Изв. АН Армянской ССР, Физика, 5, 29—40 (1969)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПЕРЕХОДНОМ ИЗЛУЧЕНИИ В ПЛАЗМЕННОЙ ПЛАСТИНКЕ

С. С. ЭЛБАКЯН

Решена задача о переходном излучении в плазменной пластине, помещенной в ваккум, в предположении зеркального отражения электронов плазмы на границе с вакуумом. Получены поля излучения в вакууме и поле в среде. Рассмотрен частный случай слабой пространственной дисперсии.

1. Влияние пространственной дисперсии на переходное излучение исследовалось в ряде работ [1—4] (см. также [5]). В перечисленных выше работах рассматривалась задача с одной границей (вакуум-плазма). В среде с пространственной дисперсией могут возбуждаться продольные волны (плазмоны), которые на поверхностях раздела при определенных условиях трансформируются в поперечную электромагнитную волну. Возникновение продольных волн приводит к повышению порядка дифференциальных уравнений поля, что приводит к необходимости сформулировать дополнительное граничное условие, "перепутывающее" продольные и поперечные волны [1].

Однако можно решить задачу в кинетическом приближении [2—4]. При этом не возникает вопроса о дополнительном условии для электромагнитного поля, которое естественным образом вытекает из краевого условия для функции распределения электронов плазмы на границе с вакуумом.

Работа [6] (см. также [7]) посвящена изучению переходного излучения при прохождении заряженной частицы через плазменную пластинку в случае слабой пространственной дисперсии в предположении зеркального отражения электронов от поверхности плазмы. При этом авторами было использовано следующее граничное условие: нормальная компонента поля излучения, идущего внутрь металла, равна на поверхности нулю. Это условие было получено из рассмотрения задачи с одной границей и перенесено затем авторами на случай двух границ.

В настоящей работе приводится решение задачи о переходном излучении в плазменной пластине в общем случае пространственной дисперсии, причем нехватающее для сшивки полей граничное условие наложено на функцию распределения электронов на двух границах пластины (задача решается в кинетическом приближении, считая, что электроны плазмы отражаются зеркально на границе с вакуумом). При этом необходимость в дополнительном граничном условии, наложенном на нормальную компоненту поля излучения, отпадает. В случае слабой пространственной дисперсии выражения для полей излучения отличаются от полученных в [6].

2. Пусть плазмоподобная среда имеет вид пластинки толщиной a, находящейся в вакууме, и заряженная частица проходит из вакуума ($z<0$) в среду ($0 \leqslant z \leqslant a$) с постоянной скоростью v_0, двигаясь вдоль оси z. Поля в вакууме (в областях пространства $z<0$ и $z>a$), следуя работе [8], представим в виде поля частицы и поля излучения. Амплитуды полей излучения найдем в дальнейшем из условий сшивки—равенство тангенциальных компонент электрического и магнитного полей в среде и вакууме (см. [4]).

Для определения поля в среде будем исходить из системы уравнений Максвелла, дополненной кинетическим уравнением для функции распределения электронов среды $F(\vec{r}, \vec{p}, t) = f_0(\vec{p}) + f_1(\vec{r}, \vec{p}, t)$, где f_0 — равновесное распределение; f_1 — неравновесная добавка, удовлетворяющая условию $|f_1| \ll f_0$, $\vec{p}$ — импульс электронов плазмы. Уравнение для функции распределения $F(\vec{r}, \vec{p}, t)$ запишем в виде, предложенном Власовым [9]. Уравнение для неравновесной добавки получим линеаризацией исходного уравнения

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{v}\,\mathrm{grad}_{\vec{r}}\, f_1 + e\vec{E}\vec{v}\,\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = \left(\frac{\partial f_e}{\partial t}\right)_{st}, \tag{1}$$

где $\vec{E}$ — поле в плазме, входящее в уравнения Максвелла, ε — энергия электронов среды, $\vec{v}$ — скорость электронов, $\left(\frac{\partial f_e}{\partial t}\right)_{st}$ — интеграл столкновений. Для интеграла столкновений используем следующую аппроксимацию $\left(\frac{\partial f_e}{\partial t}\right)_{st} = \nu f_1$, где ν — некая эффективная частота столкновений (напр. [10]). Произведем преобразование Фурье по времени и координатам x, y для f_1 и $\vec{E}$,

$$f_1(\vec{p}, \vec{r}, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{\varkappa}\vec{\rho} - i\omega t} f_{\vec{\varkappa},\omega}(z, \vec{p})\, d\vec{\varkappa}\, d\omega,$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_{\vec{\varkappa},\omega}(z)\, e^{i\vec{\varkappa}\vec{\rho} - i\omega t}\, d\vec{\varkappa}\, d\omega. \tag{2}$$

Тогда (1) запишется в виде

$$v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \zeta f = -e(\vec{E}_{\vec{\varkappa},\omega}\vec{v})\, f_0'. \tag{3}$$

