

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ГЕНЕРАЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ДВИЖУЩИМСЯ ЗАРЯДОМ В ПЛАСТИНЕ И В СТОПКЕ ПЛАСТИН МЕТОДОМ ПОСТРОЕНИЯ ИЗ ИЗВЕСТНЫХ И БОЛЕЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПОЛЕЙ

В. А. АРАКЕЛЯН, Г. М. ГАРИБЯН

Полученные ранее формулы для излучения, образованного зарядом в пластине и в стопке пластин, приведены к новому виду. Показано, что эти формулы имеют ясный физический смысл, так как они могут быть построены из более элементарных выражений. А именно, в случае пластинки они могут быть построены из решений задачи для одной границы раздела сред с учетом законов распространения излучения в пластинке. В случае же стопки пластин достаточно звать решение задачи для одной пластинки и учесть законы распространения излучения в сложной среде.

Формулы для полей излучения, образованного зарядом в пластине [1], [2] и в стопке пластин [3], [4], хорошо известны. Однако до сих пор не был ясен как физический смысл отдельных членов, входящих в эти формулы, так и сама их структура.

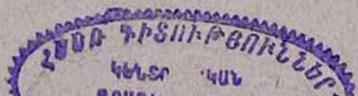
В настоящей работе мы покажем, что если известны формулы для образования переходного излучения в простейшем случае, а именно, на одной границе раздела сред, то можно без всяких приближений построить выражения для полей излучения в случае пластинки и стопки пластин, исходя из наглядных физических соображений. При этом необходимо воспользоваться также формулами для отражения и преломления электромагнитного излучения при прохождении через одну границу раздела сред и пластинку, а также через стопку пластин и ее часть.

Предлагаемый метод построения решений помимо физической наглядности и простоты обладает тем достоинством, что исходными формулами для него являются формулы для одной границы раздела сред. Тогда очевидно, что все те более сложные случаи образования переходного излучения на одной границе раздела сред, такие как, например, образование переходного излучения при произвольном движении заряда [5], при учете многократного рассеяния [6] и т. п., в принципе могут быть рассмотрены в рамках предлагаемого метода как для пластины, так и для стопки пластин.

1. Рассмотрение начнем со случая одной пластинки. Для этого нам надо знать формулы для переходного излучения в случае одной границы раздела сред.

Тангенциальные фурье-компоненты полей переходного излучения при перпендикулярном влете заряда из вакуума в среду равны [7]

DA-11.991



$$E_t'(\vec{k}; \varepsilon \rightarrow c) = \frac{e i x}{2\pi^2 g} \alpha \exp(i\varphi_0' z_0), \quad (1)$$

$$E_t(\vec{k}; \varepsilon \rightarrow c) = \frac{e i x}{2\pi^2 g} \delta \exp(i\varphi_0' z_0), \quad (2)$$

где двумя штрихами обозначены поля, движущиеся назад, а одним штрихом — вперед относительно направления движения частицы, а плоскость  $z = z_0$  есть граница раздела вакуума и среды.

Если частица влетает из среды в вакуум, то для тех же полей имеем выражения:

$$E_t'(\vec{k}; c \rightarrow \varepsilon) = \frac{e i x}{2\pi^2 g} \gamma \exp(i\varphi_0'' z_0), \quad (3)$$

$$E_t(\vec{k}; c \rightarrow \varepsilon) = \frac{e i x}{2\pi^2 g} \beta \exp(i\varphi_0'' z_0). \quad (4)$$

В формулах (1—4) были использованы обозначения:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \end{array} \right\} = \frac{\frac{\varepsilon}{\lambda} \mp \frac{v}{\omega}}{\Lambda_0} + \frac{-\frac{1}{\lambda} \pm \frac{v}{\omega}}{\Lambda};$$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma \\ \delta \end{array} \right\} = \frac{-\frac{1}{\lambda_0} \pm \frac{v}{\omega}}{\Lambda_0} + \frac{\frac{1}{\lambda_0 \varepsilon} \mp \frac{v}{\omega}}{\Lambda};$$
(5)

$$\Lambda_0 = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}; \quad \Lambda = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu; \quad \lambda_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - x^2;$$

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu - x^2; \quad g = \frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_0};$$

$$\varphi_0' = \frac{\omega}{v} - \lambda_0; \quad \varphi_0'' = \frac{\omega}{v} + \lambda_0; \quad \varphi' = \frac{\omega}{v} - \lambda; \quad \varphi'' = \frac{\omega}{v} + \lambda.$$

2. Получим теперь некоторые нужные нам формулы, касающиеся отражения и преломления тангенциальной фурье-компоненты электри-

ческого поля излучения, взятой в виде  $\vec{x} \cdot E_t(\vec{k}) e^{i(\vec{x} \cdot \vec{r} \pm \lambda x - \omega t)}$  на плоской

