

ИЗЛУЧЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНО ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ В ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ СО СФЕРИЧЕСКОЙ ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА

М. Р. МАГОМЕДОВ

В работе методом функции Грина получено решение уравнений Максвелла в случае двух диспергирующих сред со сферической границей раздела для произвольного распределения источников. Приведены асимптотические выражения для полей. Полученные решения позволяют рассмотреть широкий круг вопросов, начиная от дифракции на сфере произвольного возмущения и кончая электростатическими задачами. В работе рассмотрено также излучение заряда, вращающегося равномерно вокруг диэлектрической сферы.

В ряде работ были рассмотрены излучения, создаваемые заряженными частицами в диспергирующих средах с плоской границей раздела.

В настоящей статье дается решение уравнений Максвелла в случае, когда граница между диэлектриками имеет сферическую форму, а заряды движутся произвольным образом. Вычислена также интенсивность излучения заряда, равномерно вращающегося вокруг диэлектрической сферы.

1. Решение уравнений Максвелла в сферических координатах в случае одной среды.

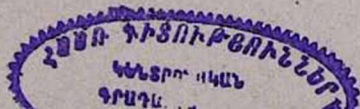
Пусть электромагнитные свойства бесконечной среды характеризуются диэлектрической постоянной $\varepsilon(\omega)$ и магнитной проницаемостью $\mu(\omega)$.

Разложим функции источников и амплитуды полей в интегралы (ряды, если движение периодически) Фурье по времени и запишем уравнения Максвелла в виде:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= -\frac{i\omega\varepsilon}{c} \mathbf{E}' + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_t, \\ \text{rot } \mathbf{E}' &= \frac{i\omega\mu}{c} \mathbf{H}, \\ \text{div } \mathbf{H} &= 0, \\ \text{div } \mathbf{E}' &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E} + \nabla\Phi \\ \mathbf{J}_t &= \mathbf{J} + \frac{i\omega\varepsilon}{4\pi} \nabla\Phi, \quad \text{div } \mathbf{J}_t = 0, \\ \Delta\Phi &= -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho. \end{aligned} \quad (2)$$



Как видно из (1) и (2), дивергенция обоих рассматриваемых полей E' , H равна нулю во всем пространстве. Поэтому решение уравнений (1) должно иметь вид (см. напр. [1], [2])

$$H = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [f_{lm}(kr) X_{lm}(\vartheta, \varphi) - \frac{ic}{\omega\mu} \operatorname{rot}(g_{lm}(kr) X_{lm}(\vartheta, \varphi))], \quad (3)$$

$$E' = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [g_{lm}(kr) X_{lm}(\vartheta, \varphi) + \frac{ic}{\omega\varepsilon} \operatorname{rot}(f_{lm}(kr) X_{lm}(\vartheta, \varphi))]. \quad (4)$$

В этих выражениях $X_{lm}(\vartheta, \varphi)$ означают ортонормированные векторные сферические гармоники:

$$X_{lm}(\vartheta, \varphi) = [l(l+1)]^{-1/2} L Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad X_{00} = 0,$$

$$\int X_{l'm'}(\vartheta, \varphi) X_{lm}(\vartheta, \varphi) d\Omega = \delta_{l'l} \delta_{m'm},$$

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}. \quad (5)$$

$$Y_{l,-m} = (-1)^m Y_{lm}^*,$$

$$L = -i[r \times \nabla], \quad d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad k^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon \mu}{c^2}.$$

Для определения функции $f_{lm}(kr)$ подставим разложение (3) в уравнение для поля H :

$$(\Delta + k^2) H = -\frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} J_t.$$

Умножим скалярно обе стороны уравнения на вектор $X_{lm}(\vartheta, \varphi)$ и проинтегрируем по всем углам. Принимая во внимание коммутационные соотношения

$$L\Delta = \Delta L, \quad L^2 L = LL^2$$

и ортонормированность функций X_{lm} , получим

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) f_{lm} = -\frac{4\pi}{c} \int X_{lm}^* \operatorname{rot} J_t d\Omega. \quad (6)$$