($\zeta = -i(\omega - \vec{v}\vec{\varkappa} + i\nu)$). Граничные условия на f запишем, как обычно [10, 11], для зеркального отражения

$$f(p_z<0;\ 0) = f(p_z>0;\ 0),$$
$$f(p_z<0;\ a) = f(p_z>0;\ a). \tag{4}$$

Решение уравнения (3) определяется следующим образом, соответственно, для

$$p_z>0,\ f_{\vec{\varkappa},\omega}(z)=-\frac{1}{\operatorname{sh}\frac{\zeta}{v_z}a}\int_0^a\frac{e(E_xv_x+E_yv_y)}{v_z}f_0'\operatorname{ch}\frac{\zeta}{v_z}(z'-a)\,e^{-\frac{\zeta}{v_z}z}\,dz'-$$

$$-\frac{1}{\operatorname{sh}\frac{\zeta}{v_z}a}\int_0^a eE_zf_0'\operatorname{sh}\frac{\zeta}{v_z}(z'-a)\,e^{-\frac{\zeta}{v_z}z}\,dz'-$$

$$-\int_0^z\frac{e(E_xv_x+E_yv_y)}{v_z}f_0'\,e^{\frac{\zeta}{v_z}(z'-z)}\,dz'-$$

$$-\int_0^z eE_zf_0'\,e^{\frac{\zeta}{v_z}(z'-z)}\,dz',$$

$$p_z<0,\ f_{\vec{\varkappa},\omega}(z)=-\frac{1}{\operatorname{sh}\frac{\zeta}{v_z}a}\int_0^a\frac{e(E_xv_x+E_yv_y)}{v_z}f_0'\operatorname{ch}\frac{\zeta}{v_z}(z'-a)\,e^{\frac{\zeta}{v_z}z}\,dz'-\tag{5}$$

$$-\frac{1}{\operatorname{sh}\frac{\zeta}{v_z}a}\int_0^a eE_zf_0'\operatorname{sh}\frac{\zeta}{v_z}(z'-a)\,e^{\frac{\zeta}{v_z}z}\,dz'+$$

$$+\int_0^z\frac{e(E_xv_x+E_yv_y)}{v_z}f_0'\,e^{-\frac{\zeta}{v_z}(z'-z)}\,dz'-$$

$$-\int_0^z eE_zf_0'\,e^{-\frac{\zeta}{v_z}(z'-z)}\,dz'.$$

Уравнения Максвелла в среде $(0\leqslant z\leqslant a)$ после Фурье — преобразования по x, y, t имеют вид [4]

$$\frac{\partial}{\partial z}[\vec{n}\,\vec{H}]-i\vec{H}^z[\vec{n}\,\vec{\varkappa}]+i[\vec{\varkappa}\,\vec{H}^\rho]=-\frac{i\omega}{c}\vec{E}+\frac{4\pi}{c}\vec{j}_{\varkappa,\omega}(z)+\frac{e\vec{n}}{2\pi^2c}e^{i\frac{\omega}{v_0}z}.$$

$$\frac{\partial}{\partial z}[\vec{n}\,\vec{E}]-i\vec{E}^z[\vec{n}\,\vec{\varkappa}]+i[\vec{\varkappa}\,\vec{E}^\rho]=\frac{i\omega}{c}\vec{H},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\vec{H}^z+i(\vec{\varkappa}\,\vec{H})=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\vec{E}^z+i(\vec{\varkappa}\vec{E})=4\pi\rho_{\vec{\varkappa},\omega}(z)+\frac{e}{2\pi^2v_0}e^{i\frac{\omega}{v_0}z},\tag{6}$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор, направленный вдоль оси z,

$$\vec{j}_{\vec{x},\omega}(z)=e\int\vec{v}\,f_{\vec{x},\omega}(z,\vec{p})\,d\vec{p},\quad \rho_{\vec{x},\omega}(z)=e\int f_{\vec{x},\omega}(z,\vec{p})\,d\vec{p}. \tag{7}$$

Уравнения (6) для полей в плазме удобно распространить на область $-a\leqslant z\leqslant 0$. Для этого необходимо продолжить поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ на область отрицательных значений z. В случае зеркального отражения продолжение на область $z<0$ определяется формулами

$$\vec{E}^{\rho}(-z)=\vec{E}^{\rho}(z),\ \vec{H}^{\rho}(-z)=-\vec{H}^{\rho}(z),$$

$$\vec{E}^{z}(-z)=-\vec{E}^{z}(z),\ \vec{H}^{z}(-z)=\vec{H}^{z}(z). \tag{8}$$

На всю остальную ось поля продолжаются периодически с периодом $2a$. Решение системы (6) будем искать в виде ряда Фурье [12—14].

$$\vec{E}(z)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}\vec{E}_p\,e^{i\frac{\pi p}{a}z},$$

$$\vec{E}_p=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\vec{E}(z)\,e^{-i\frac{\pi p}{a}z}\,dz. \tag{9}$$