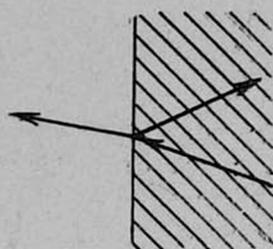
границе раздела сред. Пусть имеем два полупространства, разделенных либо плоскостью  $z = 0$ , либо  $z = a$ , причем одно заполнено веществом, а другое пустое. Будем интересоваться тем случаем, когда излучение падает из среды на границу ее раздела с вакуумом и найдем коэффициенты отражения и прохождения тангенциальной составляющей электрического поля этого излучения на границе. Если излучение падает справа на плоскость  $z = 0$  (рис. 1), то коэффициент отражения равен

$$r = \frac{g_1}{g}, \quad (6)$$

а коэффициент прохождения

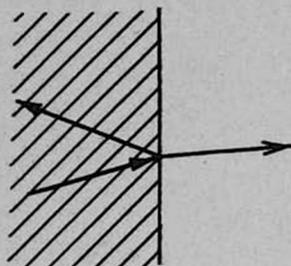
$$\eta = \frac{g_2}{g}, \quad (7)$$

где  $g_1 = \frac{\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}$ ;  $g_2 = \frac{2\varepsilon}{\lambda}$ . Если же излучение падает слева на гра-



$z=0$

Рис. 1.



$z=a$

Рис. 2.

ницу раздела  $z = a$  (рис. 2), соответствующие коэффициенты будут равны

$$r_a = r e^{2i\lambda a}; \quad \eta_a = \eta e^{i(\lambda - \lambda_0)a}. \quad (8)$$

Наконец, рассмотрим с одной стороны падение излучения из вакуума на плоскость  $z = 0$ , причем пусть правое полупространство ( $z > 0$ ) заполнено веществом, а с другой стороны падение этого же излучения на пластину того же вещества с толщиной  $a$ , левая грань которой есть плоскость  $z = 0$ . Сравним в этих задачах амплитуду волны, прошедшей в пластину и движущейся в направлении первоначального движения излучения, с амплитудой волны, прошедшей в правое полупространство. Нетрудно видеть, что их отношение равно

$$R' = \frac{1}{1 - r^2 e^{2i\lambda a}}. \quad (9)$$

Очевидно, что этот коэффициент учитывает возможность многократных отражений излучения внутри пластинки по сравнению с излучением в правом полупространстве.

3. Приведем теперь выражения для тангенциальных фурье-компонент полей переходного излучения в пространствах до пластины  $E_{0,t}^{\vec{k}}(k; 1)$  и после нее  $E_{1,t}^{\vec{k}}(k; 1)$ , но в виде несколько отличном от того, как они до сих пор встречались в литературе [1], [2]:

$$E_{0,t}^{\vec{k}}(k; 1) = \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{2\pi^2 g} P'' \exp(i\varphi_0 z_0), \quad (10)$$

$$E_{1,t}^{\vec{k}}(k; 1) = \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{2\pi^2 g} P' \exp(i\varphi_0 z_0), \quad (11)$$

причем  $z = z_0$  есть координата левого края пластинки, а

$$P' = \beta e^{i\varphi_0 a} + \delta \eta_a R' + \gamma e^{i\varphi^* a} r \eta_a R', \quad (12)$$

$$P'' = a + \delta r_a \eta R' + \gamma e^{i\varphi^* a} \eta R'. \quad (13)$$

Нетрудно убедиться, что формулы (10) и (11) совпадают с обычными выражениями, так как

$$\frac{P'}{g} = -\frac{D}{F} e^{i\varphi^* a}; \quad \frac{P''}{g} = \frac{A}{F}. \quad (13')$$

Мы использовали в последних соотношениях обозначения работы [4].

4. Пользуясь формулами предыдущих разделов нетрудно написать выражения для тангенциальной составляющей фурье-компоненты поля переходного излучения в случае пластинки.

Как видно из рис. 3, переходное излучение, испущенное вперед, будет состоять из волн трех типов. Волна 1' образуется на границе среда-вакуум и будет описываться формулой (4) с  $z_0 = a$ . Волна 2' образуется на границе вакуум-среда и будет описываться формулой (2)  $z_0 = 0$ . Но это выражение надо умножить как на коэффициент  $R'$ , учитывающий влияние на эту волну правой границы пластинки, так и на

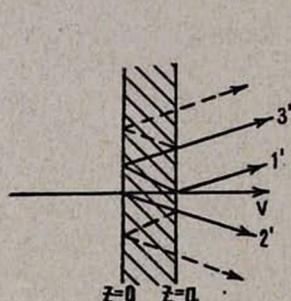


Рис. 3.

