

О ПРИБЛИЖЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ДВИЖУЩИХСЯ СРЕД

С. Н. СТОЛЯРОВ

В работе выяснено, каким образом сказывается движение среды на виде геометрикооптических решений. Показано, что перемещение среды не влияет на амплитуды волн в приближении геометрической оптики, а изменяет только фазы этих волн. Показано, что в приближении геометрической оптики в неоднородной движущейся среде распространяются навстречу друг другу две независимые волны, частоты которых связаны между собой так же, как при двойном эффекте Доплера, который возникает при отражении от движущихся границ.

В последнее время различным вопросам электродинамики движущихся сред уделяется все больше внимания. Эти вопросы представляют интерес как с точки зрения общей теории, так и с точки зрения ее возможных применений [1, 2, 4] в связи с тем, что уже в настоящее время в средах с нелинейными свойствами возможно движение различных границ раздела с релятивистскими скоростями [3, 4].

В данной заметке мы хотим получить явный вид геометрикооптических решений в электродинамике движущихся сред с помощью решений уравнений Максвелла для конкретного случая равномерно движущейся среды, т. е. когда среда движется со скоростью v сквозь неизменный профиль диэлектрической постоянной $\varepsilon(z)$. Мы желаем также выяснить вопрос, каким образом движение среды сказывается на виде геометрико-оптических решений и на условиях их применимости. В принципе полученные ниже результаты можно было бы получить с помощью преобразований Лоренца общих выражений для покоящихся сред с медленно-меняющимися параметрами, приведенных в работах [9, 10].

В частности, полученные ниже решения эквивалентны геометрикооптическим решениям для покоящейся среды с $\varepsilon(z, t) = \varepsilon(z + vt)$, но в той системе координат, где профиль волны диэлектрической постоянной покоится. Примером такой среды может являться среда, по которой перемещается мощный световой импульс и свойства которой меняются за счет ее нелинейных эффектов синхронно с перемещением максимума светового импульса. Как известно [3], скорость перемещения максимума такого импульса в усилителе света может быть отличной от скорости света в среде.

Для простоты ищется решение одномерного волнового уравнения

$$[1 - \beta^2 \varepsilon(z)] \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon(z) - \beta^2}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{2\beta}{c} [\varepsilon(z) - 1] \frac{\partial^2 E}{\partial z \partial t} =$$

$$-\beta \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \cdot \left[\beta \cdot \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \right] = 0 \quad (1)$$

для электромагнитной волны $\vec{E}(\vec{r}, t) = E(z, t) \cdot \vec{e}_y$, распространяющейся вдоль оси z , в положительном направлении которой со скоростью $v = c\beta$ перемещается неоднородная среда с $\varepsilon = \varepsilon(z)$ и $\mu = 1$; c — скорость света в вакууме.

Уравнение (1) получено с помощью уравнений Максвелла и уравнений связи Минковского в движущейся среде [5]. При этом в уравнениях связи Минковского вместо постоянной ε введена диэлектрическая постоянная $\varepsilon(z)$, зависящая от координаты z . Это возможно делать потому, что соотношения Минковского получаются путем преобразований Лоренца из известных соотношений между индукциями и полями в покоящейся среде, а последние в случае отсутствия пространственной дисперсии носят локальный характер.

Для покоящейся среды ($\beta = 0$) уравнение (1) переходит в известное волновое уравнение в среде с переменным показателем преломления, а при постоянном ε , не зависящем от координат, из него нетрудно получить дисперсионное уравнение электродинамики движущихся однородных сред [6].

Как и в случае покоящихся сред, решение уравнения (1) ищем в виде ряда последовательных приближений по степеням малой длины волны $k = c/\omega$ [7]:

$$E(z, t) = \left\{ E_0(z) + \frac{c}{\omega} E_1(z) + \frac{c}{\omega^2} E_2(z) + \dots \right\} \exp i \frac{\omega}{c} [\psi(z) - ct]. \quad (2)$$

Если подставить это разложение в уравнение (1) и приравнять члены с одинаковыми степенями c/ω , то для искоемых величин $\psi(z)$, $E_0(z)$, $E_1(z)$, ... можно получить систему уравнений:

$$[1 - \beta^2 \varepsilon(z)] \left(\frac{d\psi}{dz} \right)^2 + 2\beta [\varepsilon(z) - 1] \frac{d\psi}{dz} - [\varepsilon(z) - \beta^2] = 0, \quad (a)$$

$$2 \left\{ [1 - \beta^2 \varepsilon(z)] \frac{d\psi}{dz} + \beta [\varepsilon(z) - 1] \right\} \frac{dE_0}{dz} + \left\{ [1 - \beta^2 \varepsilon(z)] \frac{d^2 \psi}{dz^2} + \beta \frac{d\varepsilon}{dz} \left[1 - \beta \frac{d\psi}{dz} \right] \right\} E_0 = 0, \quad (6)$$

$$2 \left\{ [1 - \beta^2 \varepsilon(z)] \frac{d\psi}{dz} + \beta [\varepsilon(z) - 1] \right\} \frac{dE_1}{dz} + \left\{ [1 - \beta^2 \varepsilon(z)] \frac{d^2 \psi}{dz^2} + \beta \frac{d\varepsilon}{dz} \left[1 - \beta \frac{d\psi}{dz} \right] \right\} E_1(z) = i \left\{ [1 - \beta^2 \varepsilon(z)] \frac{d^2 E_0}{dz^2} - \beta^2 \frac{d\varepsilon}{dz} \cdot \frac{dE_0}{dz} \right\}; \quad (3)$$

.....