Подставляя разложение для E' в уравнение

$$(\Delta + k^2) E' = -\frac{4\pi i \omega \mu}{c^2} J_t$$

и проводя аналогичные вычисления, приходим к уравнению для функции $g_{lm}(kr)$

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) g_{lm} = -\frac{4\pi i \omega \mu}{c^2} \int X_{lm}^* J_t d\Omega. \quad (7)$$

Функция Грина уравнения (6) удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) G_f(r|r') = -\frac{1}{r^2} \delta(r-r'). \quad (8)$$

Решение этого уравнения, регулярное в начале координат и представляющее расходящиеся волны на бесконечности, равно

$$G_f(r|r') = ik j_l(kr') h_l(kr) \vartheta(r-r') + \\ + ik j_l(kr) h_l(kr') \vartheta(r'-r), \quad (9)$$

где $\vartheta(x-x')$ равна единице при $x > x'$ и нулю при $x < x'$, $j_l(x)$ и $h_l(x)$ являются сферическими функциями Бесселя и Ханкеля:

$$j_l(x) = \left(\frac{\pi}{2x} \right)^{1/2} J_{l+1/2}(x).$$

$$h_l(x) = h_l^{(1)}(x) = \left(\frac{\pi}{2x} \right)^{1/2} [J_{l+1/2}(x) + iN_{l+1/2}(x)]. \quad (10)$$

Что касается уравнения

$$\Delta \Phi = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho(r, \vartheta, \varphi, \omega), \quad (11)$$

его решение можно представить в виде

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi, \omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \varphi_{lm}(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (12)$$

где φ_{lm} удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \varphi_{lm} = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \int \rho Y_{lm}^* d\Omega. \quad (13)$$

Функция Грина этого уравнения, удовлетворяющая равенству

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) G_\Phi(r|r') = -\frac{1}{\varepsilon r^2} \delta(r-r'), \quad (14)$$

в случае бесконечного пространства равна

$$G_\Phi(r|r') = \frac{1}{\varepsilon(2l+1)} \left[\frac{r^l}{r'^{l+1}} \vartheta(r'-r) + \frac{r'^l}{r^{l+1}} \vartheta(r-r') \right]. \quad (15)$$

Поэтому в рассматриваемом случае имеем:

$$f_{lm}(kr) = \int_0^\infty G_f(r|r') K_E(r') r'^2 dr', \\ g_{lm}(kr) = \int_0^\infty G_g(r|r') K_M(r') r'^2 dr', \\ \varphi_{lm}(kr) = \int_0^\infty G_\Phi(r|r') K_L(r') r'^2 dr', \quad (16)$$

$$K_E = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{X}_{lm}^* \cdot \text{rot } \mathbf{J}_l d\Omega, \quad K_M = \frac{4\pi i\omega}{c^2} \int \mathbf{X}_{lm}^* \cdot \mathbf{J}_l d\Omega,$$

$$K_L = 4\pi \int \rho \dot{\mathbf{Y}}_{lm}^* g d\Omega, \quad G_g = \mu G_f.$$

2. Решение уравнений Максвелла в случае двух сред.

Пусть сфера радиуса a с центром в начале координат характеризуется диэлектрической постоянной $\epsilon_1(\omega)$ и магнитной проницаемостью $\mu_1(\omega)$. Значения этих параметров для пространства вне сферы обозначим через $\epsilon_2(\omega)$, $\mu_2(\omega)$.

Частное решение неоднородных уравнений Максвелла в пространствах внутри и вне сферы имеет вид разложений (3) и (4). Для удовлетворения граничным условиям на поверхности сферы к выражениям этого типа необходимо добавить решения однородных уравнений. Поскольку общее решение однородных уравнений представимо в виде (3) и (4), то это эквивалентно добавлению к радиальным решениям f и g или к соответствующим функциям Грина некоторой комбинации независимых решений однородного радиального уравнения.