Умножим уравнения системы (6) на $e^{-i\frac{\pi p}{a}z}$ и проинтегрируем по z от $-a$ до a. Тогда для Фурье компонент полей, с учетом скачков при $z=0$ и $z=a$, уравнения (6) перепишутся в виде

$$i[\vec{k}\vec{H}]_m=-\frac{i\omega}{c}\varepsilon_{ml}\vec{E}_l-\frac{e\vec{n}_m}{4\pi^2ca}\left\{\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{v_0}+\frac{\pi p}{a}\right)a}-1}{i\left(\frac{\omega}{v_0}+\frac{\pi p}{a}\right)}-\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{v_0}-\frac{\pi p}{a}\right)a}-1}{i\left(\frac{\omega}{v_0}-\frac{\pi p}{a}\right)}\right\}+$$

$$+\frac{1}{a}[\vec{n}\vec{H}^{\rho}_{\vec{x},\omega}(+0)]_m-(-1)^p\frac{1}{a}[\vec{n}\vec{H}^{\rho}_{\vec{x},\omega}(a-0)]_m, \tag{10}$$

$$i[\vec{k}\vec{E}]=\frac{i\omega}{c}\vec{H},\ (\vec{k}\vec{H})=0;\ (m,\ l=x,\ y,\ z).$$

Здесь $\vec{k}$ имеет компоненты $\vec{x}$ и $q=\frac{\pi p}{a}$ (q принимает дискретный ряд значений),

$$\varepsilon_{ml}\left(\omega,\vec{x},\frac{\pi p}{a}\right)=\delta_{ml}+\frac{4\pi e^2}{\omega}\int d\vec{p}\,f_0'\frac{v_m v_l}{\omega-\vec{x}\vec{v}-\frac{\pi p}{a}v_z+i\nu}. \tag{11}$$

В (10) не выписано четвертое уравнение системы (6), ибо оно не дает ничего нового, так как форма записи плотностей тока и заряда автоматически учитывает сохранение заряда. Систему (10) удобно решать, предварительно разбив поля на продольную (вдоль вектора $\vec{k}$) и поперечную составляющие

$$\vec{E}=\frac{\vec{k}(\vec{k}\vec{E})}{k^2}-\frac{[\vec{k}[\vec{k}\vec{E}]]}{k^2}=\vec{E}^l+\vec{E}^{tr}. \tag{12}$$

Магнитное поле имеет только поперечную составляющую, что следует из третьего уравнения системы (10). Тензор диэлектрической проницаемости ε_{ml} представим в виде

$$\varepsilon_{ml}(\omega,\vec{k})=\left(\delta_{ml}-\frac{k_m k_l}{k^2}\right)\varepsilon^{tr}(\omega,\vec{k})+\frac{k_m k_l}{k^2}\varepsilon^l(\omega,\vec{k}), \tag{13}$$

де ε^{tr} и ε^l — поперечная и продольная диэлектрические проницаемости (см. [10]). Тогда решение системы для электрическото поля выглядит так:

$$\vec{E}^{tr}=-\frac{ei\omega\,[\vec{k}[\vec{k}\vec{n}]]\left\{\dfrac{e^{i\left(\frac{\omega}{v_0}+\frac{\pi p}{a}\right)a}-1}{i\left(\dfrac{\omega}{v_0}+\dfrac{\pi p}{a}\right)}-\dfrac{e^{i\left(\frac{\omega}{v_0}-\frac{\pi p}{a}\right)a}-1}{i\left(\dfrac{\omega}{v_0}-\dfrac{\pi p}{a}\right)}\right\}}{4\pi^2c^2ak^2\left(\dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^{tr}-k^2\right)}+$$

$$+\frac{i\omega\,[\vec{k}[\vec{k}[\vec{n}\vec{H}^{p}_{\vec{x},\omega}(+0)]]]}{cak^2\left(\dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^{tr}-k^2\right)}-(-1)^p\frac{i\omega\,[\vec{k}[\vec{k}[\vec{n}\vec{H}^{p}_{\vec{x},\omega}(a-0)]]]}{cak^2\left(\dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^{tr}-k^2\right)},$$

$$\vec{E}^{l}=\frac{ei\vec{k}(\vec{k}\vec{n})\left\{\dfrac{e^{i\left(\frac{\omega}{v_0}+\frac{\pi p}{a}\right)a}-1}{i\left(\dfrac{\omega}{v_0}+\dfrac{\pi p}{a}\right)}-\dfrac{e^{i\left(\frac{\omega}{v_0}-\frac{\pi p}{a}\right)a}-1}{i\left(\dfrac{\omega}{v_0}-\dfrac{\pi p}{a}\right)}\right\}}{4\pi^2ak^2\,\omega\varepsilon^l}- \tag{14}$$

$$-\frac{ic\vec{k}(\vec{k}[\vec{n}\vec{H}^{p}_{\vec{x},\omega}(+0)])}{a\omega k^2\varepsilon^l}+(-1)^p\frac{ic\vec{k}(\vec{k}[\vec{n}\vec{H}^{p}_{\vec{x},\omega}(a-0)])}{a\omega k^2\varepsilon^l}.$$

Значения констант $\vec{H}^{p}_{\vec{x},\omega}(+0)$ и $\vec{H}^{p}_{\vec{x},\omega}(a-0)$ мы определим из условий сшивки полей на границах.

