Изв. АН Армянской ССР, Физика, 5, 244—249 (1970)

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ТОК КОЛЬЦЕВОГО УСКОРИТЕЛЯ ИЛИ НАКОПИТЕЛЯ

А. И. БАРЫШЕВ

Рассматривается устойчивость синхротронных колебаний сгустков частиц с учетом напряжения, наводимого ими в ускоряющих резонаторах. Показано, что при отрицательной расстройке резонатора величина предельного устойчивого тока определяется мощностью генератора, приростом энергии сгустков и не зависит от затухания синхротронных колебаний. При положительной расстройке предельный ток существенно зависит от величины затухания.

Как известно, синхротронные (фазовые) колебания ускоряемых частиц зависят от амплитуды и фазы ускоряющего напряжения, последнее в свою очередь зависит от тока и фазы частиц. Таким образом, уравнения, описывающие поведение этих величин, должны быть согласованными. Напряжение, наводимое в резонаторах сгустками частиц, кратно частоте их обращения и может содержать большое число гармоник, однако мы будем учитывать лишь основную гармонику, соизмеримую с частотой в.ч. генератора, предполагая тем самым, что собственные частоты резонаторов не кратны основной частоте (например, цилиндрические резонаторы).

Добротность цепей связи с генератором обычно много меньше, чем добротность самих резонаторов, и приводит поэтому лишь к расширению их частотной характеристики. Учитывая эти соображения и считая все резонаторы идентичными, удобно заменить их одиночным колебательным контуром с эквивалентными параметрами, а генератор и пучок можно учесть как подключение соответствующих генераторов тока.

Однако при записи согласованных уравнений фазовых колебаний возникает неудобство, состоящее в том, что уравнения фазовых колебаний содержат частоты много меньшие частоты генератора, входящей в уравнения для напряжения на эквивалентном контуре. Поэтому целесообразно от уравнений для мгновенных величин напряжений и токов перейти к так называемым укороченным уравнениям, содержащим лишь амплитуды и фазы, исключив тем самым частоту генератора. Замена пучка генератором тока позволяет учесть и распределение частиц по фазам внутри сгустка, так как в этом случае результирующий ток пучка будет суммой отдельных токов частиц. Возможно также разбиение ускоряемого сгустка на любое число более мелких сгустков, каждый из которых будет входить при этом в результирующий ток со своей амплитудой и фазой. Наконец, вместо амплитуд генераторов токов будем использовать амплитуды напряжений, наводимых этими генераторами.

Положим, что при резонансе генератор при выключенном пучке создает в контуре напряжение $u_г = V_г \cos \omega_г t$, а пучок—(при выключенном генераторе) напряжение

$$u_н = -\sum_{k=1}^{n} V_{нk} \cos(\omega_г t - \varphi_k),$$

где

$\omega_г$ — частота генератора,

n — число частиц (или сгустков),

φ_k — фаза частицы,

$V_{нk}$— амплитуда напряжения, наводимая „k"-ой частицей.

Напряжение на контуре u_p, записанное для мгновенных величин, определяется уравнением

$$\ddot{u}_p + 2\alpha\dot{u}_p + \omega^2 u_p = 2\alpha\omega_г \left[\sum_{k=1}^{n} V_{нk} \sin(\omega_г t - \varphi_k) - V_г \sin \omega_г t\right], \tag{1}$$

где $\alpha = \omega/2Q$ — затухание резонатора, Q — добротность резонатора с учетом связи с генератором, ω — собственная частота резонатора.

Считая $u_p = V_p(t) \cos[\omega_г t + Q(t)]$, записав (1) в укороченном виде и присоединяя уравнения фазовых колебаний, получим систему согласованных уравнений:

$$\left\{\begin{aligned} &\dot{V}_p + \alpha V_p = \alpha V_г \cos\Theta - \alpha \sum_{k=1}^{n} V_{нk} \cos(\Theta + \varphi_k), \\ &V_p(\dot{\Theta} - \Delta\omega) = -\alpha V_г \sin\Theta + \alpha \sum_{k=1}^{n} V_{нk} \sin(\Theta + \varphi_k), \\ &\Delta \dot{E}_k = \frac{eV_p M}{T_s} \cos(\Theta + \varphi_k) - \frac{\Delta E_{зад}}{T_s}, \\ &\dot{\varphi}_k = \frac{2\pi q \alpha_м}{T_s} \frac{\Delta E_k}{E}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

В этих уравнениях

$\Delta\omega = \omega - \omega_г$ — расстройка резонатора ($\Delta\omega > 0$, если собственная частота резонатора больше частоты генератора).