Вне сферы радиуса a эта комбинация должна соответствовать волнам, движущимся от сферы. Этому условию удовлетворяет функция $h_l^{(1)}(k_2 r) \equiv h_l(k_2 r)$. Внутри сферы регулярной является функция $j_l(k_1 r)$.

Сформулируем еще граничные условия для рассматриваемых функций Грина. Эти условия должны следовать из условий непрерывности тангенциальных составляющих полей и нормальных составляющих индукций на границе раздела диэлектриков.

Принимая во внимание разложение (3), (4) и равенства

$$\text{rot } f_l \mathbf{X}_{lm} = \frac{i\omega}{r} [l(l+1)]^{1/2} f_l Y_{lm} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r f_l) [\mathbf{n} \times \mathbf{X}_{lm}],$$

$$\mathbf{rL} = 0, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r},$$

где $f_l(r)$ — произвольное решение радиального уравнения, мы приходим к выводу, что на границе раздела должны быть непрерывны выражения

$$G_f, \quad \frac{1}{\epsilon} \frac{d}{dr} (r G_f); \quad G_g, \quad \frac{1}{\mu} \frac{d}{dr} (r G_g); \quad (17)$$

$$G_\phi, \quad \epsilon \frac{d}{dr} G_\phi,$$

где G_f , G_g , G_ϕ означают функции Грина уравнений (6), (7), (13) в случае двух сред.

Таким образом, поля во всем пространстве в случае двух сред можно определить, построив три функции Грина с граничными условиями (17).

Построение функций Грина радиальных уравнений мы начнем с G_f . В соответствии с вышеизложенным, функция Грина G_f должна иметь вид

$$\begin{aligned} G_f = & ik_1 [j_l(k_1 r') h_l(k_1 r) \vartheta(r-r') + j_l(k_1 r') h_l(k_1 r') \vartheta(r'-r) + \\ & + \beta_E j_l(k_1 r') j_l(k_1 r)] \vartheta(a-r) \vartheta(a-r') + \\ & + ik_2 \tilde{\beta}_E j_l(k_1 r') h_l(k_2 r) \vartheta(r-a) \vartheta(a-r') + \\ & + ik_2 [j_l(k_2 r') h_l(k_2 r) \vartheta(r-r') + j_l(k_2 r) h_l(k_2 r') \vartheta(r'-r) + \\ & + \alpha_E h_l(k_2 r) h_l(k_2 r')] \vartheta(r-a) \vartheta(r'-a) + \\ & + ik_1 \tilde{\alpha}_E j_l(k_1 r) h_l(k_2 r') \vartheta(a-r) \vartheta(r'-a), \end{aligned} \quad (18)$$

где $\alpha_E, \tilde{\alpha}_E, \beta_E, \tilde{\beta}_E$ определяются из граничных условий. Из непрерывности G_f и $\frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{dr} (r G_f)$ находим:

$$\Delta_E \alpha_E = j_l(k_2 a) [a j_l(k_1 a)]' - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} j_l(k_1 a) [a j_l(k_2 a)]', \quad (19)$$

$$\Delta_E \beta_E = h_l(k_2 a) [a h_l(k_1 a)]' - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} h_l(k_1 a) [a h_l(k_2 a)]',$$

$$\Delta_E = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} j_l(k_1 a) [a h_l(k_2 a)]' - h_l(k_2 a) [a j_l(k_1 a)]',$$

$$\tilde{\alpha}_E = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{i}{a k_1 \Delta_E}, \quad \tilde{\beta}_E = \frac{i}{a k_2 \Delta_E}, \quad [\]' = \frac{d}{da} [\],$$