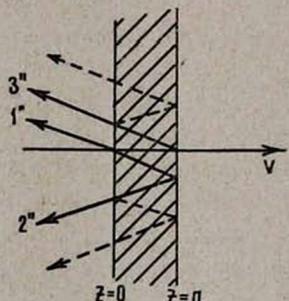


Рис. 4.

$\eta_a$  — коэффициент прохождения этой волны из вещества в вакуум. Наконец, волна 3' определяется формулой (3) с  $z_0 = a$  и при этом помимо коэффициента  $R'$ , учитывающего левую грань пластинки, надо принять во внимание как отражение от левой границы пластинки ( $r$ ), так и прохождение через правую границу ( $\eta_a$ ). В результате мы приходим к формуле (11).

К вышесказанному сделаем следующее общее замечание. Мы пользовались для описания всех трех типов образовавшихся волн формулами (1—4), в которых, в отличие от пластинки, среда занимает все полупространство. Иначе говоря, кажется что мы здесь не учитываем влияние на процесс образования переходного излучения конечной толщины пластинки. Однако можно показать, что влияние конечной толщины пластинки на каждую из волн сказывается через посредство ос-

тальных волн и если мы учитываем все волны, то мы учитываем и конечную толщину пластины.

С помощью рис. 4 и рассуждений, аналогичных вышеприведенным, мы приходим к формуле (10) для излучения, испущенного назад.

5. Наша дальнейшая задача состоит в том, чтобы исходя из аналогичных простых соображений получить формулы для излучения заряда в слоистой среде. Однако для этого нам надо иметь в своем распоряжении некоторые сведения о свойствах излучения в слоистой среде.

Поэтому представим себе, что на столку (рис. 5), состоящую из  $N$  пластин с толщиной  $a$  и расстоянием  $b$  между ними, слева падает

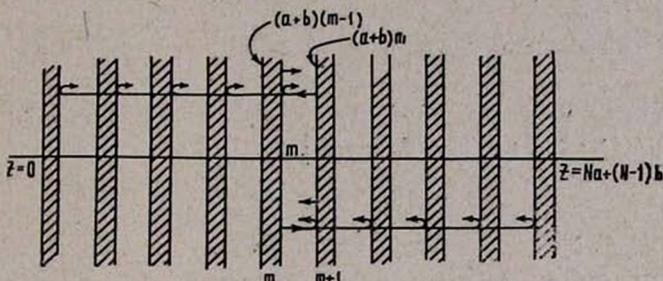


Рис. 5.

заданная волна  $\vec{E}_0(N) e^{i(\vec{x} \cdot \vec{p} + \lambda_0 z - \omega t)}$  (хотя  $E_0(N)$  не зависит от  $N$ , мы пишем  $N$ , исходя из формальных удобств). Очевидно, что до столки

( $z < 0$ ) мы будем иметь еще и отраженную волну  $\vec{E}_0(N) e^{i(\vec{x} \cdot \vec{p} - \lambda_0 z - \omega t)}$ . За столкой ( $z > Na + (N-1)b$ ) будет только прошедшая волна

$E'_N(N) e^{i(\vec{x} \cdot \vec{p} + \lambda_0 z - \omega t)}$ . Поле в  $m$ -ом отсеке будем обозначать через  $E'_m(N) e^{i(\vec{x} \cdot \vec{p} + \lambda_0 z - \omega t)}$  и  $E''_m(N) e^{i(\vec{x} \cdot \vec{p} - \lambda_0 z - \omega t)}$ . Мы не пишем в аргументах

этих полей зависимости от  $\vec{k}$ , чтобы отличать их от полей частицы, которые будут рассматриваться в следующем разделе. [Разложим все амплитуды полей на тангенциальную и нормальную компоненты, которые будем отмечать индексами  $t$  и  $n$  и будем считать, что  $E_t$  направлена по  $x$ . Условия поперечности дают связь между этими компонентами. Введем вместо полей новые величины

$$E'_m = E'_{m,t}(N) e^{i\lambda_0 [ma + (m-1)b]},$$

$$E''_m = E''_{m,t}(N) e^{-i\lambda_0 [ma + (m-1)b]}.$$

Тогда из условий сшивки электрических полей и их индукций на границах  $(m+1)$ -ой пластинки можно получить следующую связь между полями в  $(m+1)$ -ом и  $m$ -ом отсеках:

$$E'_{m+1} = N_1 E'_m + M_1 E''_m, \quad (14)$$

$$E''_{m+1} = N_2 E'_m + M_2 E''_m, \quad (15)$$

где (см. [4])

$$\begin{aligned}
 M_1 &= -\frac{\lambda\lambda_0}{4\varepsilon} e^{\lambda_0 b} G; & M_2 &= \frac{\lambda\lambda_0}{4\varepsilon} e^{\lambda_0 b} H; \\
 N_1 &= \frac{\lambda\lambda_0}{4\varepsilon} e^{-\lambda_0 b} F; & N_2 &= \frac{\lambda\lambda_0}{4\varepsilon} e^{-\lambda_0 b} G; \\
 F &= \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_0}\right)^2 e^{-\lambda a} - \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)^2 e^{\lambda a}; & (15') \\
 H &= \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_0}\right)^2 e^{\lambda a} - \left(\frac{\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)^2 e^{-\lambda a}; \\
 G &= \left(\frac{\varepsilon^2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_0^2}\right) \left(e^{\lambda a} - e^{-\lambda a}\right).
 \end{aligned}$$

