

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ НА БОЛЬШИХ РАССТОЯНИЯХ ОТ ИСТОЧНИКА

Б. М. БОЛОТОВСКИЙ, О. С. МЕРГЕЛЯН, С. Н. СТОЛЯРОВ

Показано, что на больших расстояниях от источника вклад в волновое поле дают те излучаемые волны, у которых групповая скорость направлена от источника в точку наблюдения. При этом фазовая скорость излученных волн, вообще говоря, не направлена в точку наблюдения. В качестве примеров рассмотрено поле излучения источника в движущейся среде и одноосном кристалле. Результаты, касающиеся излучения в движущихся средах, говорят в пользу выражения для потока энергии, которое следует из тензора энергии импульса Минковского.

1. Как известно, поле излучения в изотропной среде на больших расстояниях от источника может быть представлено в виде сферических волн:

$$A_m(r, \vartheta, \varphi) = f(\vartheta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (1)$$

где $A_m(r, \vartheta, \varphi)$ — значение поля частоты ω в точке r, ϑ, φ . Под функцией A_m мы будем понимать некоторое решение волнового уравнения. В частности, функция A_m может обозначать любую компоненту электрического поля $\vec{E}$ или магнитного поля $\vec{H}$, или компоненту потенциала электромагнитного поля. В дальнейшем мы будем ограничивать рассмотрение областью электродинамики, хотя полученные ниже выводы справедливы для любых волновых пакетов (напр., для задач о рассеянии звука на неоднородностях в кристалле, для задач акустики и т. д.).

Входящая в формулу (1) величина k связана с частотой волны ω и скоростью света в среде c/n ,

$$k = \frac{\omega}{c} \cdot n = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu}, \quad (2)$$

В изотропной среде показатель преломления n не зависит от направления. Если же среда является анизотропной, то показатель преломления n будет зависеть от направления распространения волны. В этом случае следует уже уточнить само понятие „направление распространения“. Дело в том, что в анизотропной среде направления фазовой и групповой скорости не совпадают между собой. Рассмотрим для этого плоскую волну частоты ω

$$A(\vec{x}, t) = A_0 \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (3)$$

в анизотропной среде с дисперсией. Дисперсионное уравнение в такой среде связывает волновой вектор $\vec{k}$ с частотой ω соотношением вида

$$\vec{k} = \vec{s} \cdot \frac{\omega}{c} \cdot n(\vec{s}, \omega), \quad (4)$$

где $\vec{s}$ — единичный вектор в направлении $\vec{k}$. Как мы видим, здесь уже показатель преломления $n(\vec{s}, \omega)$ зависит не только от частоты ω , но и от направления $\vec{s}$.

Фазовая скорость волны (3), как известно, записывается в виде

$$\vec{v}_{\text{фаз.}} = \vec{s} \frac{\omega}{k} = \vec{s} \cdot \frac{c}{n(\vec{s}, \omega)} \quad (5)$$

и, следовательно, направлена по волновому вектору $\vec{k}$. Групповая скорость волны (3) имеет вид

$$\vec{v}_{\text{груп.}} = \frac{d\omega}{d\vec{k}} \quad (6)$$

и ее нетрудно вычислить, воспользовавшись соотношением (4). В изотропной среде частота ω может быть выражена через абсолютную величину волнового вектора, и в этом случае из (6) следует, что групповая

скорость также направлена по $\vec{s} = \frac{\vec{k}}{k}$, т. е. направление фазовой

и групповой скоростей совпадает. В анизотропной среде, как видно из (4), связь между ω и $\vec{k}$ зависит от направления $\vec{s}$, т. е. групповая скорость не совпадает по направлению с фазовой. Так как групповая скорость дает направление потока электромагнитной энергии то отсюда следует, что в анизотропной среде поток энергии направлен не по волновому вектору.

Нашей задачей является определение асимптотики электромагнитного поля в анизотропной среде в присутствии источников этого поля. Естественно было бы ожидать, что и в анизотропной среде поле на больших расстояниях от источника имеет вид (1) с той только разницей, что величина $\vec{k}$ в показателе экспоненты зависит от направления на точку наблюдения:

$$A_{\omega}(r, \vartheta, \varphi) = f(\vartheta, \varphi) \cdot \frac{e^{i \frac{\omega}{c} n(\vartheta, \varphi) r}}{r}. \quad (7)$$

Однако, как показывает дальнейший расчет, это ожидание не оправдывается, и поле имеет более сложный вид. Ниже мы получим выражение для поля на больших расстояниях от источника в анизотропной среде и обсудим физический смысл полученного выражения.