Функция Грина G_g строится аналогичным образом и получается из G_f умножением на $\mu = \mu_1 \vartheta(a-r) + \mu_2 \vartheta(r-a)$ и заменой

$$\alpha_E, \beta_E, \tilde{\alpha}_E, \tilde{\beta}_E \rightarrow \alpha_M, \beta_M, \tilde{\alpha}_M, \tilde{\beta}_M,$$

где

$$\Delta_M \alpha_M = j_l(k_2 a) [a j_l(k_1 a)]' - \frac{\mu_1}{\mu_2} j_l(k_1 a) [a j_l(k_2 a)]', \quad (20)$$

$$\Delta_M \beta_M = h_l(k_2 a) [a h_l(k_1 a)]' - \frac{\mu_1}{\mu_2} h_l(k_1 a) [a h_l(k_2 a)]',$$

$$\Delta_M = \frac{\mu_1}{\mu_2} j_l(k_1 a) [a h_l(k_2 a)]' - h_l(k_2 a) [a j_l(k_1 a)]',$$

$$\tilde{\alpha}_M = \frac{i}{a k_1 \Delta_M}, \quad \tilde{\beta}_M = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{i}{a k_2 \Delta_M}.$$

Нам остается теперь построить функцию G_Φ в случае двух сред. Для этого к сингулярным решениям вида (15) необходимо добавить решения однородного уравнения. Решение однородного уравнения, регулярное вне сферы, пропорционально $r^{-(l+1)}$. Внутри сферы регулярным является r^l . Поэтому запишем G_Φ в виде

$$\begin{aligned}
 (2l+1) G_{\Phi} = & \frac{1}{\varepsilon_1} \left[\frac{r^l}{r'^{l+1}} \vartheta(r'-r) + \frac{r'^l}{r^{l+1}} \vartheta(r-r') + \right. \\
 & + \beta_L \frac{1}{a} \left(\frac{r}{a} \right)^l \left(\frac{r'}{a} \right)^l \left. \right] \vartheta(a-r) \vartheta(a-r') + \\
 & + \frac{1}{\varepsilon_2} \tilde{\beta}_L \frac{r'^l}{r^{l+1}} \vartheta(r-a) \vartheta(a-r') + \\
 & + \frac{1}{\varepsilon_2} \left[\frac{r^l}{r'^{l+1}} \vartheta(r'-r) + \frac{r'^l}{r^{l+1}} \vartheta(r-r') + \right. \\
 & + \alpha_L \frac{1}{a} \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} \left(\frac{a}{r'} \right)^{l+1} \left. \right] \vartheta(r-a) \vartheta(r'-a) + \\
 & + \frac{1}{\varepsilon_1} \tilde{\alpha}_L \frac{r^l}{r'^{l+1}} \vartheta(a-r) \vartheta(r'-a),
 \end{aligned} \quad (21)$$

где неопределенные коэффициенты определяются из непрерывности

$$G_{\Phi} \text{ и } \varepsilon \frac{d}{dr} G_{\Phi} \text{ при } r = a$$

и равны

$$\begin{aligned}
 \alpha_L &= \frac{l(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{l\varepsilon_1 + (l+1)\varepsilon_2}, \quad \tilde{\alpha}_L = \varepsilon_1 \frac{2l+1}{l\varepsilon_1 + (l+1)\varepsilon_2}, \\
 \beta_L &= \frac{(l+1)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{l\varepsilon_1 + (l+1)\varepsilon_2}, \quad \tilde{\beta}_L = \varepsilon_2 \frac{2l+1}{l\varepsilon_1 + (l+1)\varepsilon_2}.
 \end{aligned} \quad (22)$$

Для получения решения уравнений Максвелла в случае двух сред найденные функции Грина необходимо подставить в (16). При этом возникают интегралы вида

$$\int f_l(kr) X_{lm}^* \cdot \text{rot } J_l d^3x, \quad \int f_l(kr) X_{lm}^* \cdot J_l d^3x,$$

где $f_l(kr)$ какое-либо решение однородного уравнения.