Поля же в трех соседних отсеках, как можно показать из уравнений (14) и (15), связаны соотношениями [8]

$$E'_{m+1} = 2\zeta E'_m - E'_{m-1}, \quad (16)$$

$$E'_{m+1} = 2\zeta E'_m - E'_{m-1}, \quad (17)$$

где  $2\zeta = N_1 + M_2$ .

Для нахождения  $E'_{m,t}(N)$  заметим, что  $E'_N = 0$ , откуда, полагая  $m = N - 1$  в (14) и (15), получаем

$$E'_{N-1} = N_1 E'_N. \quad (18)$$

Пользуясь (18) и полагая в (17)  $m = N - 1, N - 2, \dots$ , приходим к соотношению

$$E'_m = Q_{N-m} E'_N, \quad (19)$$

где  $Q_m = N_1 U_{m-1} - U_{m-2}$ , а  $U_m(\zeta)$  — полиномы Чебышева 2-го рода [9]. Взяв  $m = 0$ , получим выражение для  $E'_N$  через заданное  $E'_0(N)$ , подставив которое снова в последнее уравнение, окончательно будем иметь

$$E'_{m,t}(N) = \frac{Q_{N-m}}{Q_N} e^{-im(a^2+b)\lambda} E'_{0,t}(N). \quad (20)$$

Для нахождения  $E'_m(N)$  положим в (14)  $m = 0$ :

$$E'_1 = N_1 E'_0 + M_1 E'_0. \quad (21)$$

Воспользовавшись последней формулой и полагая в (16)  $m = 1, 2, \dots$ , приходим к уравнению

$$E'_m = Q_m E'_0 + M_1 U_{m-1} E'_0, \quad (22)$$

Взяв в полученной формуле  $m = N$  и учитывая, что  $E'_N = 0$ , найдем связь между  $E'_0$  и  $E'_0$ , подставив которую в (22) окончательно получим

$$E'_{m,t}(N) = \frac{N_2 U_{N-m-1}}{Q_N} e^{i(a+b)m\lambda} E'_{0,t}(N). \quad (23)$$

Формулы (20) и (23) определяют поля излучения в произвольном отсеке через амплитуду падающего поля.

Получим теперь некоторые следствия из этих формул.

а) Рассмотрим  $k$ -ый и  $m$ -ый отсеки стопки, причем  $m > k$ . С помощью формулы (20) нетрудно получить

$$E'_{m,t}(N) = \frac{Q_{N-m}}{Q_{N-k}} e^{-l(a+b)(m-k)\lambda_0} E'_{k,t}(N).$$

Из этой формулы видно, что величина

$$\eta_{k < m}^{k,m} = \frac{Q_{N-m}}{Q_{N-k}} e^{-l(a+b)(m-k)\lambda_0} \quad (24)$$

является коэффициентом прохождения тангенциальной составляющей электрического поля из  $k$ -го отсека в  $m$ -ый отсек стопки, состоящей из  $N$  пластин. Коэффициент прохождения не изменяется при параллельном переносе всей стопки вдоль оси  $z$ .

б) Рассмотрим отражение волны, имеющейся в  $k$ -ом отсеке стопки, состоящей из  $N$ -пластин, от  $(N-k)$  оставшихся пластин. Из (20) и (23) имеем

$$r'_k = \frac{E'_{k,t}(N)}{E'_{k,t}(N)} = \frac{N_2 U_{N-k-1}}{Q_{N-k}} e^{2i\lambda_0(a+b)k}. \quad (25)$$

в) Найдем связь между полем за стопкой в случае стопки, состоящей из  $m$  пластин, и полем в  $m$ -ом отсеке стопки, состоящей из  $N$  пластин. С помощью (20), принимая во внимание, что  $E'_{0,t}(m) = E'_{0,t}(N)$ , нетрудно получить

$$E'_{m,t}(N) = P_{N,m} E'_{m,t}(m),$$

где

$$P_{N,m} = \frac{Q_m Q_{N-m}}{Q_N}. \quad (26)$$

В том случае, если заданная внешняя волна  $E_N^r(N) e^{i(\vec{x} \cdot \vec{p} - \lambda_0 z - \omega t)}$  падает на стопку справа, то производя выкладки, аналогичные вышеприведенным, мы вместо формул (20) и (23) будем иметь

$$E'_{m,t}(N) = \frac{N_2 U_{m-1}}{Q_N} e^{-l[(N+m)a + (N+m-2)b]\lambda_0} E'_{N,t}(N), \quad (27)$$

$$E_{m,t}^r(N) = \frac{Q_m}{Q_N} e^{-l(N-m)(a+b)\lambda_0} E_{N,t}^r(N). \quad (28)$$