В формулах (14) легко перейти к случаю полуограниченной плазмы, устремляя $a\to\infty$. При этом слагаемые, пропорциональные $\vec{H}^{p}_{\vec{x},\omega}(a-0)$ исчезают, так как на бесконечности поле обращается в нуль, и формулы (14) переходят в соответствующие формулы работы [4]. Как видно из (14), частица возбуждает в плазме поле, которое состоит из поля частицы в среде и из полей продольной и поперечной волн.

3. Определим поля излучения в вакууме (в областях до пластинки и за пластинкой). Для этого поля в вакууме представим в виде трехкратных интегралов Фурье [8] по $d\vec{\varkappa}\, dk_z = d\vec{\varkappa}\, d\omega \dfrac{1}{v_0}$ и напишем условие равенства тангенциальных составляющих полей на границах раздела $z=0$ и $z=a$. Это приводит к следующему условию на Фурье-компоненты полей:

$$
\begin{gathered}
-\frac{ie}{2\pi^2} \frac{\vec{\varkappa}}{\left(\dfrac{\omega^2}{v_0^2}-\lambda_1^2\right)} + \vec{E}'_{t1} = v_0 \vec{E}^{\rho}_{\vec{\varkappa},\omega}(+0), \\
-\frac{ie}{2\pi^2 c} \frac{v_0 [\vec{n}\vec{\varkappa}]}{\left(\dfrac{\omega^2}{v_0^2}-\lambda_1^2\right)} + \vec{H}'_{t1} = v_0 \vec{H}^{\rho}_{\vec{\varkappa},\omega}(+0), \\
v_0 \vec{E}^{\rho}_{\vec{\varkappa},\omega}(a-0) = -\frac{ie\vec{\varkappa}\, e^{i\frac{\omega}{v_0}a}}{2\pi^2\left(\dfrac{\omega^2}{v_0^2}-\lambda_1^2\right)} + \vec{E}'_{t2} e^{i\lambda_1 a}, \\
v_0 \vec{H}^{\rho}_{\vec{\varkappa},\omega}(a-0) = -\frac{iev_0 [\vec{n}\vec{\varkappa}]}{2\pi^2 c\left(\dfrac{\omega^2}{v_0^2}-\lambda_1^2\right)} e^{i\frac{\omega}{v_0}a} + \vec{H}'_{t2} e^{i\lambda_1 a}.
\end{gathered} \tag{15}
$$

Здесь $\vec{E}'$ и $\vec{H}'$ — Фурье компоненты поля излучения в вакууме; $\lambda_1^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \varkappa^2$, $\operatorname{Re}\lambda_1 > 0$, $\operatorname{Im}\lambda_1 > 0$ для $\omega > 0$. Из уравнений Максвелла для полей излучения в вакууме имеем

$$
\begin{gathered}
\vec{H}'_{t1} = -\frac{c}{\omega\lambda_1}\{\lambda_1^2 [\vec{n}\vec{E}'_{t1}] + (\vec{\varkappa}\vec{E}'_{t1})[\vec{n}\vec{\varkappa}]\}, \\
\vec{H}'_{t2} = \frac{c}{\omega\lambda_1}\{\lambda_1^2 [\vec{n}\vec{E}'_{t2}] + (\vec{\varkappa}\vec{E}'_{t2})[\vec{n}\vec{\varkappa}]\}.
\end{gathered} \tag{16}
$$

Из условий (15) и уравнений поля видно, что $\vec{H}^{\rho}_{\vec{\varkappa},\omega}(+0)$ и $\vec{H}^{\rho}_{\vec{\varkappa},\omega}(a-0)$ имеют направление $[\vec{n}\vec{\varkappa}]$, поэтому можно положить

$$
\begin{gathered}
\vec{E}'_{t1} = \vec{\varkappa} X_1, \quad \vec{H}^{\rho}_{\vec{\varkappa},\omega}(+0) = [\vec{n}\vec{\varkappa}]\, Y_1, \\
\vec{E}''_{t1} = \vec{\varkappa} X_2, \quad \vec{H}^{\rho}_{\vec{\varkappa},\omega}(a-0) = [\vec{n}\vec{\varkappa}]\, Y_2,
\end{gathered} \tag{17}
$$

где X_1, X_2, Y_1, Y_2 — искомые функции $\vec{\varkappa}$ и ω.