M — фактор времени пролета,

T T_s — период обращения равновесной частицы,

$\Delta E_{зад}$ — заданный прирост энергии по циклу ускорения, зависящий от скорости роста магнитного поля и т. п. и не зависящий от равновесной фазы Φ_s,

$\alpha_м$ — логарифмическая производная длины орбиты по импульсу,

ΔE_k — отклонение энергии „k"-ой частицы от равновесной энергии,

E, E_s — энергия неравновесной и равновесной частиц,

$\Phi_k = \varphi_k + \Theta$ — фаза прохождения „k"-ой частицы, отсчитываемая от максимума ускоряющего напряжения.

Уравнения (2) для случая $n=1$ аналогичны соответствующим уравнениям работы [1]; они пригодны как для анализа переходных процессов [2], так и для анализа установившегося режима.

Для определения предельного устойчивого тока рассмотрим случай одного точечного сгустка. Для равновесного установившегося состояния, при котором $\dot{V}_p = \dot{\Theta} = \Delta\dot{E} = \dot{\varphi} = 0$, из (2) получим систему уравнений

$$\begin{cases} V_{ps} = V_{\text{г}} \cos(\Phi_s - \varphi_s) - V_{\text{н}} \cos\Phi_s, \\ \xi V_{ps} = V_{\text{г}} \sin(\Phi_s - \varphi_s) - V_{\text{н}} \sin\Phi_s, \\ V_{ps} \cos\Phi_s = V_0, \end{cases} \tag{3}$$

где введены обозначения $\xi = \Delta\omega/\alpha$, $V_0 = \Delta E_{\text{зад}}/eM$.

Отметим, что при одновременном изменении знаков у величин Φ_s, φ_s, $-\xi$ на обратные вид уравнений не меняется.

V_0 имеет смысл заданного прироста энергии на обороте в вольтах, а индекс s указывает на равновесное состояние. В (3) удобно все фазы отсчитывать от фазы пучка, тогда φ_s — фаза генератора, а Φ_s — фаза напряжения на резонаторе. Из (3) исключив величины V_{ps} и Φ_s можно получить выражение для $V_{\text{н}}$ в виде

$$V_{\text{н}} = V_{\text{г}} (\cos\varphi_s - \xi \sin\varphi_s) - V_0 (1 + \xi^2). \tag{4}$$

Будем считать $V_{\text{г}}$ также заданной величиной, а ξ и φ_s — параметрами. Приравняв нулю производные $\partial V_{\text{н}}/\partial\varphi_s$ и $\partial V_{\text{н}}/\partial\xi$, получим уравнения, определяющие $V_{\text{н max}}$:

$$\begin{cases} \sin\varphi_s + \xi\cos\varphi_s = 0, \\ V_{\text{г}} \sin\varphi_s + 2\xi V_0 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Подставляя корни (5) в (4, 3), получим

$$V_{\text{н max}_1} = \frac{V_{\text{г}}^2}{4V_0}, \quad \sin\Phi_s = \mp\sqrt{1 - \frac{4V_0^2}{V_{\text{г}}^2}},$$

$$V_{ps} = \frac{V_{\text{г}}}{2}, \quad \xi_{\text{опт}_1} = -\operatorname{tg}\varphi_{s\,\text{опт}_1} = \mp\sqrt{\frac{V_{\text{г}}^2}{4V_0^2} - 1}, \tag{6}$$

если $0 \leqslant V_0 < \dfrac{V_{\text{г}}}{2}$.

При $\dfrac{V_{\text{г}}}{2} \leqslant V_0 < V_{\text{г}}$ имеем

$$V_{\text{н max}_2} = V_{\text{г}} - V_0, \quad \Phi_s = \xi_{\text{опт}_2} = \varphi_{s\,\text{опт}_2} = 0, \quad V_{ps} = V_0. \tag{7}$$

Отметим, что в случае (6) получаются две расстройки $\xi_{\text{опт}_1}$, отличающиеся знаком: при этом меняется и знак равновесной фазы Φ_s^0. Интересно также, что в этом режиме независимо от величины V_0 амплитуда V_{ps} остается постоянной, хотя $V_{\text{н max}_1}$ и $\xi_{\text{опт}_1}$ меняются, увеличиваясь при уменьшении V_0. Из (3) следует, что при выключении пучка (т. е. при $V_н=0$) в новом установившемся режиме $V_p=V_г/\sqrt{1+\xi^2}$ независимо от величины φ_s так, что при $\xi_{опт_1}>\sqrt{3}$ амплитуда напряжения на резонаторе уменьшается.

Таким образом, в режиме, определяемом соотношениями (6), кажущаяся расстройка, вносимая в резонатор пучком, оказывается скомпенсированной подбором величин ξ, φ_s.