Первое уравнение этой системы определяет фазу волны в движущейся неоднородной среде. Для нерелятивистских скоростей оно было найдено в [8].

Решения этого уравнения имеют вид:

$$n_+(z) = \frac{d\psi_+}{dz} = \left(\frac{d\psi}{dz} \right)_1 = \frac{\mu(z) + \beta}{1 + \beta \cdot \mu(z)}; \quad \psi_+(z) = \int_{z_0}^z n_+(\xi) d\xi; \quad (4)$$

$$n_-(z) = \frac{d\psi_-}{dz} = \left(\frac{d\psi}{dz} \right)_2 = -\frac{\mu(z) - \beta}{1 - \beta \cdot \mu(z)}; \quad \psi_-(z) = \int_{z_0}^z n_-(\xi) d\xi,$$

где $\mu(z) = \sqrt{\varepsilon(z)}$, а z_0 — постоянная интегрирования. Величины $n_+(z)$ и $n_-(z)$ определяют показатели преломления в движущейся неоднородной среде соответственно для волны, бегущей по направлению движения среды (n_+) и против (n_-), (см. [6]). Их отличие от показателя преломления $\mu(z) = \sqrt{\varepsilon(z)}$ для покоящейся неоднородной среды связано с увлечением волн движущейся средой.

Из второго уравнения системы (3) с помощью выражений (4) нетрудно также найти амплитуды $E_0^\pm(z)$ этих двух волн. Они имеют вид

$$E_0^\pm(z) = C_\pm / \sqrt{\mu(z)}, \quad (5)$$

где $C_\pm$ — постоянные, определяемые из граничных условий.

Таким образом, в движущейся неоднородной среде в приближении геометрической оптики распространяются две независимые волны вида

$$E^\pm(z, t) = \frac{C_\pm}{\sqrt{\mu(z)}} \cdot e^{i\Phi_\pm(z, t)}, \quad (6)$$

где

$$\Phi_\pm(z, t) = \frac{\omega}{c} [\psi_\pm(z) - ct].$$

При этом движение среды сказывается на фазах обеих волн и не сказывается на амплитудах.

Выясним условия применимости приближения геометрической оптики в движущейся неоднородной среде. Для этого из третьего уравнения системы (3) найдем следующую поправку $E_1(z)$ к геометрико-оптической амплитуде поля $E_0(\xi)$. В силу равенств (4) и (5) она принимает вид

$$E_1^\pm(z) = \frac{1}{\sqrt{\mu(z)}} \int_{z_1}^z \sqrt{\mu(\xi)} \cdot \chi^\pm(\xi) d\xi, \quad (7)$$

где

$$\chi^\pm(\xi) = \pm \frac{iC_\pm}{8(1-\beta^2)\sqrt{\mu(\xi)}} \left\{ \frac{3 + \beta^2\mu^2(\xi)}{\mu^3(\xi)} \left(\frac{d\mu}{d\xi} \right)^2 - \frac{2[1 - \beta^2\mu^2(\xi)]}{\mu^2(\xi)} \frac{d^2\mu}{d\xi^2} \right\},$$

z_1 — постоянная интегрирования, а индексы „+“ и „-“ соответствуют двум независимым волнам, бегущим в положительном и отрицательном направлениях оси z .

При $\beta = 0$ выражения для $E_1^\pm(z)$ совпадают с аналогичными выражениями в [7].

Если проинтегрировать выражение (7) по частям, то поправку $E_1(z)$ к геометрико-оптическому приближению можно записать в более удобном виде:

$$E_1^\pm(z) = \mp \frac{iC_\pm}{4\sqrt{\mu(z)(1-\beta^2)}} \left\{ \frac{1-\beta^2\mu^2(\xi)}{\mu^2(\xi)} \frac{d\mu}{d\xi} \right\}_{z_1}^z + \int_{z_1}^z \frac{1-\beta^2\mu^2(\xi)}{2\mu^3(\xi)} \left(\frac{d\mu}{d\xi} \right)^2 d\xi \Bigg\}.$$

Отсюда и из выражения (5) видно, что, как и для покоящихся неоднородных сред, относительная поправка $\delta_\pm(z) = \frac{C}{\omega} E_1^\pm(z)/E_0^\pm$ в разложении (2) будет мала там, где изменение показателя преломления $\mu(z)$ на расстояниях порядка длины волны $\lambda = c/\omega$ много меньше единицы, т. е. $\left| \frac{\lambda}{\mu(z)} \frac{d\mu}{dz} \right| \ll 1$. Движение среды существенным образом сказывается на условии применимости приближения геометрической оптики только при релятивистских скоростях движения среды. Наличие множителя $[1-\beta^2\mu^2(z)]$ в выражении для $E_1(z)$ делает условия применимости менее жесткими по мере приближения скорости движения среды к фазовой скорости распространения волны в ней.