Используя (14) можно, выразить $\vec{E}^{\rho}_{\vec{\varkappa},\omega}(+0)$ и $\vec{E}^{\rho}_{\vec{\varkappa},\omega}(a+0)$ черев $\vec{H}^{\rho}_{\vec{\varkappa},\omega}(+0)$ и $\vec{H}^{\rho}_{\vec{\varkappa},\omega}(a-0)$.

$$\vec{E}^{\rho}_{\vec{\varkappa},\omega}(+0)=\lim_{z\to+0}\sum_{p}e^{i\frac{\pi p}{a}z}(\vec{E}^{tr}_{\rho}+\vec{E}^{l}_{\rho})=$$

$$=\frac{ei\vec{\varkappa}}{4\pi^2 a v_0}I_1+\frac{\vec{\varkappa}c}{\omega}I_2Y_1-\frac{\vec{\varkappa}c}{\omega}I_2'Y_2,$$

$$\vec{E}^{\rho}_{\vec{\varkappa},\omega}(a-0)=\lim_{z\to a-0}\sum_{p}e^{i\frac{\pi p}{a}z}(\vec{E}^{tr}_{\rho}+\vec{E}^{l}_{\rho})=$$

$$=\frac{ei\vec{\varkappa}}{4\pi^2 a v_0}I_3+\frac{\vec{\varkappa}c}{\omega}I_4Y_1-\frac{\vec{\varkappa}c}{\omega}I_4'Y_2, \tag{18}$$

где

$$I_{1,3}=\frac{v_0}{\omega}\lim_{\substack{z\to+0\\ z\to a-0}}\sum_{p}e^{i\frac{\pi p}{a}z}\frac{\left[\varkappa^2+\left(\frac{\pi p}{a}\right)^2-\frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon^{tr}-\varepsilon^{l})\right]\left(\frac{\pi p}{a}\right)}{\left(\varkappa^2+\left(\frac{\pi p}{a}\right)^2\right)\left[\varkappa^2+\left(\frac{\pi p}{a}\right)^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^{tr}\right]\varepsilon^{l}}\times$$

$$\times\left\{\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{v_0}+\frac{\pi p}{a}\right)a}-1}{i\left(\frac{\omega}{v_0}+\frac{\pi p}{a}\right)}-\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{v_0}-\frac{\pi p}{a}\right)a}-1}{i\left(\frac{\omega}{v_0}-\frac{\pi p}{a}\right)}\right\}, \tag{19}$$

$$I_{2,4}=\frac{i}{a}\lim_{\substack{z\to+0\\ z\to a-0}}\sum_{p}e^{i\frac{\pi p}{a}z}\frac{\left[\varkappa^2\left(\varkappa^2+\left(\frac{\pi p}{a}\right)^2\right)-\frac{\omega^2}{c^2}\left(\varkappa^2\varepsilon^{tr}+\left(\frac{\pi p}{a}\right)^2\varepsilon^{l}\right)\right]}{\left(\varkappa^2+\left(\frac{\pi p}{a}\right)^2\right)\left[\varkappa^2+\left(\frac{\pi p}{a}\right)^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^{tr}\right]\varepsilon^{l}}, \tag{20}$$

$$I_{2,4}'=\frac{i}{a}\lim_{\substack{z\to+0\\ z\to a-0}}\sum_{p}(-1)^p e^{i\frac{\pi p}{a}z}\frac{\left[\varkappa^2\left(\varkappa^2+\left(\frac{\pi p}{a}\right)^2\right)-\frac{\omega^2}{c^2}\left(\varkappa^2\varepsilon^{tr}+\left(\frac{\pi p}{a}\right)^2\varepsilon^{l}\right)\right]}{\left(\varkappa^2+\left(\frac{\pi p}{a}\right)^2\right)\left[\varkappa^2+\left(\frac{\pi p}{a}\right)^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^{tr}\right]\varepsilon^{l}}. \tag{21}$$

В результате решения системы (15) получим следующие выражения для X_1, X_2, Y_1, Y_2:

$$X_1=\frac{1}{D}\left\{\frac{ie}{2\pi^2\left(\frac{\omega^2}{v_0^2}-\lambda_1^2\right)}\left[1+\frac{I_4'}{\lambda_1}-\frac{v_0}{\omega}I_2-\frac{v_0}{\omega}I_2\frac{I_4'}{\lambda_1}+\frac{v_0}{\omega}I_2'\frac{I_4}{\lambda_1}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{ie}{4\pi^3 a}\left[I_1+I_1\frac{I_4'}{\lambda_1}-I_3\frac{I_2'}{\lambda_1}\right]-\frac{ie\,I_2'}{2\pi^2\left(\frac{\omega^2}{v_0^2}-\lambda_1^2\right)}e^{i\frac{\omega}{v_0}a}\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{v_0}{\omega}\right)\right\}, \tag{22}$$

$$X_2=\frac{1}{D}\left\{\frac{ie}{2\pi^2\left(\frac{\omega^2}{v_0^2}-\lambda_1^2\right)}\left[1+\frac{I_2}{\lambda_1}+\frac{v_0}{\omega}I_4'+\frac{v_0}{\omega}I_2\frac{I_4'}{\lambda_1}-\frac{v_0}{\omega}I_2'\frac{I_4}{\lambda_1}\right]+\right.$$

