Изв. АН Армянской ССР, Физика, 5, 3—9 (1970)

ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИМПЕДАНС АНИЗОТРОПНЫХ КРИСТАЛЛОВ С ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛАЗМОЙ

Р. Г. ТАРХАНЯН

Получены выражения для поверхностного импеданса анизотропных кристаллов с электронной плазмой в отсутствие и при наличии слабой пространственной дисперсии. Исследован случай зеркального отражения электронов на поверхности кристалла. Показано, что как анизотропия, так и пространственная дисперсия заметно изменяют угловую и частотную зависимость оптических характеристик рассматриваемых систем.

1. Хорошо известно [1, 2], что некоторые оптические свойства кристаллических твердых тел, в частности, полупроводников и полуметаллов, могут быть объяснены лишь при учете пространственной дисперсии — зависимости тензора диэлектрической проницаемости от длины волны. Пространственная дисперсия в кристаллах обычно мала и поэтому представляет интерес лишь тогда, когда приводит к качественно новым эффектам, к числу которых относятся, например, оптическая анизотропия кубических кристаллов, гиротропия в кристаллах, не обладающих центром симметрии, появление так называемых „новых“ волн [3] и т. д.

При наличии пространственной дисперсии плотность тока, индуцированного в среде, определяется значением электрического поля во всех точках среды и уравнения для электромагнитного поля представляют собой интегро-дифференциальные уравнения, решение которых показывает, что поле в среде не имеет экспоненциального вида, предсказываемого классической теорией. При этом понятие о комплексном показателе преломления теряет свой физический смысл, и все оптические величины должны быть выражены через поверхностный импеданс. В случае изотропной плазмы такая задача была рассмотрена в работе [4]. Здесь мы получим выражения для компонент тензора поверхностного импеданса анизотропных кристаллов с электронной плазмой, ограничиваясь случаем квадратичного энергетического спектра электронов с минимумом энергии в центре зоны Бриллюэна. Такой случай осуществляется, например, в полупроводниках типа *Te* [5]. Предполагается, что частота рассматриваемых электромагнитных волн недостаточно велика для того, чтобы вызвать междузонные переходы или образовать экситонные состояния. В случае *Te* это условие выполняется в области волновых чисел 500—2000 $см^{-1}$ [6].

2. Пусть из изотропной среды (для простоты положим, что это вакуум или воздух), заполняющей полупространство $z<0$, на поверхность кристалла $z=0$ падает электромагнитная волна

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}, \tag{1}$$

где $k_x = \frac{\omega}{c} \sin\theta$, $k_y = 0$, $k_z = \frac{\omega}{c} \cos\theta$, θ — угол падения. Поле в среде $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(z) \, e^{i(k_x x - \omega t)}$, $z > 0$ определяется самосогласованным решением уравнений Максвелла и линеаризованного кинетического уравнения для функции распределения носителей тока, закон дисперсии которых имеет вид $\varepsilon = \frac{1}{2m} \mu_{ij} p_i p_j$, где μ_{ij} — безразмерный тензор обратной эффективной массы, m — масса свободного электрона. Полагая, что отражение электронов от поверхности носит зеркальный характер [1], стандартным образом можно показать, что при четном продолжении тангенциальных компонент электрического поля и нечетном продолжении нормальной компоненты в область $z < 0$ уравнения поля в Фурье-представлении принимают вид [4, 7, 8]

$$\Lambda_{ij} E_j(k_z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \, a_i, \tag{2}$$

$$\Lambda_{ij} = k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c_2} \varepsilon_{ij}, \quad a_x = \left[\frac{\partial E_x(z)}{\partial z} - i k_x E_z(z) \right]_{z=0},$$

$$a_y = \left. \frac{\partial E_y(z)}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad a_z = 0.$$

Используя условие нормировки $N = \int f_0(\varepsilon) \, d\vec{p}$, где N — равновесная концентрация носителей тока, в случае больцмановского распределения электронов для тензора диэлектрической проницаемости ε_{ij} получим

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^0_{ij} + \frac{\omega_0^2}{\omega \varkappa v} \sum_{k,\, l} R_{ki} R_{lj} \sqrt{\mu_k \mu_l} \left\{ F(w) \, \delta_{kl} + \frac{\varkappa_l \varkappa_k}{\varkappa^2} \left[2w + (2w^2 - 1) F(w) \right] \right\}, \tag{3}$$