Пусть для волны с частотой ω и волновым вектором $\vec{k}$ показатель преломления n равен

$$n(\omega, \vec{s}) = n\left(\omega, \frac{\vec{k}}{k}\right) = n(\omega, \vartheta, \varphi),$$

где ϑ и φ — углы, определяющие направление вектора $\vec{s} = \vec{k}/k$.

Тогда поле частоты ω может быть представлено в виде

$$A_{\omega}(\vec{r}) = \int \mathfrak{M}_{\omega}(\vartheta, \varphi) \cdot e^{i \frac{\omega}{c} n(\vartheta, \varphi) \vec{s} \cdot \vec{r}} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad (8)$$

где $\mathfrak{M}_{\omega}(\vartheta, \varphi)$ — некоторая функция углов ϑ и φ ; единичный вектор $\vec{s}$ имеет направление ϑ, φ , а направление радиуса вектора $\vec{r}$ в точку наблюдения характеризуется углами ϑ_0, φ_0 , т. е.

$$\vec{s} \cdot \vec{r} = r \cdot [\cos \vartheta \cdot \cos \vartheta_0 - \sin \vartheta \cdot \sin \vartheta_0 \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)]. \quad (9)$$

Поэтому в подынтегральном выражении (8) множитель в показателе экспоненты, зависящий от углов, имеет вид

$$\Phi(\vartheta, \varphi) = n(\vartheta, \varphi) \cdot [\cos \vartheta \cdot \cos \vartheta_0 - \sin \vartheta \cdot \sin \vartheta_0 \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)], \quad (10)$$

а все выражение (8) может быть переписано в виде

$$A_{\omega}(\vec{r}) = \int \mathfrak{M}_{\omega}(\vartheta, \varphi) \cdot e^{i \frac{\omega}{c} r \Phi(\vartheta, \varphi)} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (11)$$

Рассмотрим теперь поле на больших расстояниях r от начала координат

$$\frac{\omega}{c} \cdot r \cdot \Phi(\vartheta, \varphi) \gg 1. \quad (12)$$

Тогда для вычисления интеграла (11) можно применить метод стационарной фазы. В силу условия (12) экспоненциальный множитель в (11) сильно осциллирует, и вклад в интеграл дадут только окрестности тех точек ϑ', φ' , где одновременно выполняются два условия

$$\frac{\partial \Phi(\vartheta', \varphi')}{\partial \vartheta} = 0; \quad \frac{\partial \Phi(\vartheta', \varphi')}{\partial \varphi} = 0. \quad (13)$$

Таких точек может быть несколько. Следует выбирать те из них, которым соответствует групповая скорость, направленная к точке наблюдения.

В окрестности точек стационарной фазы ϑ', φ' функцию $\Phi(\vartheta, \varphi)$ можно разложить в ряд Тейлора и вынести за знак интегрирования значение подынтегрального выражения в точке стационарной фазы. Тогда мы получим

$$A_{\omega}(\vec{r}) = \mathfrak{M}_{\omega}(\vartheta', \varphi') \cdot \sin \vartheta' \cdot e^{i \frac{\omega}{c} r \Phi(\vartheta, \varphi')} \cdot \int d\vartheta d\varphi \cdot \exp i \frac{\omega}{c} r \left[a(\vartheta - \vartheta')^2 + b(\vartheta - \vartheta')(\varphi - \varphi') + c(\varphi - \varphi')^2 \right], \quad (14)$$

где мы ввели обозначения

$$a = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta^2}; \quad b = \frac{\partial^2 \Phi(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta \partial \varphi}; \quad c = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi^2}, \quad (15)$$

а все производные вычисляются в точке $\vartheta = \vartheta'$ и $\varphi = \varphi'$. При больших значениях r пределы интегрирования в (14) можно считать бесконечными.

Вычисляя интеграл в (14), получим

$$A_{\omega}(\vec{r}) = \frac{2\pi c \cdot \sin \vartheta'}{i\omega r \sqrt{4ac - b^2}} \mathfrak{M}_{\omega}(\vartheta', \varphi') \cdot e^{i \frac{\omega}{c} r \Phi(\vartheta', \varphi')} \quad (16)$$

С учетом формул (8), (9) и (10) это выражение можно переписать в виде

$$A_{\omega}(\vec{r}) = \frac{2\pi c \cdot \sin \vartheta'}{i\omega \sqrt{4ac - b^2}} \mathfrak{M}_{\omega}(\vec{s}') \cdot \frac{e^{i \frac{\omega}{c} n(\vec{s}') \cdot (\vec{s}' \cdot \vec{r})}}{r} \quad (17)$$