$$+\frac{ie}{4\pi^2 a}\left[I_3+I_3\frac{I_2}{\lambda_1}-I_1\frac{I_4}{\lambda_1}\right]e^{-i\frac{\omega}{v_0}a}-$$

$$\left.-\frac{ieI_4e^{-i\frac{\omega}{v_0}a}}{2\pi^2\left(\frac{\omega^2}{v_0^2}-\lambda_1^2\right)}\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{v_0}{\omega}\right)\right\}e^{-i\left(\lambda_1-\frac{\omega}{v_0}\right)a}, \tag{23}$$

$$Y_1=-\frac{1}{D}\left\{\frac{ie}{2\pi^2c\left(\frac{\omega^2}{v_0^2}-\lambda_1^2\right)}\left[\left(1+\frac{\omega}{\lambda_1 v_0}\right)\left(1+\frac{I_4'}{\lambda_1}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{I_2'}{\lambda_1}\left(1-\frac{\omega}{\lambda_1 v_0}\right)e^{i\frac{\omega}{v_0}a}\right]-\frac{ie\omega}{4\pi^2ac\lambda_1 v_0}\left[\frac{1}{\lambda_1}(I_3I_2'-I_1I_4')-I_1\right]\right\}, \tag{24}$$

$$Y_2=-\frac{1}{D}\left\{\frac{ie}{2\pi^2c\left(\frac{\omega^2}{v_0^2}-\lambda_1^2\right)}\left[\left(1-\frac{\omega}{\lambda_1 v_0}\right)\left(1+\frac{I_2}{\lambda_1}\right)e^{i\frac{\omega}{v_0}a}+\frac{I_4}{\lambda_1}\left(1+\frac{\omega}{\lambda_1 v_0}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{ie\omega}{4\pi^2ac\lambda_1 v_0}\left[\frac{1}{\lambda_1}(I_2I_3-I_1I_4)+I_3\right]\right\}, \tag{25}$$

где

$$D=1+\frac{I_2+I_4'}{\lambda_1}+\frac{I_2I_4'-I_2'I_4}{\lambda_1^2}. \tag{26}$$

В предельном случае отсутствия пространственной дисперсии ($\varepsilon^{tr}(\omega,\vec{k})=\varepsilon^{l}(\omega,\vec{k})=\varepsilon(\omega)$) суммы (19—21) можно вычислить (см., напр. [15]).

В результате получим

$$I_1=\frac{v_0}{\omega}\frac{4a}{i\varepsilon}\frac{1}{\lambda_2^2-\frac{\omega^2}{v_0^2}}\left\{-\frac{\lambda_2}{2\sin\lambda_2 a}e^{i\frac{\omega}{v_0}a}+\frac{\lambda_2\cos\lambda_2 a}{2\sin\lambda_2 a}+i\frac{\omega}{2v_0}\right\},$$

$$I_3=\frac{v_0}{\omega}\frac{4a}{i\varepsilon}\frac{1}{\lambda_2^2-\frac{\omega^2}{v_0^2}}\left\{-\frac{\lambda_2\cos\lambda_2 a}{2\sin\lambda_2 a}e^{i\frac{\omega}{v_0}a}+\frac{\lambda_2}{2\sin\lambda_2 a}+\frac{i\frac{\omega}{v_0}}{2}e^{i\frac{\omega}{v_0}a}\right\}, \tag{27}$$

$$I_2=I_4'=\frac{i\lambda_2\cos\lambda_2 a}{\varepsilon\sin\lambda_2 a},\quad I_4=I_2'=\frac{i\lambda_2}{\varepsilon\sin\lambda_2 a},$$

где $\lambda_2^2=\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon-\varkappa^2$, $\mathrm{Re}\,\lambda_2>0$, $\mathrm{Im}\,\lambda_2>0$ при $\omega>0$.

Подставляя эти выражения в (22) и (23) с учетом (17) получим формулу Гарибяна и Чаликяна для полей излучения в вакууме [см. 8].

4. Рассмотрим случай слабой пространственной дисперсии $\left(\frac{kv}{\omega} \ll 1\right)$. В этом случае поперечную и продольную диэлектрические проницаемости можно представить в виде $(\omega \gg \nu)$ [10]:

$$\varepsilon^{tr}(\omega, \vec{k}) = \varepsilon(\omega) - \alpha^{tr}\frac{c^2k^2}{\omega^2},$$

$$\varepsilon^{l}(\omega, \vec{k}) = \varepsilon(\omega) - \alpha^{l}\frac{c^2k^2}{\omega^2}, \tag{28}$$

где $\kappa^2 = \varkappa^2 + \left(\frac{\pi p}{a}\right)^2$.