Эти интегралы желательно преобразовать к более удобному виду. Для этого подставим вместо J_l его значение

$$J_l = J + \frac{i\omega\varepsilon}{4\pi} \nabla \Phi$$

и проинтегрируем по частям.

В результате получим

$$\int f(kr) X_{lm}^* \cdot \text{rot } J_l d^3x = \frac{i}{\sqrt{l(l+1)}} \int Y_{lm}^* \left[i\omega\rho \frac{d}{dr}(rf) - k^2(rJ) f \right] d^3x, \quad (23)$$

$$\int f(kr) X_{lm}^* \cdot J_l d^3x = \frac{i}{\sqrt{l(l+1)}} \int Y_{lm}^* f \text{div}[r \times J] d^3x.$$

При получении этих равенств отброшены поверхностные интегралы. Это оправдано, если $\mathbf{J}$ обладает достаточно хорошими аналитическими свойствами и обращается на бесконечности в нуль быстрее, чем r^{-2} .

Как видно из этих выражений, поля мультиполей магнитного типа (типа g_{lm}) определяются плотностью магнитного момента тока $1/2c [\mathbf{r} \times \mathbf{J}]$.

Подставляя полученные функции $f_{lm}(kr)$ и $g_{lm}(kr)$ в разложения (3) и (4) с $\varepsilon = \varepsilon_1 \theta(a-r) + \varepsilon_2 \theta(r-a)$, $\mu = \mu_1 \theta(a-r) + \mu_2 \theta(r-a)$, мы получаем решение уравнений Максвелла в случае двух сред. Полученные таким образом поля являются поперечными. Продольная часть поля равна $-\nabla\Phi$, поскольку $\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \nabla\Phi$.

Полученные решения позволяют рассмотреть большой круг вопросов, начиная от дифракции на сферическом препятствии произвольного возмущения и кончая электростатическими задачами. Мы будем в дальнейшем заниматься только вопросами излучения ограниченных распределений источников. Поэтому приведем окончательные выражения для Фурье-компонент полей в волновой зоне

$$k_2 r \gg 1, \quad r \gg d, \quad d = \max r'.$$

Они имеют вид:

$$\mathbf{H} = \frac{e^{ik_2 r}}{k_2 r} \sum_{l,m} (-i)^{l+1} \left[A_E \mathbf{X}_{lm} + \left(\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} \right)^{1/2} A_M [\mathbf{n} \times \mathbf{X}_{lm}] \right], \quad (24)$$

$$\mathbf{E} = \left(\frac{\mu_2}{\varepsilon_2} \right)^{1/2} [\mathbf{H} \times \mathbf{n}].$$

$$A_E = \frac{4\pi k_2 \omega}{ic \sqrt{l(l+1)}} (\alpha_E + \alpha_{1E} \alpha_E + \alpha_{2E} \tilde{\beta}_E), \quad (25)$$

$$A_M = \frac{4\pi k_2 \omega \mu_2}{ic^2 \sqrt{l(l+1)}} (\alpha_M + \alpha_{1M} \alpha_M + \alpha_{2M} \tilde{\beta}_M),$$

$$\alpha_E = D_E(a, \infty, j_l(k_2 r)), \quad \alpha_{1E} = D_E(a, \infty, h_l(k_2 r)),$$

$$\alpha_{2E} = D_E(0, a, j_l(k_1 r)).$$

Коэффициенты $\alpha_M, \alpha_{1M}, \alpha_{2M}$ выражаются точно таким же образом через D_M , где

$$D_E(r_1, r_2, f_l(kr)) = \int_{r_1}^{r_2} Y_{lm}^* \left[\rho \frac{d}{dr} (r f_l(kr)) + \frac{ik^2}{\omega} (r \mathbf{J}) f_l(kr) \right] d^3x, \quad (26)$$

$$D_M(r_1, r_2, f_l(kr)) = \int_{r_1}^{r_2} Y_{lm}^* f_l(kr) \operatorname{div} [\mathbf{r} \times \mathbf{J}] d^3x.$$

В заключении этого раздела отметим следующее: при $\varepsilon_1, \mu_1 = \varepsilon_2, \mu_2 = \varepsilon, \mu$ все формулы этого параграфа переходят в соответствующие выражения для случая одной среды; все коэффициенты типа α, β

являются коэффициентами отражения от сферической границы, а $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ — коэффициентами прохождения.

