) становится сферической и, следовательно, нормаль к ней совпадает с направлением волнового вектора $\vec{k}$. Это значит, что и направление групповой скорости $\vec{V}_g$ тоже совпадает с направлением $\vec{k}$. Это легко обнаружить из выражения (28), если в него подставить формулу (30). Оказывается, что именно добавка $\vec{S}_1$ в (26) к потоку $\vec{S}_0$ делает полный поток $\vec{S}$ направленным тоже в направлении $\vec{k}$.

Заметим, что групповая скорость $\vec{V}_g$ и полный поток энергии $\vec{S}$ направлены по волновому вектору $\vec{k}$ в средах, у которых ε имеет вид

$$\varepsilon(\omega') = 1 + \frac{\text{const}}{\omega'^2}. \quad (31)$$

Резюмируя вышеизложенное, можно сказать, что так как тензор энергии-импульса электромагнитного поля, полученный с помощью вариационного принципа, имеет неоднозначное выражение, можно попытаться устранить эту неоднозначность, определяя какую-либо его компоненту из других соображений. В качестве таких компонент мы взяли реально наблюдаемые величины: плотность энергии $\mathcal{W}$ и плотность потока энергии $\vec{S}$. Проведенный выше анализ их свойств говорит о том, что для сред, у которых в движущейся системе координат выполняется соотношение (13), необходимо пользоваться тензором Минковского. Примером таких сред может служить плазма и плазмopodobные среды с ε , задаваемой формулой (31).

Мы ограничились рассмотрением безграничных сред. На наш взгляд в этом случае не имеет смысла делить тензор энергии-импульса на тензор поля и среды, как это делалось в [12]—[13]. Насколько это необходимо при решении граничных задач, требует, по-видимому, отдельного рассмотрения.

Авторы благодарны В. А. Гинзбургу, Б. М. Болотовскому, Г. М. Гарибяну и В. Р. Тевикяну за ценные советы и полезные дискуссии.

Ереванский физический институт

Поступила 26.XII.1969

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. Паули, Теория относительности, ГИТТЛ, М.—Л. 1947.
2. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, ГИТТЛ, М.—Л. (1949).
3. К. Е. Novobatzky, Acta Phys. Hung. 1, № 5, 25 (1949).
4. А. М. Глузюк, Указатель литературы по электродинамике движущихся сред, ИРЭ АН УССР, Харьков, 1967.
5. S. R. de Groot and L. C. Suttorp, Phys. Let. 24A, № 7, 385 (1967) и ссылки на ранние работы.
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, ГИТТЛ, М.—Л., 1948.
7. Б. М. Болотовский, А. А. Рухадзе, ЖЭТФ, 37, № 5, 1346 (1959).
8. В. М. Болотовский, О. С. Мергелян, С. Н. Столяров, Изв. АН АрмССР, Физика, 4, 203 (1969).
9. В. М. Агранович и В. А. Гинзбург, Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов, ГИФМЛ, М., 1965.
10. С. Н. Столяров, Изв. ВУЗов, Радиофизика, 5, № 4, 671 (1962).
11. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИТТЛ, 1957.
12. G. Marx and G. O. Györgyi, Ann. of Phys., 16, 241 (1955).
13. G. Marx, G. Györgyi, Acta Phys. Hung. 3, 213 (1954).

ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍՏԱԿԱՆ ԴԱՇՏԻ ԷՆԵՐԳԻԱ-ԻՄՊՈՒԼՍԻ
ՏՆՆՁՈՐԻ ՀԱՐՑԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Հ. Ս. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ, Ս. Ն. ՍՏՈԼՅԱՐՈՎ

Աշխատանքում քննարկվում է միջավայրում էլեկտրամագնիսական դաշտի էներգիա-իմպուլսի տենզորի ընտրման հարցը: Քանի որ վարիացիոն սկզբունքով ստացված էներգիա-իմպուլսի

տենզորի արտահայտությունը միարժեք չի, ապա փորձ է արվում ստանալ միարժեք արտահայտություն՝ հենվելով ֆիզիկական դատողություններից: Ցույց է տրված, որ եթե անսահման միջավայրում, ցանկացած կորդինատային սխեմեմում տեղի ունի $S = W \cdot \nabla g$ առնչությունը, ապա այդպիսի միջավայրի համար անհրաժեշտ է օգտվել Մինկովսկու տենզորից:

ON THE ENERGY-MOMENTUM TENSOR OF ELECTROMAGNETIC FIELD

O. S. MERGELIAN, S. N. STOLIAROV

The paper deals with choosing the energy-momentum tensor of an electromagnetic field in the medium. In view of the fact that the variational principle offers an ambiguous expression for the energy-momentum tensor, an attempt is made to obtain an unambiguous expression on the basis of physical considerations. It is shown that, if in an infinite medium in any coordinate system the relationship $\vec{S} = W \cdot \vec{\nabla} g$ is fulfilled, then in such a medium the Minkowskian tensor should be used.