Для применимости разложений (28) необходимо выполнение условий

$$|\varepsilon(\omega)| \ll \frac{mc^2}{\chi T_e}, \quad \left(\omega^2 \gg \frac{\chi T_e \omega_0^2}{mc^2}\right) \tag{29}$$

в случае нерелятивистской плазмы

и
$$|\varepsilon(\omega)| \ll 1 \tag{30}$$

в релятивистском случае [10, 16]. Здесь χ — постоянная Больцмана; T_e — температура электронов; m — их масса; $\omega_0^2 = \frac{4\pi N_e e^2}{m}$. Вычисляя с помощью этих значений диэлектрической проницаемости суммы (19—21) и подставляя в (22) с учетом (17), получим для поля излучения в вакууме до пластины следующее выражение:

$$\vec{E}'_{t1} = \frac{ie\vec{\varkappa}}{2\pi^2 F}\left\{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{A}} + \frac{1}{\lambda_1}\right)\alpha e^{-ia\sqrt{A}} + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{A}} - \frac{1}{\lambda_1}\right)\beta e^{ia\sqrt{A}} + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{A}}\gamma e^{i\frac{\omega}{v_0}a} - \right.$$

$$- \frac{2\varepsilon v_0}{\omega A}\frac{\sin a\sqrt{A}}{\left(k^2 - \frac{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon}{\alpha^l}\right)}\left[\sqrt{B}\operatorname{ctg} a\sqrt{B} - \frac{\omega}{v_0}\frac{\sqrt{A}}{\varepsilon\lambda_1}\operatorname{ctg} a\sqrt{A} + \right.$$

$$\left. + i\left(\frac{\omega}{v_0} + \frac{\sqrt{AB}}{\varepsilon\lambda_1}\operatorname{ctg} a\sqrt{A}\operatorname{ctg} a\sqrt{B} - \frac{\sqrt{AB}}{\varepsilon\lambda_1 \sin a\sqrt{A}\sin a\sqrt{B}}\right)\right] -$$

$$- \frac{2i\varepsilon\varkappa^2}{A}\sin a\sqrt{A}\left[\frac{\cos a\sqrt{A}\cos a\sqrt{B} - 1}{\sin a\sqrt{A}\sin a\sqrt{B}}\sqrt{\frac{A}{B}}\frac{v_0}{\omega\varepsilon\lambda_1} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{2\varepsilon}{1+\alpha^{tr}}\right)}{\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\left(k^2 - \frac{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon}{1+\alpha^{tr}}\right)} + \frac{i\mu}{\sqrt{B}}\operatorname{ctg} a\sqrt{B}\right] - \frac{2i\varkappa^4 v_0}{\omega\lambda_1 AB}\frac{\sin a\sqrt{A}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} +$$

$$+\frac{2v_0 e^{i\frac{\omega}{v_0}a}}{\omega\lambda_1 A\sin a\sqrt{B}\left(k^2-\frac{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon}{\alpha^l}\right)}\left[2i\sqrt{AB}\sin\frac{a(\sqrt{B}+\sqrt{A})}{2}\times\right.$$

$$\left.\times\sin\frac{a(\sqrt{B}-\sqrt{A})}{2}+\lambda_1\varepsilon\sqrt{B}\sin a\sqrt{A}-\sqrt{A}\frac{\omega}{v_0}\sin a\sqrt{B}\right]+$$

$$+\frac{2v_0\varkappa^2 e^{i\frac{\omega}{v_0}a}}{\omega A\lambda_1\sin a\sqrt{B}}\left[2\sqrt{\frac{A}{B}}\frac{\sin\frac{a(\sqrt{B}+\sqrt{A})}{2}\sin\frac{a(\sqrt{B}-\sqrt{A})}{2}}{k^2-\frac{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon}{1+\alpha^{tr}}}-\right.$$

$$-\frac{\frac{\omega}{v_0}\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\sin a\sqrt{A}\,(1+\alpha^{tr}-\alpha^l)}{\sqrt{B}\,\alpha^l(1+\alpha^{tr})\left(k^2-\frac{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon}{1+\alpha^{tr}}\right)\left(k^2-\frac{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon}{\alpha^l}\right)}-$$

$$\left.\left.-\frac{\omega}{v_0}\frac{\varepsilon\lambda_1}{\sqrt{B}}\sin a\sqrt{A}\,\frac{\frac{1}{\lambda_1}-\frac{v_0}{\omega}}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}}\right]\right\}, \tag{31}$$