Рассмотрим полученное выражение. Напомним, что радиус-вектор $\vec{r}$ имеет угловые координаты ϑ_0, φ_0 , т. е. $\vec{r} = \vec{s}_0 \cdot r$. Мы видим, однако, что в фазу экспоненциального выражения входит величина показателя преломления не в направлении наблюдения $\vec{s}_0$, а в направлении $\vec{s}'$, угловые координаты которого удовлетворяют условиям (13), т. е. дают точку стационарной фазы. Кроме того, в фазу входит скалярное произведение $(\vec{s}' \cdot \vec{r}) = (\vec{s}' \cdot \vec{s}_0) \cdot r$, пропорциональное проекции векторов $\vec{s}_0$ и $\vec{s}'$ друг на друга. Легко видеть, что экспонента описывает волну, фазовая скорость которой направлена по $\vec{s}'$. Это следует из того, что волновой вектор волны (17) равен

$$\vec{k}' = \frac{\omega}{c} \cdot n(\vec{s}') \cdot \vec{s}', \quad (18)$$

т. е. направлен по $\vec{s}'$. Следовательно, в силу выражения (5), фазовая скорость тоже направлена по $\vec{s}'$. Таким образом, мы видим, что в анизотропной среде поле на больших расстояниях от источника представляет собой волну, фазовая скорость которой не совпадает с направлением наблюдения. Нетрудно видеть, что с направлением наблюдения в данном случае совпадает групповая скорость. Для того, чтобы в этом убедиться, построим поверхность волновых векторов при заданной частоте ω , для чего отложим от начала координат в каждом данном

направлении $\vec{s}$ волновой вектор $\vec{k}$ по формуле (4). Часть полученной поверхности изображена на рис. 1. На этом рисунке от начала координат проведена также прямая в направлении точки наблюдения $\vec{r} = s_0 \cdot r$. Точка стационарной фазы ϑ', φ' может быть найдена на рис. 1 графически. Проведем плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{r}$ так, чтобы эта плоскость касалась поверхности волновых векторов. Точка касания как раз и есть точка стационарной фазы. Действительно, легко видеть, что в малой окрестности этой точки величина $(\vec{k} \cdot \vec{r})$ не меняется, что является признаком точки стационарной фазы. На рисунке видно, что волновой вектор, соответствующий точке стационарной фазы, направлен по $\vec{s}'$, т. е. его направление отличается от $\vec{s}_0$. Как известно, направление групповой скорости волны совпадает с направлением нормали к поверхности волновых векторов. Из рисунка видно, что нормаль к поверхности волновых векторов в точке стационарной фазы параллельна направлению наблюдения $\vec{s}_0$. Это означает, что и групповая скорость волны (17) совпадает по направлению с вектором $\vec{r} = s_0 \cdot r$.

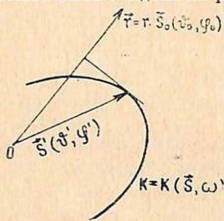


Рис. 1.

2. Обратимся теперь к конкретным физическим примерам. Рассмотрим изотропную в системе покоя среду с диэлектрической постоянной ϵ и магнитной проницаемостью μ . Пусть эта среда движется равномерно со скоростью $\vec{u}$ в направлении оси z . Движение среды приводит к тому, что она становится анизотропной, и групповая скорость волн в такой среде может быть, вообще говоря, направлена иначе, чем фазовая.

Пусть, далее, в этой среде движется точечная частица с зарядом q . Закон ее движения зададим в виде $\vec{r} = \vec{r}_1(t)$. Движущийся заряд создает в среде электромагнитное поле, которое мы будем описывать потенциалами $\vec{A}$ и φ . Фурье-компоненты этих потенциалов имеют следующий вид [1]:

$$\vec{A}_3(\vec{r}) = \frac{\mu q}{2\pi} \int e^{i\omega t'} dt' \left\{ \frac{\vec{v}(t')}{c} - \frac{\chi \gamma^2}{1 + \chi} \cdot \frac{\vec{u}}{c} \left[1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}(t')}{c^2} \right] \right\} \frac{e^{i \frac{\omega}{c} R \cdot n_{\text{эф}}(\vartheta)}}{R \sqrt{1 - \chi^2 \beta^2 \gamma^2 \sin^2 \vartheta}}, \quad (19)$$

$$\varphi_0(\vec{r}) = \frac{\mu q}{2\pi} \int e^{i\omega t'} dt' \left\{ 1 - \frac{\chi \gamma^2}{1 + \chi} \left[1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}(t')}{c^2} \right] \right\} \frac{e^{i \frac{\omega}{c} R \cdot n_{\text{эф}}(\vartheta)}}{R \sqrt{1 - \chi^2 \beta^2 \gamma^2 \sin^2 \vartheta}},$$