3. Излучение заряда, равномерно вращающегося вокруг диэлектрической сферы.

Пусть заряд равномерно движется по окружности $x^2 + y^2 = b^2$ с циклической частотой ω_0 . Поскольку движение периодически, разложим все величины в ряд Фурье. Для Фурье-компонент плотностей заряда и тока имеем выражения

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= e v \frac{Q}{2\pi b^2} \delta(r-b) \delta\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) e^{in\varphi}, \\ \rho(r, \omega) &= \frac{Q}{2\pi b^2 \sin \vartheta} \delta(r-b) \delta\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) e^{in\varphi}, \\ \omega &= n\omega_0, \quad v = b\omega_0, \quad b > a. \end{aligned}$$

Подставляя эти величины в интегралы (25) и (26), получим

$$A_E = \frac{4\pi k_2 \omega Q}{ic \sqrt{l(l+1)}} \left[\frac{d}{db} b(j_l(k_2 b) + h_l^{(1)}(k_2 b) \alpha_E) \right] Y_{ln}^*\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \delta_{nm}, \quad (27)$$

$$A_M = \frac{4\pi k_2 \omega Q v \mu_2}{ic^2 \sqrt{l(l+1)}} (j_l(k_2 b) + h_l^{(1)}(k_2 b) \alpha_M) \frac{d}{d\vartheta} Y_{ln}^*\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \delta_{nm}.$$

Выражение $Y_{ln}^*\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ отлично от нуля только при $l-n=2k$, а

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\vartheta} Y_{ln}^*\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) &\text{ — при } l-n=2k+1, \text{ где} \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Поэтому имеем:

$$|H_n|^2 = \frac{1}{k_2^2} \left| \sum_{k=0}^{\infty} A_E X_{2k+n, n} - i \left(\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} \right)^{1/2} A_M \times [n X_{2k+n+1, n}] \right|^2. \quad (28)$$

Интенсивность излучения с частотой $\omega = n\omega_0$ в элемент телесного угла $d\Omega$ можно вычислить по формуле

$$dI_n = \frac{c}{2\pi} \left(\frac{\mu_2}{\varepsilon_2} \right)^{1/2} |H_n|^2 r^2 d\Omega. \quad (29)$$

Рассмотрим более подробно случай, когда $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon$.

В нерелятивистском приближении $\beta \ll 1$, $n\beta \ll 1$ ряд (28) быстро сходится. Удерживая первый неиз исчезающий член этого ряда, можно получить для интенсивности формулу

$$dI_n = \frac{b^2 Q^2 (n\omega_0)^4 (n\beta \sin \vartheta)^{2n-2} (1 + \cos^2 \vartheta)}{2\pi c^3 2^{2n} \Gamma^2(n+1)} \left[1 + \frac{n(1-\varepsilon)}{n\varepsilon + n + 1} \left(\frac{a}{b} \right)^{2n+1} \right]^2, \quad (30)$$

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \frac{a}{b} \ll 1.$$

При $a \rightarrow 0$ или $\varepsilon \rightarrow 1$ выражение в квадратных скобках обращается в единицу. При этом формула (29) переходит в известное выражение для интенсивности излучения при равномерном движении по окружности (см., напр. [3]).

Отношение интенсивности излучения при вращении вокруг диэлектрической сферы к интенсивности при вращении в вакууме дается величиной в квадратных скобках.