Из этих формул в качестве следствий получим:

а)

$$\eta_{k > m}^{k,m} = \frac{E'_{m,t}(N)}{E'_{k,t}(N)} = \frac{Q_m}{Q_k} e^{-l(k-m)(a+b)\lambda_0}, \quad (29)$$

б)

$$r_k = \frac{E'_{k,t}(N)}{E_{k,t}(N)} = \frac{N_2 U_{k-1}}{Q_k} e^{-2i[ka + (k-1)b]\lambda_0}; \quad (30)$$

в)

$$P_{N,m} = \frac{E'_{N-m,t}(N)}{E_{0,t}(m)} = \frac{Q_{N-m} Q_m}{Q_N}. \quad (31)$$

6. В этом разделе мы, исходя из формул, полученных выше, построим выражения для полей излучения в любом отсеке стопки.

Сделаем это сначала для поля  $E'_{N,t}(N)$ . Для этого найдем излучение, движущееся в  $m$ -ом отсеке вдоль положительного направления оси  $z$ , которое образовалось в этом же отсеке. Очевидно, что это будет, во-первых, движущееся вперед излучение, образовавшееся в  $m$ -ой пластине, и, во-вторых, излучение, образовавшееся в  $(m+1)$  пластине в направлении назад, которое отразившись от  $m$  первых пластин превратилось в излучение, движущееся вперед (см. рис. 5, верхняя часть).

Для первой части излучения, согласно (11), имеем

$$\frac{e^{ix}}{2\pi^2 g} P' e^{i\varphi_0'(a+b)(m-1)} P_{N,m}. \quad (32)$$

Мы умножили тангенциальную составляющую электрического вектора поля переходного излучения, образованного в  $m$ -ой пластинке, на  $P_{N,m}$  (см. формулу (26)), так как по своему определению эта величина учитывает влияние всех пластин стопки на излучение, образовавшееся в  $m$ -ом отсеке. Умножив (32) на коэффициент прохождения излучения из  $m$ -го отсека в пространство за стопкой  $\eta_{m < N}^{m,N}$  (см. формулу (24)), мы получим вклад этой части в излучение за стопкой пластин.

Для второй части имеем согласно (10)

$$\frac{e^{ix}}{2\pi^2 g} P' e^{i\varphi_0''(a+b)m} P_{N,m}. \quad (33)$$

Это излучение превратится в движущееся вперед после отражения от  $m$  первых пластин, т. е. мы должны умножить (33) на  $r_m'$ , определяемое формулой (30). Если полученное таким образом выражение умножить еще на коэффициенты  $\eta_{m < N}^{m,N}$ , то мы получим вклад в излучение за стопкой пластин и от этой части излучения.

Для получения полного излучения за стопкой необходимо эти вклады просуммировать по всем возможным отсекам и в результате мы будем иметь

$$E'_{N,t}(\vec{k}; N) = \frac{e^{ix}}{2\pi^2 g} \left[ P' \sum_{m=1}^N e^{i\varphi_0'(a+b)(m-1)} P_{N,m} \eta_{m < N}^{m,N} + \right.$$

$$+ P'' \sum_{m=1}^{N-1} e^{i\varphi_0''(a+b)m} P_{N, m} r_m'' \gamma_{m < N}^m \Big]. \quad (34)$$

В следующем разделе мы покажем, что построенное таким образом решение совпадает с решением, полученным в [4], после соответствующих преобразований.

С помощью совершенно аналогичных рассуждений (см. рис. 5, нижняя часть) для излучения до стопки нетрудно получить выражение

$$E_{0, t}^{\prime}(\vec{k}; N) = \frac{e i x}{2\pi^2 g} \left[ P'' \sum_{m=0}^{N-1} e^{i\varphi_0''(a+b)m} P_{N, m} \gamma_{m > 0}^m + \right. \\ \left. + P' \sum_{m=1}^{N-1} e^{i\varphi_0'(a+b)(m-1)} P_{N, m} r_m' \gamma_{m > 0}^m \right]. \quad (35)$$