где $\omega_0^2 = 4\pi N e^2/m$, $v = \sqrt{2T/m}$, T — температура в энергетических единицах, $F(w) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2} \, dt}{w - t}$, $w = \frac{\omega + i\nu}{\varkappa v}$, ν — частота столкновений электронов с дефектами решетки; мы считаем, что ν значительно меньше ω, а также плазменной частоты ω_0, так что в окончательных выражениях им можно пренебречь. $\vec{\varkappa} = \{\sqrt{\mu_x} k'_x, \sqrt{\mu_y} k'_y, \sqrt{\mu'_z} k'_z\}$, $\vec{k}' = \hat{R} \vec{k}$ — волновой вектор в системе главных осей тензора μ_{ij} (x', y', z'), μ_l — собственные значения тензора μ_{ij},

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha\cos\beta & -\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

В случае одноосного кристалла β — угол между осью кристалла (z') и нормалью к поверхности раздела (z), α — угол между плоскостью падения (xz) и плоскостью (zz'). $\overset{0}{\varepsilon}_{ij}$ — тензор диэлектрической проницаемости кристаллической решетки; мы будем считать, что $\overset{0}{\varepsilon}_{ij}$ не зависит от частоты, что справедливо, если последняя значительно больше (или меньше) характерных частот колебаний решетки. При произвольной ориентации оси кристалла относительно поверхности раздела и плоскости падения компоненты $\overset{0}{\varepsilon}_{ij}$ в системе координат xyz имеют вид

$$\overset{0}{\varepsilon}_{xx} = \overset{0}{\varepsilon}_{\perp}(\cos^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha) + \overset{0}{\varepsilon}_{\parallel}\cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta,\ \overset{0}{\varepsilon}_{xy} = \overset{0}{\varepsilon}_{yx} = \frac{1}{2}\sin 2\alpha\,\sin^2\beta\,(\overset{0}{\varepsilon}_{\parallel} - \overset{0}{\varepsilon}_{\perp}),$$

$$\overset{0}{\varepsilon}_{xz} = \overset{0}{\varepsilon}_{zx} = \frac{1}{2}\sin 2\beta\cdot\cos\alpha\,(\overset{0}{\varepsilon}_{\parallel} - \overset{0}{\varepsilon}_{\perp}),\ \overset{0}{\varepsilon}_{yy} = \overset{0}{\varepsilon}_{\perp}(\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta + \cos^2\alpha) + \overset{0}{\varepsilon}_{\parallel}\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta, \tag{4}$$

$$\overset{0}{\varepsilon}_{yz} = \overset{0}{\varepsilon}_{zy} = \frac{1}{2}\sin 2\beta\cdot\sin\alpha\,(\overset{0}{\varepsilon}_{\parallel} - \overset{0}{\varepsilon}_{\perp}),\ \overset{0}{\varepsilon}_{zz} = \overset{0}{\varepsilon}_{\perp}\sin^2\beta + \overset{0}{\varepsilon}_{\parallel}\cos^2\beta,$$

где $\overset{0}{\varepsilon}_{\parallel,\perp}$ — компоненты $\hat{\varepsilon}^0$ вдоль и поперек оси кристалла.

Перейдем к вычислению компонент двумерного тензора поверхностного импеданса $Z_{\alpha\beta}$. Последние определяются соотношениями [9]

$$E_\alpha(0) = Z_{\alpha\beta}\,a_\beta;\ (\alpha, \beta = x, y). \tag{5}$$

С помощью системы уравнений (2) и (5) получим

$$Z_{xx} = \frac{i\omega}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk_z\,\Delta^{-1}\cdot\frac{\omega^4}{c^4}\varepsilon_{yz}^2 - \left(k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{zz}\right)\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{yy}\right)\Big], \tag{6}$$

$$Z_{xy} = Z_{yx} = -\frac{i\omega^3}{\pi c^2}\int_{-\infty}^{\infty} dk_z\,\Delta^{-1}\cdot\left[\varepsilon_{yz}\left(k_x k_z + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{xz}\right) + \left(k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{zz}\right)\varepsilon_{xy}\right], \tag{7}$$

$$Z_{yy} = \frac{i\omega}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk_z\,\Delta^{-1}\cdot\left[\left(k_x k_z + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{xz}\right)^2 - \left(k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{zz}\right)\left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{xx}\right)\right], \tag{8}$$