В заключение отметим, что рассмотренная выше задача с точки зрения системы координат $S^{(0)}$, в которой неоднородная среда покоится, эквивалентна задаче о приближении геометрической оптики в системе, где сквозь неподвижную среду со скоростью v перемещается в отрицательном направлении оси z неизменный профиль диэлектрической постоянной $\varepsilon(z^{(0)} + vt^{(0)})^*$. Тогда можно показать, преобразуя по известным формулам преобразований Лоренца от системы S к системе $S^{(0)}$ частоты, волновые векторы и амплитуды электрического поля, что в системе координат $S^{(0)}$, где среда покоится, также имеются в каждой точке две независимые волны, распространяющиеся в положительном и отрицательном направлениях оси z . Частоты, волновые векторы и амплитуды поля этих волн имеют вид

$$\omega_\pm^{(0)} = \frac{\omega \sqrt{1-\beta^2}}{1 \pm \beta \cdot \mu(\eta)}; \quad k_\pm^{(0)} = \pm \frac{\omega_\pm^{(0)}}{c} \cdot \mu(\eta);$$

$$E_0^\pm(z) = C_\pm^{(0)} / \sqrt{\mu(\eta)} \cdot [1 \pm \beta \mu(\eta)]; \quad C_\pm^{(0)} = C_\pm \sqrt{1-\beta^2}; \quad \eta = z^{(0)} + vt^{(0)}.$$

Видно, что частоты этих двух независимых волн различны и в каждой точке среды η между ними имеет место связь

$$\frac{\omega_-^{(0)}}{\omega_+^{(0)}} = \frac{1+\beta \cdot \mu(\eta)}{1-\beta \mu(\eta)}.$$

* Величины, относящиеся к этой системе координат $S^{(0)}$, обозначаются индексом (0) сверху в отличие от величин без индекса, относящихся к системе координат S , в которой неоднородная среда движется со скоростью v в положительном направлении оси z .

Эта связь соответствует двойному эффекту Допплера, который возникает при отражении от движущихся границ раздела.

Поступила 1. IV.1969

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. C. S. Tsai, Appl. Phys. Lett., 9, № 11, 400 (1966).
2. B. A. Auld, C. S. Tsai, Jour. Appl. Phys., 38, № 5, 2106 (1967).
3. Н. Г. Басов, В. С. Летохов, ДАН СССР, 165, № 1, 58 (1965).
4. А. В. Гапонов, А. А. Островский, Г. И. Фрейдман, Изв. ВУЗов, Радиофизика, 10, № 9—10 (1967).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред. ГИТТЛ, М., 1957.
6. Б. М. Болотовский, А. А. Рухадзе, ЖЭТФ, 37, 1346 (1959).
7. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме. ГИФМЛ, М., 1960.
8. H. N. Kritikos, Proc. IEEE, 55, № 3, 442 (1967).
9. А. А. Островский, Изв. высш. учеб. зав., Радиофизика, 4, 293 (1961).
10. Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ, 41, 226 (1961).

ՇԱՐԺՎՈՂ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐԻ ԷԼԵԿՏՐԱԴԻՆԱՄԻԿԱՅՈՒՄ ԵՐԿՐԱԶԱՓԱԿԱՆ ՕՊՏԻԿԱՅԻ ՄՈՏԱՎՈՐՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ս. Ն. ՍՏՈԼՅԱՐՈՎ

Աշխատանքում րացաճայտված է, թե ինչպես է անդրադառնում միջավայրի շարժումը երկրաչափաօպտիկական լուծումների ձևի վրա: Ցույց է տրված, որ միջավայրի տեղաշարժը չի ազդում ալիքների ամպլիտուդայի վրա երկրաչափական օպտիկայի մոտավորության մեջ, այլ փոխում է միայն այդ ալիքների ֆազերը: Ցույց է տրված, որ երկրաչափական օպտիկայի մոտավորության մեջ շարժվող անհամասեռ միջավայրում տարածվում են իրար հանդիպակաց երկու անկախ ալիքներ, որոնց հաճախականությունները կապված են միմյանց հետ այնպես, չնչպես Դոպլերի կրկնակի էֆեկտի դեպքում, որը առաջանում է շարժվող սահմաններից անդրադարձման դեպքում:

ON APPROXIMATION OF GEOMETRICAL OPTICS IN ELECTRODYNAMICS OF MOVING MEDIA

S. N. STOLIAROV

Influence of motion of a medium on the kind of geometrico-optical solutions is found out. It is shown that in the above approximation the translation of a medium makes no effect on the wave amplitudes but changes their phases only.

Two independent waves whose frequencies are interrelated the same way as in the double Doppler effect arising in reflecting from moving boundaries are shown to propagate towards each other in a heterogeneous medium in approximation of geometrical optics.