Иногда представляется интересным найти наибольшие значения $V_н$ при произвольных значениях ξ. Подставляя верхнее уравнение (5) в (4), получим

$$V_{нп}=V_г\sqrt{1+\xi^2}-V_0(1+\xi^2). \tag{8}$$

По аналогии с работой [3], где это же значение $V_{нп}$ было получено другим способом, назовем его предельным током пучка.

Предельный ток пучка, полученный из рассмотрения уравнений баланса амплитуд и фаз в установившемся режиме (3) может оказаться неприемлемым с точки зрения устойчивости когерентных фазовых колебаний. Для получения условий устойчивости этих колебаний рассмотрим малые отклонения величин V_p, Θ, φ от равновесия, т. е. положим

$$\begin{aligned} V_p &= V_{ps}+v, & v &\ll V_{ps},\\ \varphi &= \varphi_s+\Phi, & \Phi &\ll 1,\\ \Theta &= \Theta_s+\eta, & \eta &\ll 1. \end{aligned} \tag{9}$$

Обозначив квадрат частоты фазовых колебаний

$$\Omega_0^2=2\pi q\alpha_м\, eMV_{ps}\sin\Phi_s/T_s^2E_s, \text{ где } \Phi_s=\varphi_s+\Theta,$$

и введя коэффициент затухания фазовых колебаний β, получим в линейном приближении систему уравнений

$$\left\{\begin{aligned} &\ddot\Phi+2\beta\dot\Phi+\Omega_0^2\Phi=\Omega_0^2\left(\frac{v}{V_{ps}}\operatorname{ctg}\Phi_s-\eta\right),\\ &\frac{\dot v}{V_{ps}}+\alpha\frac{v}{V_{ps}}+\Delta\omega\,\eta=\alpha\frac{V_н}{V_{ps}}\Phi\sin\Phi_s,\\ &\dot\eta+\alpha\eta-\Delta\omega\frac{v}{V_{ps}}=\alpha\frac{V_н}{V_{ps}}\Phi\cos\Phi_s. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Исключив v, η, для Φ получим

$$\dddot\Phi+2(\alpha+\beta)\ddot\Phi+[\Omega_0^2+4\alpha\beta+\alpha^2+\Delta\omega^2]\dot\Phi+2[\alpha\Omega_0+\beta(\alpha^2+\Delta\omega^2)]\dot\Phi+$$
$$+\Omega_0^2\left[\alpha^2+\Delta\omega^2+\frac{\alpha\Delta\omega V_н}{V_{ps}\sin\Phi_s}\right]\Phi=0. \tag{11}$$

Если искать решение (11) в виде $\Phi=\exp\{\Omega_0\lambda t\}$, для λ получается характеристическое уравнение

$$\lambda^4+2(p+q_0)\lambda^3+(1+p^2+m^2+4pq_0)\lambda^2+$$
$$+2[p+q_0(p^2+m^2)]\lambda+p^2+m^2+\gamma=0, \tag{12}$$

где введены безразмерные параметры

$$p=\frac{\alpha}{\Omega_0},\ q_0=\frac{\beta}{\Omega_0},\quad m=\frac{\Delta\omega}{\Omega_0},\quad \gamma=\frac{pmV_{н}}{V_{ps}\sin\Phi_s}. \tag{13}$$

Исследовать устойчивость колебаний можно, используя алгебраический критерий Гурвитца-Раусса. Согласно этому критерию, все корни уравнения (12) имеют отрицательные вещественные части, если определители Гурвитца больше нуля. Один из них положителен независимо от знаков γ и $\sin\Phi_s$, остальные (для случая $q_0/p=\beta/\alpha\ll 1$, всегда практически выполняющегося) — при выполнении условий

$$\Omega_0^2>0, \tag{14}$$

$$\frac{q_0}{p}[p^2+m^2-1)^2+4p^2]>\gamma, \tag{15}$$

$$p^2+m^2>-\gamma. \tag{16}$$

Из условия (14) следует, что независимо от знака расстройки $\Delta\omega$, при $\sin\Phi_s<0$ всегда возникает неустойчивость. Если $\gamma<0$ (что означает $\Delta\omega<0$, так как $\sin\Phi_s$ должен быть положительным), то условие (15) выполняется в силу положительности коэффициентов левой части, согласно же (16) устойчивость имеет место, если

$$|\gamma|\leqslant p^2+m^2,\ \Delta\omega<0. \tag{17}$$

Если $\Delta\omega>0$ устойчивость имеет место при выполнении условия (15). Условие (16) было получено в работе [1], где рассматривался случай $q_0=0$, условие (15) аналогично одному из условий работы [4], полученному из других соображений.