где

$$F=\left\{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{A}}+\frac{1}{\lambda_1}\right)^2 e^{-ia\sqrt{A}}-\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{A}}-\frac{1}{\lambda_1}\right)^2 e^{ia\sqrt{A}}-\frac{2i\varkappa^2}{AB\lambda_1^2\sin a\sqrt{B}}\times\right.$$

$$\times[2i\varepsilon\lambda_1\sqrt{B}\cos a\sqrt{B}\sin a\sqrt{A}-2\sqrt{AB}(\cos a\sqrt{A}\cos a\sqrt{B}-1)+$$

$$\left.+\varkappa^2\sin a\sqrt{A}\sin a\sqrt{B}]\right\} \tag{32}$$

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \\ \beta\end{matrix}\right\}=\frac{\pm\frac{\varepsilon}{\sqrt{A}}-\frac{v_0}{\omega}}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}}+\frac{\mp\frac{1}{\sqrt{A}}+\frac{v_0}{\omega}}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon}, \tag{33}$$

$$\gamma=\frac{-\frac{1}{\lambda_1}+\frac{v_0}{\omega}}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}}-\frac{\frac{1}{\lambda_1\varepsilon}-\frac{v_0}{\omega}}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon}, \tag{34}$$

$$\mu=\frac{\frac{1}{\lambda_1}-\frac{v_0}{\omega}}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}}+\frac{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\,(1+\alpha^{tr}-\alpha^l)}{\varepsilon\lambda_1\alpha^l(1+\alpha^{tr})\left(k^2-\frac{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon}{1+\alpha^{tr}}\right)\left(k^2-\frac{\frac{v^2}{c^2}\varepsilon}{\alpha^l}\right)}+$$

$$+ i \operatorname{tg} a \sqrt{B} \, \frac{\dfrac{v_0 \sqrt{B}}{\omega \lambda_1 \varepsilon}}{k^2 - \dfrac{\dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon}{\alpha^l}}, \tag{35}$$

$$A = \frac{\lambda_2^2 - \varkappa^2 \alpha^{tr}}{1 + \alpha^{tr}}, \quad B = \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2 \alpha^l} - \varkappa^2, \quad k^2 = \varkappa^2 + \frac{\omega^2}{v_0^2}. \tag{36}$$

Поле излучения за пластинкой получается из (31) заменой $v_0 \to -v_0$ и умножением на $e^{-i\left(\lambda_1 - \frac{\omega}{v_0}\right)a}$.

Приведенная формула (31) для поля излучения отличается от соответствующей формулы работы [6] членами, зависящими от параметра B (в работе [6] параметру B соответствует параметр z^2), однако, вклад в излучение, обусловленный этими членами, мал.

Поэтому вывод, сделанный авторами работы [6], о том, что влияние на излучение пространственной дисперсии не существенно в области слабой дисперсии, подтверждается.

В заключение выражаю благодарность Г. М. Гарибяну за обсуждения.

Ереванский физический институт

Поступила 21.VIII .196

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. Л. Желнов*, ЖЭТФ, 40, 170 (1961).
2. *В. Ш. Яковенко*, ЖЭТФ, 42, 385 (1961).
3. *Э. А. Канер, В. М. Яковенко*, ЖЭТФ, 42, 1471 (1962).
4. *А. Ц. Аматуни*, ЖТФ, 34, 1354 (1964).
5. *Ф. Г. Басс, В. М. Яковенко*, УФН, 86, 189 (1965).
6. *В. П. Силин, Е. П. Фетисов*, ЖЭТФ, 45, 1572 (1963).
7. *V. P. Silin, E. P. Fetisov*, Phys. Rev. Lett, 7, 374 (1961).
8. *Г. М. Гарибян, Г. А. Чаликян*, Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 12, 49 (1959).
9. *А. А. Власов*, ЖЭТФ, 7, 203 (1936).
10. *В. П. Силин, А. А. Рухадзе*, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. Госатомиздат, М. (1961).
11. *R. B. Dingle*, Physica, 19, 311, 348, 729, 1187 (1953).
12. *А. Н. Кондратенко, В. И. Мирошниченко*, ЖТФ, 35, 2154 (1965).
13. *А. Н. Кондратенко, В. И. Мирошниченко*, ЖТФ, 36, 25 (1966).
14. *Ю. А. Романов*, Изв. высших учебных заведений, Радиофизика 7, 828 (1964).
15. *И. С. Градштейн, И. С. Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гос. издательство физ.-мат. литературы. М. (1962).
16. *В. П. Силин. Е. П. Фетисов*, ЖЭТФ, 41, 157 (1961).

ԱՆՑՈՒՄԱՅԻՆ ՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ՊԼԱԶՄԱՅԻ ՇԵՐՏԻ ՀԱՄԱՐ

Ս. Ս. ԷԼԲԱԿՅԱՆ

Լուծված է անցումային ճառագայթման խնդիրը պլազմայի շերտի մեջ, որը գտնվում է վակուումում, ենթադրելով, որ պլազմայի էլեկտրոնների անդրադարձումը պլազմա-վակուում *սահմանից հայելային է։ Ստացված են ճառագայթման դաշտերը վակուումում և դաշտը միջավայրում։*

Դիտարկված է թույլ տարածական դիսպերսիայի մասնավոր դեպքը։

A SOLUTION OF THE TRANSITION RADIATION PROBLEM FOR A PLASMA PLATE

S. S. ELBAKIAN

The problem of transition radiation in a plasma plate in vacuum is solved, assuming that the reflection of plasma electrons from plasma-vacuum boundary is a mirror one. The radiation fields in vacuum and the field in the medium are obtained. A particular case of weak spatial dispersion is discussed.