ФАЗОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В ПОЛЕ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ С СИНХРОННОЙ ЭНЕРГИЕЙ В КАЧЕСТВЕ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Г. И. ЖИЛЕЙКО, Л. М. МОВСИСЯН

Исследуется решение фазового уравнения для отклонения фазы от равновесного значения в поле бегущей волны с учетом полей пространственного заряда с синхронной энергией в качестве независимой переменной. По заданным решениям фазового уравнения найдены необходимые поля и законы изменения равновесной фазы.

При исследовании взаимодействия пучка заряженных частиц с полем бегущей электромагнитной волны (линейные ускорители электронов, лампы с бегущей волной) основным вопросом является нахождение законов изменения амплитуды поля и фазовой скорости волны вдоль замедляющей системы. Ответ на этот вопрос дает совместное решение уравнений Максвелла и уравнений движения, которое в общем случае может быть проведено только путем численного интегрирования. Однако при учете полей пространственного заряда пучка задача усложняется и требует слишком большого количества машинного времени. Для предварительного анализа явлений целесообразно исследовать приближенное аналитическое решение, которое затем может быть просчитано на машине.

В работе [1] показано, что уравнения движения с синхронной энергией в качестве независимой переменной имеют преимущества по сравнению с обычно применяемыми уравнениями с независимой переменной „время“ или „продольная координата“. Эти преимущества состоят в следующем:

Во-первых, можно поставить прямую задачу, т. е. найти параметры замедляющей системы по заданным параметрам пучка: току, энергии частиц, спектру энергии, длине сгустка и др.

Во-вторых, динамика движущихся частиц исследуется отдельно от уравнения связи скорости частиц и величины поля—произвольно задать величину поля волны, энергию частиц и длину замедляющей системы нельзя.

В-третьих, в уравнения движения входят величины, являющиеся явными функциями энергии и неизвестными функциями времени или продольной координаты; этими величинами являются скорости частиц и поле пространственного заряда.

Запишем уравнения движения с учетом поля пространственного заряда в виде [1]

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{du_s} = \frac{\sin(\varphi_s + \psi)}{\sin \varphi_s} - \frac{\varepsilon_q}{\varepsilon \sin \varphi_s} - 1, \\ \frac{d\psi}{du_s} = \frac{\sigma}{\xi \sin \varphi_s} - \frac{d\varphi_s}{du_s}, \end{cases} \quad (1)$$

где $\xi = u - u_s$, $\psi = \varphi - \varphi_s$ — отклонения энергии и фазы частицы соответственно от синхронных значений; $u_s = \frac{U_s}{U_0}$ — приведенная синхронная энергия частиц,

$\varepsilon = \frac{E}{kU_0}$ — приведенная амплитуда напряженности

действующего электрического поля; $\varepsilon_q = \frac{E_q}{kU_0}$ — приведенная величина поля пространственного заряда, являющаяся явной функцией синхронной энергии u_s и величины отклонения фазы ψ [1], $k = \frac{2\pi}{\lambda}$; $U_0 = m_0 c^2$ — энергия покоя частицы, а величина

$$\sigma = \frac{u_s + \xi + 1}{\sqrt{(u_s + \xi)^2 + 2(u_s + \xi)}} - \frac{u_s + 1}{\sqrt{u_s^2 + 2u_s}}$$

явная функция синхронной энергии u_s . В работе [1] исследуется уравнение для отклонения энергии ξ и обсуждаются преимущества таких уравнений. Однако в ряде случаев более удобно бывает исследовать уравнение для отклонения фазы ψ , так как ψ определяет спектральный состав тока пучка. Тогда основная задача, которая возникает при исследовании, может быть сформулирована так: определить зависимость амплитуды действующего поля E и синхронной фазы φ_s от синхронной энергии u_s при заданной зависимости $\psi(u_s)$ или гармоники тока пучка. Легко видеть, что задача носит синтетический характер.