где приняты следующие обозначения:

$$\vec{R}(t') = \vec{r} - \vec{r}_1(t'), \quad R = |\vec{R}|, \quad \beta = \frac{4}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad z = \varepsilon \mu = 1 \quad (20)$$

и

$$n_{\text{эф}}(\vartheta) = \frac{\sqrt{1+z} \cdot \sqrt{1 - z\beta^2\gamma^2 \sin^2 \vartheta} - z\beta^2\gamma^2 \cos \vartheta}{1 - z\beta^2\gamma^2 \sin^2 \vartheta}. \quad (21)$$

В формулах (19) вектор $\vec{r} = \vec{s}_0 r$ дает положение точки наблюдения, положение заряда определяется вектором $\vec{r}_1(t')$. Угол ϑ — это угол между направлениями движения среды $\vec{u}$ и вектора $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_1(t')$; при движении заряда угол ϑ меняется. Для углов ϑ , для которых выполняется неравенство $z\beta^2\gamma^2 \sin^2 \vartheta > 1$, потенциалы тождественно обращаются в нуль. (Это возможно лишь при $\varepsilon \mu \beta^2 > 1$, т. е. если скорость перемещения среды превосходит скорость света в покоящейся среде).

Найден вид потенциалов (19) на достаточно больших расстояниях от области движения заряда, когда

$$r \gg r_1.$$

Разлагая в ряд величину $R(t') = |\vec{r} - \vec{r}_1(t')|$, мы можем привести, например, потенциал $\vec{A}_w(\vec{r})$ к виду

$$\begin{aligned} \vec{A}_w(\vec{r}) = & \frac{iq}{2\pi} \cdot \frac{e}{r \sqrt{1 - z\beta^2\gamma^2 \sin^2 \vartheta_0}} \int \frac{e^{i\omega t' - i\frac{\omega}{c} \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_1(t')}{r^2} n_{\text{эф}}(\vartheta)}}{1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_1(t')}{r^2}} \times \\ & \times \left\{ \frac{\vec{v}(t')}{c} - \frac{z\gamma^2}{1+z} \cdot \left[1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}(t')}{c^2} \right] \cdot \frac{\vec{u}}{c} \right\} dt'. \end{aligned} \quad (24)$$

Мы рассматриваем поле заряда на больших расстояниях от области его движения. В соответствии с этим можно считать, что функция $n_{\text{эф}}(\vartheta)$ под знаком экспоненты, входящая в множитель перед интегралом, зависит от угла ϑ_0 между радиус-вектором точки наблюдения $\vec{r}$ и скоростью среды $\vec{u}$. Все малые поправки, зависящие от времени t' , остаются при этом под знаком интеграла.

Выражение (24), так же как (16), представляет собой сферическую волну. Фаза этой волны равна $\frac{\omega}{c} n_{\text{эф}}(\vartheta_0) \cdot r$, в то время как фаза волны (16), как видно из (17), равна $\frac{\omega}{c} n(\vec{s}') \cdot (\vec{s}' \cdot \vec{r})$. Здесь $\vec{s}'$ определяет направление волнового вектора такой волны, у которой групповая скорость направлена в точку наблюдения $\vec{r}$. Ниже мы покажем,

что фаза волны (24) может быть приведена к тому же виду, что и фаза волны (16).

Запишем выражение для показателя преломления $n(\vartheta)$ электромагнитной волны, волновой вектор которой составляет угол ϑ с направлением скорости среды $\vec{u}$ [2]:

$$n(\vartheta) = \frac{\sqrt{1+z+x\beta^2\gamma^2\sin^2\vartheta}-x\beta^2\gamma^2\cos\vartheta}{1-x\beta^2\gamma^2\cos^2\vartheta}. \quad (25)$$

Как мы видим, в отличие от общего случая показатель преломления n зависит только от угла ϑ и не зависит от азимутального угла φ . Это означает, что поверхность волновых векторов обладает азимутальной симметрией. Волновой пакет в среде с таким показателем преломления может быть записан в виде (11)

$$A_m(\vec{r}) = \int \mathfrak{M}_m(\vartheta, \varphi) e^{i\frac{\omega}{c}r\Phi(\vartheta, \varphi)} \sin\vartheta d\vartheta d\varphi,$$