Наконец, для построения поля внутри стопки в каком-либо отсеке  $m$  необходимо найти вклад в это поле от отсеков, расположенных справа и слева от отсека  $m$ . В результате получим

$$E_{m, t}^{\prime}(\vec{k}; N) = \frac{e i x}{2\pi^2 g} \left\{ P'' \left[ \sum_{k=1}^{m-1} P_{N, k} r_k'' \gamma_{k < m}^k e^{i\varphi_0''(a+b)k} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{k=m}^{N-1} P_{N, k} \gamma_{k > m}^k r_k'' e^{i\varphi_0''(a+b)k} \right] + P' \left[ \sum_{k=1}^m P_{N, k} \gamma_{k < m}^k e^{i\varphi_0'(a+b)(k-1)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{k=m+1}^{N-1} P_{N, k} r_k' \gamma_{k > m}^k r_k' e^{i\varphi_0'(a+b)(k-1)} \right] \right\}, \quad (36)$$

$$E_{m, t}^{\prime}(\vec{k}; N) = \frac{e i x}{2\pi^2 g} \left\{ P'' \left[ \sum_{k=1}^{m-1} P_{N, k} r_k'' \gamma_{k < m}^k e^{i\varphi_0''(a+b)k} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{k=m}^{N-1} P_{N, k} \gamma_{k > m}^k e^{i\varphi_0''(a+b)k} \right] + P' \left[ \sum_{k=1}^m P_{N, k} \gamma_{k < m}^k r_k' e^{i\varphi_0'(a+b)(k-1)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{k=m+1}^{N-1} P_{N, k} r_k' \gamma_{k > m}^k e^{i\varphi_0'(a+b)(k-1)} \right] \right\}. \quad (37)$$

Нетрудно убедиться, что формула (36) при  $m = N$  переходит в формулу (34), а формула (37) при  $m = 0$  — в формулу (35).

7. В этом разделе мы покажем, что если произвести некоторые преобразования над формулами (21) и (15) работы [4], то в результате мы придем к формулам предыдущего раздела.

В формулу (21) работы [4] подставим явные выражения величин  $a'$  и  $a''$  (формула (6) той же работы). Исключим из полученного выражения величины  $B$  и  $C$  с помощью следующих связей:

$$B = -\frac{A}{N_1} e^{-i\lambda_0 b - l \frac{\omega}{v} a} - D \frac{N_2}{N_1}$$

$$C = -A \frac{N_2}{N_1} - \frac{D}{N_1} e^{-i\lambda_0 b + i \frac{\omega}{v} a}$$

и перейдем от  $A$  и  $D$  к  $P'$  и  $P''$  с помощью формул (13'). В результате получим:

$$E'_{m,t}(\vec{k}; N) = \frac{e^{ix}}{2\pi^2 g} \cdot \frac{e^{-i\varphi - iLm\lambda_0}}{Q_N T} \{P'' N_2 e^{i\lambda_0 b} [Q_{N-m} - Q_N e^{im\varphi} - U_{m-1} (e^{-i\varphi} - N_1)] + P' e^{i\lambda_0 a} [(Q_{N-m} - Q_N e^{i\varphi m})(N_1 e^{-i\varphi} - 1) - M_1 N_2 U_{m-1} e^{i(N-1)\varphi}]\}. \quad (38)$$

Так как

$$-M_1 N_2 U_{m-1} = N_1 Q_m - Q_{m+1},$$

$$Q_N = Q_m Q_{N-m} + M_1 N_2 U_{m-1} U_{N-m-1} = U_{m-1} Q_{N-m+1} - U_{m-2} Q_{N-m},$$

то формуле (38) можно придать вид

$$E'_{m,t}(\vec{k}; N) = \frac{e^{ix}}{2\pi^2 g} \cdot \frac{e^{-iLm\lambda_0}}{Q_N T} \{P'' N_2 e^{i\lambda_0 b} [Q_{N-m} (e^{-i\varphi} - U_{m-1} e^{i(m-2)\varphi} + U_{m-2} e^{i(m-1)\varphi}) + U_{m-1} (Q_{N-m} e^{i(m-2)\varphi} - Q_{N-m+1} e^{i(m-1)\varphi} + e^{i(N-2)\varphi} (e^{i\varphi} N_1 - 1))] + P' e^{i\lambda_0 a} [Q_{N-m} (e^{i(m-1)\varphi} Q_m - e^{i(m-2)\varphi} Q_{m+1} + N_1 e^{-2i\varphi} - e^{-i\varphi}) - M_1 N_2 U_{m-1} (e^{i(m-2)\varphi} U_{N-m-2} - e^{i(m-1)\varphi} U_{N-m-1} + e^{i(N-2)\varphi})]\}.$$