Поставленную задачу будем решать при линеаризации правых частей системы уравнений (1). Такое приближение соответствует малым отклонениям энергии и фазы частицы от синхронных значений, т. е.

$$\sigma = \frac{u_s + \xi + 1}{\sqrt{(u_s + \xi)^2 + 2(u_s + \xi)}} - \frac{u_s + 1}{\sqrt{u_s^2 + 2u_s}} = - (u_s^2 + 2u_s)^{-3/2} \xi + \dots; \psi \ll \varphi_s.$$

Тогда, для функции ψ получаем уравнение

$$\psi'' + \frac{A'}{A} \psi' + \frac{\text{ctg } \varphi_s}{A} \psi = \frac{y}{A \sin \varphi_s} - \frac{A'}{A} \varphi_s - \varphi_s', \quad (2)$$

где $A = \varepsilon \sin \varphi_s (u_s^2 + 2u_s)^{3/2}$,

$y = \frac{\varepsilon_q}{\varepsilon}$ — отношение напряженности поля пространственного заряда на конце электронного сгустка к амплитуде действующего поля, штрихи означают дифференцирование по u_s .

Уравнение (2) является нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка, аналитическое решение которого возможно

лишь при определенных значениях коэффициентов. Нелинейность обусловлена тем, что величина y есть функция ψ [1]. Поле пространственного заряда в уравнение (2) входит в более простом виде, чем в уравнение для отклонения энергии, используемое в [1].

Уравнение (2) при заданной зависимости $\psi(u_s)$ и выбранной функции $\varphi_s(u_s)$ позволяет определить зависимость амплитуды поля от u_s , т. е. определить величину A ,

$$A' + \frac{\psi'' + \varphi_s''}{\psi' + \varphi_s'} A = \frac{y - \psi \cos \varphi_s}{(\psi' + \varphi_s') \sin \varphi_s}. \quad (3)$$

Уравнение (3) является нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка, которое в самом общем случае приводится к уравнению Абеля второго рода:

$$AA' + \frac{\psi'' + \varphi_s''}{\psi' + \varphi_s'} A^2 + \frac{\psi \operatorname{ctg} \varphi_s}{\psi' + \varphi_s'} A - \frac{\varepsilon_q (u_s^2 + 2u_s)^{3/2}}{(\psi' + \varphi_s') \sin \varphi_s} = 0. \quad (4)$$

Величина поля пространственного заряда ε_q определяется, исходя из формы сгустка и распределения плотности заряда вдоль сгустка [2]. Решение уравнения (3) можно найти методом последовательных приближений:

$$A = A_0 + \frac{1}{\psi' + \varphi_s'} \int \frac{\varepsilon_q (u_s^2 + 2u_s)^{3/2}}{A} du_s, \quad (5)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{\psi' + \varphi_s'} \left[\operatorname{const} - \int \psi \operatorname{ctg} \varphi_s du_s \right]$$

является интегралом уравнения (4) при исчезающе малом токе. Применяя метод последовательных приближений, получим достаточно точное решение для A и, следовательно, для действующего поля ε . Здесь целесообразно знать примерную связь ψ с A , т. е. примерный вид функции ψ . Отметим, что вид функции $\psi(u_s)$ определяется однородным уравнением—уравнением (2) без правой части,

$$\psi'' + \frac{A'}{A} \psi' + \frac{\operatorname{ctg} \varphi_s}{A} \psi = 0. \quad (6)$$

Исходя из этого, целесообразно рассмотреть частные решения уравнения (6) в различных приближениях. Если, что нередко имеет место на практике, $\varepsilon = \operatorname{const}$ и $\varphi_s = \operatorname{const}$, то решение уравнения (6) в различных областях изменения энергии имеет вид:

а) при $u_s \ll 1$

$$\psi(u_s) = u_s^{-1/4} Z_1(\sqrt[4]{2b^2} \cdot 2u_s^{1/4}),$$

где

$$b = \frac{\operatorname{ctg} \varphi_s}{\varepsilon \sin \varphi_s} = \operatorname{const},$$

Z_1 — любая функция Бесселя первого порядка;

б) при $u_s \gg 1$

$$\psi(u_s) = u_s^{-1} Z_2(2\sqrt{bu_s^{-1}}).$$

Как видно, $\psi(u_s)$ падает с ростом энергии u_s . Если в процессе взаимодействия поле и синхронная фаза изменяются так, что $A = au_s^n$ и $\text{ctg } \varphi_s = du_s^m$, то решение однородного уравнения фазовых колебаний таково:

$$\psi(u_s) = u_s^{\frac{1-n}{2}} Z_\nu \left(\frac{2}{m-n+2} \sqrt{\frac{d}{a}} u_s^{\frac{m-n+2}{2}} \right),$$