Определим величину устойчивого тока для случая $\Delta\omega<0$. Учитывая соотношения (13), перепишем (17) в виде

$$V_{н}\leqslant\frac{1+\xi^2}{|\xi|}V_{ps}\sin\Phi_s. \tag{18}$$

Видно, что если $\sin\Phi_s\neq 0$, а $|\xi|\to 0$ ток пучка может принимать сколь угодно большие значения, что не противоречит уравнению (12), ибо в этом случае исчезает связь когерентных колебаний с напряжением на резонаторе. Если и ξ, и Φ_s одновременно стремятся к нулю, возникает неопределенность в величине $V_{н}$. Для избежания неопределенности присоединим к критерию (18) уравнения баланса амплитуд и фаз (3), переписав их в виде

$$\begin{cases} V_{г}\sin\varphi_s=V_{ps}\sin\Phi_s+|\xi|\,V_0, \\ V_{г}\cos\varphi_s=V_{н}+V_0-|\xi|\,V_{ps}\sin\Phi_s. \end{cases} \tag{19}$$

Исключив из (19) φ_s и используя (18), взятое со знаком равенства, получим соотношение (8).

Таким образом, при расстройке $\Delta\omega<0$ $V_{нп}$ является наибольшим током пучка, одновременно устойчивым по когерентным фазовым колебаниям. Отметим, что в режиме предельного тока при $\xi_{оп\,m}=0$ равновесная фаза в соответствии с (7) также равна нулю и, следовательно, область фазовой устойчивости стягивается в точку, однако ток пучка отличен от нуля. Это обстоятельство объясняется, по-видимому, тем, что мы рассматриваем устойчивость одного точечного сгустка.

Определим величину устойчивого тока для случая $\Delta\omega > 0$. Исключив из уравнений (19), взятых с обратным знаком перед ξ, и условия (15) величины φ_s, $V_{\mu s} \sin \Phi_s$, получим уравнение

$$\left\{1 + \frac{\xi^2 p^3}{N q_0}\left[2 + \frac{p^3 (1+\xi^2)}{N q_0^2}\right]\right\} V_{\text{и}}^2 + 2 V_0 V_{\text{и}} + V_0^2 (1+\xi^2) - V_{\text{г}}^2 = 0, \qquad (20)$$

где $N = (p^2 + m^2 - 1) + 4p^2$.

Это уравнение при $\xi = 0$ дает значение тока пучка

$$V_{\text{нп}} = V_{\text{г}} - V_0.$$

Однако уже при сравнительно малой расстройке, определяемой условием $\xi p^2 \alpha / N\beta \gg 1$, ток пучка уменьшается до величины

$$V_{\text{нп}} \approx \frac{N\beta}{\alpha p^2 \xi \sqrt{1+\xi^2}} \sqrt{V_{\text{г}}^2 - V_0^2 (1+\xi^2)}\,. \qquad (21)$$

Ереванский физический институт
Поступила 27.I.1970

ЛИТЕРАТУРА

1. *K. W. Robinson*, Stability of beam in radiofrequency system CEAL—1010, 1964.
2. *А. И. Барышев, Ю. Ф. Орлов, В. С. Погосян*, Препринт ЕФИ—УФТ—1 (1968).
3. *М. М. Карлинер, Г. Н. Острейко, И. А. Шехтман*, Препринт—81, ИЯФ СОАН СССР, 1966.
4. *М. М. Карлинер, А. Н. Скринский, И. А. Шехтман*, Препринт—80, ИЯФ СОАН СССР, 1966.

ՕՂԱԿԱՁԵՎ ԱՐԱԳԱՑՈՒՑԻՉԻ ԿԱՄ ԿՈՒՏԱԿԻՉԻ ԱՌԱՎԵԼԱԳՈՒՅՆ ՀՈՍԱՆՔԸ

Ա. Ի. ԲԱՐԻՇԵՎ

Դիտարկվում է մասնիկների խմբի սինխրոտրոնային տատանումների կայունությունը՝ նրանց կողմից արագացնող ռեզոնատորներում մակածված լարման հաշվառմամբ։ Ցույց է տրված, որ ռեզոնատորների բացասական խանգարման դեպքում առավելագույն հոսանքի մեծությունը որոշվում է գեներատորի հզորությամբ, խմբերի էներգիայի աճով և կախված չէ սինխրոտրոնային տատանումների մարումից։ Դրական խանգարման դեպքում առավելագույն հոսանքը էապես կախված է մարման մեծությունից։

THE MAXIMUM CURRENT OF THE CIRCULAR ACCELERATOR OR STORAGE RING

A. I. BARISHEV

Synchrotron oscilation stability is investigated, taking into account the voltage induced in the cavities by electrons themselves. It is shown that the maximum accelerating current in conditions of negative detuning of the cavity depends on the transmitter power and energy gain; at the same time it is independent of the synchrotron oscillation damping rate. When the cavity detuning is positive, the maximum current depends significantly on damping rate.