Если теперь принять во внимание, что

$$e^{-i\varphi} - e^{i(m-2)\varphi} U_{m-1} + e^{i(m-1)\varphi} U_{m-2} = T \sum_{k=1}^{m-1} U_{k-1} e^{ik\varphi},$$

$$e^{i(m-2)\varphi} Q_{N-m} - e^{i(m-1)\varphi} Q_{N-m+1} + e^{i(N-2)\varphi} (e^{i\varphi} N_1 - 1) = T \sum_{k=m}^{N-1} Q_{N-k} e^{ik\varphi},$$

$$e^{i(m-1)\varphi} Q_m - e^{i(m-2)\varphi} Q_{m+1} + N_1 e^{-2i\varphi} - e^{-i\varphi} = T \sum_{k=1}^m Q_k e^{i(k-1)\varphi},$$

$$e^{i(m-2)\varphi} U_{N-m-2} - e^{i(m-1)\varphi} U_{N-m-1} + e^{i(N-2)\varphi} = T \sum_{k=m+1}^{N-1} U_{N-k-1} e^{i(k-1)\varphi},$$

то окончательно имеем

$$E'_{m,t}(\vec{k}; N) = \frac{e^{ix}}{2\pi^2 g} \cdot \frac{e^{-iLm\lambda_0}}{Q_N} \left\{ P'' N_2 e^{i\lambda_0 b} \left[ Q_{N-m} \sum_{k=1}^{m-1} U_{k-1} e^{ik\varphi} + U_{m-1} \sum_{k=m}^{N-1} Q_{N-k} e^{ik\varphi} \right] + P' e^{i\lambda_0 a} \left[ Q_{N-m} \sum_{k=1}^m Q_k e^{i(k-1)\varphi} - M_1 N_2 U_{m-1} \sum_{k=N+1}^{N-1} U_{m-k-1} e^{i(k-1)\varphi} \right] \right\}. \quad (39)$$

Последняя формула совпадает с (36), в чем легко убедиться, подставив в (36) явные значения коэффициентов

$$r'_k, r''_k, r_{k < m}^{k, m}, r_{k > m}^{k, m} \text{ и } P_{N, k}.$$

Сделав аналогичные преобразования с формулой (15) работы [4], придем к следующему выражению:

$$E_{m, t}^r(k; N) = \frac{e^{ix}}{2\pi^2 g} \cdot \frac{e^{l(a+b)m\lambda_0}}{Q_N} \left\{ P'' \left[ Q_m \sum_{k=m}^{N-1} Q_{N-k} e^{ik\varphi} - \right. \right. \\ \left. \left. - M_1 N_2 U_{N-m-1} \sum_{k=1}^{m-1} U_{k-1} e^{ik\varphi} \right] + P' N_2 e^{l(a+b)\lambda_0} \left[ Q_m \sum_{k=m+1}^{N-1} U_{N-k-1} e^{i(k-1)\varphi} + \right. \right. \\ \left. \left. + U_{N-m-1} \sum_{k=1}^m Q_k e^{i(k-1)\varphi} \right] \right\}. \quad (40)$$

С другой стороны, подставив в формулу (37) явные выражения для входящих туда коэффициентов, получим формулу (40).

Таким образом мы показали, что построенные нами решения (36) и (37) совпадают с решениями задачи, полученными в работе [4].

8. В заключение произведем в формулах (34) и (35) суммирование по  $m$ . В результате получим

$$E_{N, t}^r(k; N) = \frac{e^{ix}}{2\pi^2 g} \frac{e^{l(N-1)\varphi_0(a+b)}}{Q_N T} \left\{ P' [Q_N - \partial_{N+1} e^{-l\varphi} + \right. \\ \left. + e^{-lN\varphi} (N_1 e^{-l\varphi} - 1)] + P'' N_2 e^{l(b-a)\lambda_0} (U_{N-2} - U_{N-1} e^{-l\varphi} + e^{-lN\varphi}) \right\}, \quad (41)$$

$$E_{0, t}^r(k; N) = \frac{e^{ix}}{2\pi^2 g} \frac{[e^{-2l\varphi}]}{Q_N T} \left\{ P'' [Q_N - Q_{N+1} e^{l\varphi} + e^{lN\varphi} (N_1 e^{l\varphi} - 1)] + \right. \\ \left. + P' N_2 e^{l(a+b)\lambda_0} (U_{N-2} - U_{N-1} e^{l\varphi} + e^{lN\varphi}) \right\}. \quad (42)$$

Такие же формулы можно получить, если выразить в формулах (16) и (22) работы [4] величины  $B$  и  $C$  через  $A$  и  $D$ , которые в свою очередь записать через  $P'$  и  $P''$ .