где

$$\nu = \frac{|1-n|}{m-n+2},$$

а для амплитуды действующего поля имеем

$$\varepsilon = \frac{au_s^n \sqrt{1+d^2 u_s^{2m}}}{(u_s^2 + 2u_s)^{3/2}}.$$

Здесь Z_ν любая функция Бесселя порядка ν . Комбинация показателей m и n дает возможность описать практически все интересующие нас зависимости $\psi = \psi(u_s)$, которые требуют соответствующих $\varepsilon(u_s)$ и $\varphi_s(u_s)$. Мы нашли решение для крайней частицы сгустка. Для остальных частиц решение имеет такой же вид, лишь изменяется амплитудный множитель, т. е. изменяются начальные значения. Как видно из решений фазовых уравнений при $(m+n) > 0$, решение имеет колебательный характер. Однако при значительном токе пучка колебательное движение может превратиться в ламитационное. Группировка сгустка частиц происходит до значения $\psi = \psi_{\min}$, при котором перепад действующего поля равен полю пространственного заряда на конце сгустка. Из этого условия можно определить минимальную длину сгустка при заданном токе пучка,

$$\varepsilon \sin \varphi_s - \varepsilon \sin(\varphi_s - \psi) = \varepsilon_q. \quad (7)$$

Из решения этого трансцендентного уравнения определяем $\psi_{\min}$ (см. также [1]).

Решая уравнение движения с синхронной энергией в качестве независимой переменной, получаем функциональные зависимости действующего поля $\varepsilon = \varepsilon(u_s)$ и действующей синхронной фазы $\varphi_s = \varphi_s(u_s)$. Из этих зависимостей определяем связь длины волновода с синхронной энергией,

$$z = \frac{1}{k} \int \frac{du_s}{\varepsilon(u_s) \sin \varphi_s(u_s)}, \quad (8)$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$; λ — длина волны в свободном пространстве.

Обеспечение необходимых зависимостей $\varepsilon(z)$ производится путем соответствующего выбора геометрии замедляющей системы.

Отметим, что режимы взаимодействия с подающими $\varepsilon(u_s)$ соответствуют либо режиму ускорения частиц (сильноточный линейный ускоритель электронов) с большим током пучка [1], либо режиму усиления колебаний поля—режим лампы с бегущей волной, когда энергия электронов уменьшается с ростом координаты z . Возрастающие зависимости $\varepsilon(u_s)$ характерны для режимов ускорения частиц с улучшенной группировкой [1].

Московский энергетический институт

Поступила 15.I.1970

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Г. И. Жилейко, Высоковольтные электронные пучки. „Энергия“, 1968.
2. Л. М. Мовсисян, Атомная энергия, 27, 1, 69 (1969).

ՍԻՆԽՐՈՆ ԷՆԵՐԳԻԱՅՈՎ ՈՐՊԵՍ ԱՆԿԱԽ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ՎԱԶՈՂ ԱՎԻԲԻ ԴԱՇՏՈՒՄ ԷԼԵԿՏՐՈՆՆԵՐԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ՖԱԶԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄԸ

Գ. Ի. ԺԻԼԵՅԿՈ, Լ. Մ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Հետազոտվում է ֆազային հավասարման լուծումը վազող ալիքի դաշտում հավասարակշռված արժեքից ֆազի շեղման համար հաշվի առնելով տարածական լիցքի դաշտերը, որպես անկախ փոփոխական վերլուծելով սինխրոն էներգիան: Ֆազային հավասարման տրված լուծումներով որոշված են վազող ալիքի անհրաժեշտ դաշտերը և հավասարակշռված ֆազի փոփոխման օրենքները:

THE PHASE EQUATION FOR ELECTRON MOTION IN A TRAVELLING WAVE FIELD WITH SYNCHRONOUS ENERGY AN INDEPENDENT VARIABLE

G. I. ZHILEIKO, B. M. MOVSISIAN

A solution for the phase equation with synchronous energy as an independent variable is investigated for the deflection of phase from equilibrium value in travelling wave field, taking into account the space charge fields.

The necessary travelling wave fields and the laws for the change of the equilibrium phase are found for the given solution of the phase equation.