Рассмотрим теперь ультрарелятивистский случай, когда $1 - \beta^2 \ll 1$. Основную роль в измерении при этом играют гармоники с большими n . Угловое распределение излучения в этом случае резко анизотропно. Используя асимптотические выражения для присоединенных функций Лежандра $P_{2k+n}^n(\cos \vartheta)$, можно показать, что излучение в основном

заключено в области углов $\vartheta = \frac{\pi}{2} \pm n^{-1/3}$. Поэтому мы рассмотрим

более подробно спектральные распределения излучения. Интегрируя выражение (28) по всем углам и используя формулу (29), получим

$$I_n = \frac{2\omega^2 Q^2}{\pi c} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} R(k) \left| \frac{d}{db} b (j_{n+2k}(k_2 b) + h_{2k+n}(k_2 b) a_E) \right|^2 + \right. \\ \left. + 4\beta^2 \sum_{k=0}^{\infty} P(k) |j_{n+2k+1}(k_2 b) + h_{n+2k+1}(k_2 b) a_M|^2 \right\}, \quad (31)$$

$$R(k) = \frac{2(n+2k)+1}{(n+2k)(n+2k+1)} \frac{\Gamma(k+1/2) \Gamma(n+k+1/2)}{\Gamma(k+1) \Gamma(n+k+1)},$$

$$P(k) = \frac{2(n+2k+1)+1}{(n+2k+1)(n+2k+2)} \frac{\Gamma(k+3/2) \Gamma(n+k+3/2)}{\Gamma(k+1) \Gamma(n+k+1)}.$$

Для непосредственного вычисления этих сумм нам пришлось бы брать огромное количество членов, поскольку $k_2 b = n\beta \gg 1$. Поэтому применим здесь технику, развитую В. А. Фоком в работе [4]. Как мы увидим ниже, основную роль в этих суммах играют значения $k \sim n^{1/3}$.

Поэтому имеем:

$$R(k) \approx \frac{2}{n^{3/2}} \frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k+1)}, \quad P(k) \approx \frac{2}{n^{1/2}} \frac{\Gamma(k+3/2)}{\Gamma(k+1)}.$$

$$\frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k+1)} \approx \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad \frac{\Gamma(k+3/2)}{\Gamma(k+1)} \approx k^{1/2}.$$

После этого мы переходим от суммирования по k к интегрированию по $x = n + 2k$. Далее вводим новую переменную интегрирования t согласно формулам

$$x = k_2 b + \left(\frac{k_2 b}{2}\right)^{1/3} t = k_2 a + \left(\frac{k_2 a}{2}\right)^{1/3} t'$$

и выражаем все функции j , h через функции $v(t)$ и $u(t)$, введенные в работе [4]. В результате, используя для α_E и α_M их значения для случая идеальной проводимости, получим для спектрального распределения интенсивности излучения следующую формулу:

$$I_n = \frac{4\omega_0^2 Q^2}{\pi c} \left(\frac{n}{2}\right)^{1/3} (J_1 + J_2), \quad (32)$$

$$J_1 = \int_{t_0}^{\infty} (t - t_0)^{-1/2} v'^2(t) F_1(t, y) dt,$$

$$J_2 = \int_{t_0}^{\infty} (t - t_0)^{1/2} v^2(t) F_2(t, y) dt,$$

$$F_1(t, y) = \left| 1 - \frac{w'(t) v'(t+y)}{v'(t) w'(t+y)} \right|^2,$$

$$F_2(t, y) = \left| 1 - \frac{w(t) v(t+y)}{v(t) w(t+y)} \right|^2,$$

$$t_0 = \left(\frac{n}{2}\right)^{2/3} (1 - \beta^2), \quad y = \left(\frac{n}{2}\right)^{2/3} \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right),$$

$$w(t) = u(t) + iv(t), \quad w''(t) = tw(t).$$

В этих выражениях через $v(t)$ обозначена функция Эйри. Функция $u(t)$ может быть определена из соотношения

$$u'(t) v(t) - u(t) v'(t) = 1.$$

При $t \rightarrow +\infty$ имеем

$$V(t) = \frac{1}{2} t^{-1/4} e^{-\frac{2}{3} t^{3/2}}, \quad u(t) = t^{-1/4} e^{2/3 t^{3/2}}.$$

Функции $F_1(t, y)$ и $F_2(t, y)$ обращаются в единицу при $y \gg 1$ (что соответствует отсутствию сферы).