Так как полиномы Чебышева  $U_m(\zeta)$  и функции  $Q_m(\zeta)$  играют в вышеприведенных выражениях важную роль, то приведем некоторые формулы, которые можно вывести, исходя из общего определения [9] полиномов Чебышева. А именно, приведем выражение для этих полиномов в виде конечного ряда:

$$U_m(\zeta) = \sum_{n=0}^{\left[ \frac{m}{2} \right]} (-1)^n \binom{m-n}{n} (2\zeta)^{m-2n}, \quad (43)$$

где  $\left[ \frac{m}{2} \right]$  есть целое меньшее числа  $\frac{m}{2}$ ,  $\binom{m-n}{n}$  есть число всех сочетаний из  $m-n$  элементов по  $n$ . Так как в нашем случае

$$2\zeta = N_1 + M_2 = N_1 \left( 1 + \frac{1}{N_1^2} + \delta_1 \right),$$

где

$$\delta_1 = \frac{M_1 N_2}{N_1^2} = -\frac{G^2}{F^2} e^{2\lambda_0 b}, \quad (44)$$

то выразим  $U_m(\zeta)$  через  $N_1$  и  $\delta_1$ :

$$U_m(\zeta) = N_1^m \sum_{n=0}^m \delta_1^n \sum_{k=0}^{m-n} \frac{\binom{n+k}{n} \binom{m-k}{n}}{N_1^{2k}}. \quad (45)$$

С помощью этой формулы и определения  $Q_m$  можно получить

$$Q_m(\zeta) = N_1^m \left[ 1 + \sum_{n=1}^{m-1} \delta_1^n \sum_{k=0}^{m-n-1} \frac{\binom{n-1+k}{n-1} \binom{m-1-k}{n}}{N_1^{2k}} \right]. \quad (46)$$

Институт радиофизики и электроники  
АН АрмССР,  
Ереванский физический институт

Поступила 11.VII 1969

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. Е. Пафомов, ЖЭТФ, 33, 1074 (1957).
2. Г. М. Гарибян, Г. А. Чаликян, ЖЭТФ, 35, 1282 (1958); Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, том 12, № 3 (1959).
3. Ф. Г. Басс, В. М. Яковенко, УФН, 86, 189 (1965).
4. В. А. Аракелян, Г. М. Гарибян, Э. А. Налъян, Изв. АН АрмССР, Физика, 4, вып. 5 (1969).
5. М. Р. Магомедов, Изв. АН АрмССР, Физика, 2, 170 (1967).
6. В. Е. Пафомов, ЖЭТФ, 47, 530 (1964).
7. Г. М. Гарибян, ЖЭТФ, 33, 1403 (1957).
8. J. A. Fleck, Jr., Journ. Appl. Phys., 34, 2997 (1963).
9. Д. С. Кузнецов, Специальные функции, Москва, 1965.

ԹԻԹԵՂՈՒՄ ԵՎ ԹԻԹԵՂՆԵՐԻ ՇԵՐՏՈՒՄ ՇԱՐԺՎՈՂ ԼԻՑԻԷ ԺԱՌԱԳԱՅՅՄԱՆ  
ԳԵՆԵՐԱՑԻԱՅԻ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒՄՈՒՄԸ ՀԱՅՏՆԻ ԵՎ ԱՎԵԼԻ ԷԼԵՄԵՆՏԱՐ ԴԱՇՏԵՐԻՑ  
ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ՄԵԹՈԴՈՎ

Վ. Ա. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ, Գ. Մ. ԴԱՐԻԲՅԱՆ

Քիթեղում և քիթեղների շերտում լիցքի առաջացրած ճառագայթման համար ստացված քանակները բերված են նոր տեսքի և ցույց է տրված, որ այդ քանակները ունեն պարզ ֆիզիկական իմաստ, քանի որ կարող են կառուցվել ավելի պարզ արտահայտությունների միջոցով:

Այսպես օրինակ՝ քիթեղի դեպքում լուծումը կարելի է կառուցել մեկ բաժանման սահման ունեցող միջավայրի դեպքում ճառագայթման խնդրի լուծումներից հաշվի առնելով քիթեղի մեջ ճառագայթման տարածման օրենքները: Քիթեղների շերտի դեպքում բավական է իմանալ մեկ քիթեղի համար խնդրի լուծումը և հաշվի առնելով շերտավոր միջավայրում ճառագայթման տարածման օրենքները:

THE SOLUTION FOR A PROBLEM ON RADIATION  
GENERATION BY A MOVING CHARGE IN A PLATE AND IN  
A STACK OF PLATES BY THE METHOD OF DERIVATION  
FROM FAMILIAR AND MORE ELEMENTARY FIELDS

V. A. ARAKELIAN, G. M. GARIBIAN

The formulas, previously derived for radiation produced by a charge in a plate and in a stack of plates are transformed to a new form. These formulas are shown to have a clear physical meaning since they can be derived from more elementary expressions. Namely, in the case of a plate they can be derived from the solutions of a problem for one interface of media, taking into account of laws of radiation propagation in a plate. While in the case of a stack of plates it is sufficient to know the solution of a problem for one plate and to take into account the laws of radiation propagation in a laminated medium.