где

$$\Delta = \det \left| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij} \right| \cdot \qquad (9)$$

Соотношения (3—9) в общем виде разрешают вопрос о вычислении оптических характеристик анизотропных твердых тел с электронной плазмой при зеркальном отражении электронов от поверхности кристалла. Например, коэффициент отражения при наклонном падении излучения определяется формулой

$$R_{s,\,p} = \frac{4\cos^2\theta \cdot |Z_{xy}|^2 + |(Z_{xx}Z_{yy} - Z_{xy}^2 - 1)\cos\theta \pm (Z_{yy}\cos^2\theta - Z_{xx})|^2}{|(Z_{xx}Z_{yy} - Z_{xy}^2 + 1)\cos\theta + Z_{xx} + Z_{yy}\cos^2\theta|^2}, \qquad (10)$$

где знаки $\pm$ в числителе соответствуют случаям, когда электрический вектор падающей волны лежит в плоскости падения (p—поляризация, —) или перпендикулярен к ней (s — поляризация, $+$).

3. Используя формулы предыдущего пункта, получим явные выражения для компонент тензора поверхностного импеданса одноосных кристаллов при наличии слабой пространственной дисперсии $\left(\frac{\varkappa v}{\omega} \ll 1\right)$ в нескольких частных случаях.

а. Ось кристалла перпендикулярна к поверхности раздела ($\alpha = \beta = 0$).

Пренебрегая членами порядка

$$\beta^2 = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \cdot \frac{T}{mc^2} \ll 1 \qquad (11)$$

по сравнинию с единицей, получим

$$Z_{xx} = \frac{1}{\alpha\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}\beta\mu_\parallel + \sqrt{\frac{\varepsilon_\parallel - \sin^2\theta}{\varepsilon_\perp - 3\mu_\perp^2\beta^2\sin^2\theta}}\right)\left(\sqrt{\gamma+\alpha} - \sqrt{\gamma-\alpha}\right) +$$

$$+ 2\beta\frac{\omega}{\omega_0}\sqrt{\frac{2}{\pi\mu_\parallel}}\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\sin^2\theta \cdot I + \beta^2\mu_\perp\mu_\parallel^2\right), \qquad (12)$$

$$Z_{yy} = (\varepsilon_\perp - \sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}} + 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mu_\perp\mu_\parallel^{3/2}\frac{\omega}{\omega_0}\beta^3, \qquad (13)$$

где

$$\alpha = [\gamma^2 - 12\beta^2\mu_\parallel^2(\varepsilon_\parallel - \sin^2\theta)(\varepsilon_\perp - 3\mu_\perp^2\beta^2\sin^2\theta)]^{\frac{1}{2}},$$

$$\gamma = \varepsilon_\parallel + 3\beta^2\mu_\parallel(\varepsilon_\perp\mu_\parallel - 2\mu_\perp\sin^2\theta), \qquad 14)$$

$$_{\perp,\,\parallel} = \varepsilon^0_{\perp,\,\parallel} - \mu_{\perp,\,\parallel}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}.$$

В формулах (12, 13) первые слагаемые возникают благодаря полюсам подынтегральных выражений в (6, 8), а вторые слагаемые дают точки ветвления диэлектрической проницаемости. Величина I, входящая в член, отражающий вклад точки ветвления в (12), с точностью до членов $\sim \beta^2$ можно считать не зависящей от угла падения θ:

$$I \approx \int_0^\infty \frac{x^3 e^{-x}\, dx}{4\pi x^5 e^{-2x} + \left(\frac{3}{2} - \frac{\omega^2 \varepsilon_\perp}{\omega_0^2 \mu_\parallel} x\right)^2}. \tag{15}$$

Приближенное вычисление I при $\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \frac{\varepsilon_\parallel^0}{\mu_\parallel} = 1;\ 0{,}5;\ 0{,}2;\ 0{,}1$ соответственно дает [10] $I = 1{,}16;\ 0{,}38;\ 0{,}27$ и $0{,}24$.