При этом формула (32) дает интенсивность излучения заряда, равномерно движущегося по окружности, и совпадает с формулой (12) работы [5]. В этом случае спектральное распределение имеет максимум при $t_0 \sim 1$, т. е. $n \sim (1 - \beta^2)^{-3/2}$.

Рассмотрим теперь случай, когда $y \ll 1$. Разлагая функции $v(t+y)$ и $w(t+y)$ по степеням y и удерживая первый не исчезающий член, получим

$$J_1 \approx y^2 \int_{t_0}^{\infty} \frac{t^2}{\sqrt{t - t_0} v'^2(t) + u'^2(t)} dt,$$

$$J_2 \approx y^2 \int_{t_0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^{1/2}}{v^2(t) + u^2(t)} dt.$$

Таким образом, при $y \gg 1$, т. е. $1 - \frac{a^2}{b^2} \ll 1 - \beta^2$, интенсивность излучения исчезающе мала. Физически этот результат является очевидным, поскольку заряд движется вблизи металлической сферы. Наличие сферы эффективно сказывается при $y \sim 1$ ($1 - \frac{a^2}{b^2} \sim 1 - \beta^2$). При $y \gg 1$ наличием сферы можно пренебречь.

В заключение автор выражает благодарность Г. М. Гарибяну и И. И. Гольдману за полезные советы и обсуждения результатов.

Ереванский физический институт

Поступила 2.XII.1968

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ф. М. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики, т. II., ИИЛ, М, 1958.
2. Дж. Джексон. Классическая электродинамика. Изд. "Мир", 1965.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля. Физматгиз, М, 1960.
4. В. А. Фок. Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1946.
5. Г. М. Гарибян, И. И. Гольдман. Изв. АН Арм. ССР, 7, 31 (1954).

ՍՖԵՐԻԿ ԲԱԺԱՆՄԱՆ ՍԱՀՄԱՆ ՈՒՆԵՑՈՂ ԴԻՍՊԵՐՍԻԱՅՈՎ ՕԺՏՎԱԾ
ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐԻ ՄԵՋ ԿԱՄԱՅԱՊԵՍ ՇԱՐԺՎՈՂ ԼԻՑԲԵՐԻ ՃԱՌԱԳԱՅԹՈՒՄԸ

Մ. Ռ. ՄԱԳՈՄԵԴՈՎ

Աշխատանքում Դրինի ֆունկցիաների մեթոդով ստացված է Մաքսվելի հավասարումների լուծումը սֆերիկ բաժանման սահման ունեցող, դիսպերսիայով օժտված երկու միջավայրերի համար, աղբյուրների կամայական բաշխման դեպքում: Ստացված արտահայտությունները թույլ են տալիս ուսումնասիրել էլեկտրոդինամիկական մի շարք խնդիրներ, որոնց լուծումը դժվար է ստանալ սովորական մեթոդիկայով:

Որպես օրինակ աշխատանքում դիտարկված է դիլեկտրիկ զնդի շուրջը հավասարաչափ պտտվող լիցքի ճառագայթումը:

RADIATION OF ARBITRARILY MOVING CHARGES IN DISPERSING MEDIA WITH A SPHERICAL INTERFACE

M. R. MAGOMEDOV

A solution of Maxwell equations for the case of two dispersing media with a spherical interface by the method of Green's function is obtained for arbitrarily distributed external sources. The asymptotic expressions for the fields are also given. By the solution obtained one may consider numerous problems beginning from diffraction of an arbitrarily given pulse on a sphere to electrostatic problems. The intensity of the radiation for the charge uniformly rotating around the dielectric sphere is also calculated.