В случае нормального падения $\theta = 0$

$$Z_{xx}^H = Z_{yy}^H = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_\perp}} + \frac{\mu_\perp \mu_\parallel^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \cdot \frac{v^3}{c^3}, \tag{16}$$

где второй член дают точки ветвления.

В изотропном случае из (12—14) получим

$$Z_{xx}^{\text{из}} = \frac{1}{\varepsilon}\left[(\varepsilon - \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{3}\,\tilde{\beta} \sin^2\theta\, (\varepsilon - 3\tilde{\beta}^2 \sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}\right] +$$

$$+ 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\tilde{\beta}\, \frac{\omega}{\tilde{\omega}_0}\left(\frac{\omega^2}{\tilde{\omega}_0^2} \sin^2\theta \cdot \tilde{I} + \tilde{\beta}^2\right), \tag{17}$$

$$Z_{yy}^{\text{из}} = (\varepsilon - \sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}} + 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\omega}{\tilde{\omega}_0}\, \tilde{\beta}^3. \tag{18}$$

Здесь $\varepsilon = \varepsilon_0 - \frac{\tilde{\omega}_0^2}{\omega^2}$, знак $\sim$ означает, что в соответствующих величинах масса свободного электрона заменяется эффективной массой. Если положить ε_0 и μ равными единице, то (17) и (18) переходят в соответствующие выражения, полученные в [4] для изотропной плазмы.

В отсутствие пространственной дисперсии для анизотропного кристалла

$$Z_{xx} = \left(\frac{\varepsilon_\parallel - \sin^2\theta}{\varepsilon_\perp \varepsilon_\parallel}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad Z_{yy} = (\varepsilon_\perp - \sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}. \tag{19}$$

Сравнение формул (12—19) показывает, что как анизотропия, так и пространственная дисперсия заметно изменяют частотную и угловую зависимость Z_{xx} и Z_{yy}. Например, в отсутствие пространственной дисперсии Z_{xx} анизотропного кристалла обращается в бесконечность (это соответствует полному отражению волны) при двух частотах: $\omega_1 = \sqrt{\frac{\mu_\perp}{\varepsilon_\perp^0}}\,\omega_0$; $\omega_2 = \sqrt{\frac{\mu_\parallel}{\varepsilon_\parallel^0}}\,\omega_0$, а в случае изотропного кристалла —

лишь на частоте $\omega = \frac{\tilde{\omega}_0}{\sqrt{\varepsilon_0}}$. Слагаемые в $Z_{\alpha\alpha}$, отражающие вклад точки ветвления, целиком обусловлены пространственной дисперсией. В членах, связанных с наличием полюса, учет пространственной дисперсии при условии (11) существен лишь для Z_{xx}. Заметим, что указанный член резко различается в изотропном и анизотропном случаях. Причина заключается в том, что в анизотропном кристалле преломленная волна не расщепляется на продольную и поперечную волны, как это имеет место в изотропном случае.

б. Ось кристалла параллельна поверхности раздела $\left(\beta = \frac{\pi}{2}\right)$ и лежит в плоскости падения ($\alpha = 0$). В этом случае Z_{xx} отличается от (12) тем, что $\mu_\perp$ заменяется на $\mu_\parallel$ и наоборот во всех членах, кроме последнего, в котором коэффициент при β^2 заменяется на $\mu_\perp^3$. Полюсный вклад в Z_{yy} не отличается от соответствующего члена в случае *а*, а вклад точки ветвления равняется

$$\delta Z_{yy} = \frac{\mu_\perp^{5/2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega_2} \cdot \frac{v^3}{c^3}.$$

в. Ось кристалла параллельна поверхности раздела и $\perp$ плоскости падения $\left(\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}\right)$. Используя формулы (3—9), получим

$$Z_{xx} = \frac{1}{\varepsilon_\perp}\left[\mu_\perp \beta \sqrt{3} \sin^2\theta \left(\varepsilon_\perp - 3\mu_\perp^2 \beta^2 \sin^2\theta\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\varepsilon_\perp - \sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}\right] + \\ +2\sqrt{\frac{2}{\pi\mu_\perp}}\,\beta\,\frac{\omega}{\omega_0}\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\sin^2\theta \cdot I_1 + \beta^2\mu_\perp^3\right), \quad (20)$$

$$Z_{yy} = \left(\varepsilon_\parallel - \sin^2\theta\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{\mu_\parallel \mu_\perp^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{v^3}{c^3}. \quad (21)$$

В (20) I_1 отличается от (15) лишь тем, что отношение $\frac{\varepsilon_\parallel}{\mu_\parallel}$ заменяется на $\frac{\varepsilon_\parallel}{\mu_\perp}$.

Этот случай отличается от случаев а, б тем, что при падении волны с *p*-поляризацией преломленная волна расщепляется, как и в изотропном случае, на продольную и поперечную волны, при этом первый и третий слагаемые в (20) отражают вклад продольной волны и исчезают в отсутствие пространственной дисперсии.

Во всех трех рассмотренных частных случаях недиагональные компоненты $Z_{xy} = Z_{yx} = 0$. При этом коэффициент отражения, согласно (10), определяется хорошо известными формулами

$$R_s = \left| \frac{1 - Z_{yy} \cos\theta}{1 + Z_{yy} \cos\theta} \right|^2, \quad R_p = \left| \frac{Z_{xx} - \cos\theta}{Z_{xx} + \cos\theta} \right|^2,$$

где Z_{xx} и Z_{yy} даются (12—21).

В заключение отметим, что полученные здесь формулы для поверхностного импеданса могут быть полезны при определении оптических параметров анизотропных кристаллов, в частности, для полупроводников типа Te в области слабой пространственной дисперсии.

Институт радиофизики и электроники
АН АрмССР

Поступила 29.IV.1969

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. П. Силин, А. А. Рухадзе*, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Госатомиздат, М., 1961.
2. *В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург*, Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов „Наука". М., 1965.
3. *С. И. Пекар*, ЖЭТФ, 33, 1022 (1957).
4. *В. П. Силин, Е. П. Фетисов*, ЖЭТФ, 41, 159 (1961).
5. *Р. В. Парфеньев, И. И. Фарбштейн, С. С. Шалыт*, ФТТ, 2, 2923 (1960).
6. *Д. М. Чижиков, В. П. Счастливый*, Теллур и Теллуриды. Изд. „Наука", М., 1966.
7. *G. E. Reuter, E. H. Sondheimer*, Proc. Roy. Soc., A195, 336 (1948).
8. *Э. А. Канер, В. М. Яковленко*, ЖЭТФ, 42, 471 (1962).
9. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Электродинамика сплошных сред, § 76. М., 1959.
10. *В. И. Крылов*, Приближенное вычисление интегралов, М., Физматгиз, 1959.

ԷԼԵԿՏՐՈՆԱՅԻՆ ՊԼԱԶՄԱՅՈՎ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ԲՅՈՒՐԵՂՆԵՐԻ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԱՅԻՆ ԻՄՊԵԴԱՆՍԸ

Ռ. Հ. ԹԱՐԽԱՆՅԱՆ

Ստացված են բանաձևեր էլեկտրոնային պլազմա ունեցող անիզոտրոպ բյուրեղների մակերևութային իմպեդանսի համար թույլ տարածական դիսպերսիայի դեպքում։ Ուսումնասիրված է բյուրեղի մակերևույթից էլեկտրոնների հայելային անդրադարձման դեպքը։ Ցույց է տրված, որ թե անիզոտրոպիան և թե տարածական դիսպերսիան նկատելի կերպով փոփոխում են դիտարկվող սիստեմների օպտիկական բնութագրերի անկյունային և հաճախային կախումները։ Տարածական դիսպերսիայի հաշվառումը առանձնապես կարևոր է թեք ընկնող ալիքի p-բևեռացման դեպքում, որը կապված է նոր ալիքների երևան գալու հետ։

THE SURFACE IMPEDANCE OF ANISOTROPIC CRYSTALS WITH ELECTRONIC PLASMA

R. H. TARKHANIAN

The formulas for the surface impedance of anisotropic cristals with electronic plasma in absence and presence of weak space dispertion are obtained.

The case of the mirror reflection of electrons on the surface of a crystal is considered. It is shown that the crystalline anisotropy as well as the space dispersion notablly change the angular and frequency dependence of the optical characteristics of the systems under consideration.