причем функция Φ определяется выражением (10), куда надо подставить $n(\vartheta)$ в виде формулы (25),

$$\Phi(\vartheta, \varphi) = n(\vartheta) \cdot [\cos\vartheta \cdot \cos\vartheta_0 - \sin\vartheta \cdot \sin\vartheta_0 \cdot \cos(\varphi - \varphi_0)]. \quad (26)$$

Углы ϑ_0, φ_0 определяют направление на точку наблюдения $\vec{r}$; углы ϑ, φ — направление, по которому ведется интегрирование. Точка стационарной фазы φ', ϑ' определяется из условий (13), которые дают для нашего случая

$$\varphi' = \varphi_0, \frac{d}{d\vartheta} [n(\vartheta) \cdot \cos(\vartheta - \vartheta_0)]_{\vartheta=\vartheta'} = 0. \quad (27)$$

Из условий (27) после громоздких вычислений можно получить следующие соотношения между углами ϑ' и ϑ_0 :

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{(1+x\gamma^2) \cdot \operatorname{tg} \vartheta'}{(1+x) - x\beta^2\gamma^2 \sqrt{1+z+(1+x\gamma^2) \operatorname{tg}^2 \vartheta'}}. \quad (28)$$

и ему обратное

$$\operatorname{tg} \vartheta' = \frac{\operatorname{tg} \vartheta_0 \sqrt{1+z} \cdot (1-x\beta^2\gamma^2)}{\sqrt{1+z+x\beta^2\gamma^2} \cdot \sqrt{1+(1-x\beta^2\gamma^2) \operatorname{tg}^2 \vartheta_0}}. \quad (29)$$

В силу соотношений (25) и (27) значение функции Φ (26) в точке стационарной фазы принимает вид

$$\Phi(\vartheta', \varphi') = \frac{\sqrt{1+z+x\beta^2\gamma^2\sin^2\vartheta'}-x\beta^2\gamma^2\cos\vartheta'}{1-x\beta^2\gamma^2\cos^2\vartheta'} \cdot \cos(\vartheta_0 - \vartheta'). \quad (30)$$

Подставляя сюда то значение ϑ' , которое получается из формулы (29), можно после громоздких вычислений убедиться в том, что

$$\Phi(\vartheta', \varphi') = n_{\text{эф}}(\vartheta_0), \quad (31)$$

т. е. выражение (24) действительно описывает поле, обладающее теми же физическими свойствами, что и разобранный в разделе I. Именно, на больших расстояниях от области движения заряженной частицы поле описывается волной вида (24), групповая скорость которой направлена в точку наблюдения (по вектору $\vec{s}_0$). Фазовая же скорость этой волны направлена по вектору $\vec{s}'$, определяющему точку стационарной фазы.

В этом случае, так же как и в разделе I, направление на точку наблюдения совпадает с нормалью к поверхности показателя преломления $n(\vartheta)$ в точке стационарной фазы. Убедиться в этом можно с помощью второго условия (27), определяющего точку перевала,

$$\frac{d}{d\vartheta} [n(\vartheta) \cdot \cos(\vartheta - \vartheta_0)]|_{\vartheta=\vartheta_0} = 0.$$

Проводя дифференцирование, получаем

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{n(\vartheta') \cdot \operatorname{tg} \vartheta' - \frac{dn(\vartheta)}{d\vartheta} \Big|_{\vartheta=\vartheta'}}{n(\vartheta') + \operatorname{tg} \vartheta' \cdot \frac{dn(\vartheta)}{d\vartheta} \Big|_{\vartheta=\vartheta'}}. \quad (32)$$

Как известно [3], как раз такое выражение и определяет нормаль к поверхности $n = n(\vartheta)$ в точке ϑ' .

Представляет интерес вопрос о том, как направлен поток энергии в поле излучения, то есть поток вектора Пойнтинга $\vec{p} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}]$.

Для удобства ограничимся случаем аксиальной симметрии, когда среда и заряд двигаются в одном направлении z . Выберем ось ρ перпендикулярно оси z . Тогда угол ϑ_0 , который составляет вектор $\vec{p}$ с осью z , определяется равенством

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{P_\rho}{P_z} = -\frac{E_z}{E_\rho}. \quad (33)$$

Это отношение амплитуд электрического поля мы можем, с другой стороны, найти из условия поперечности волн $\operatorname{div} \vec{D} = 0$, которое в движущейся среде принимает вид [4]

$$(\vec{k} \vec{E}) + \chi \gamma^2 \left(\frac{\omega}{c} - \frac{\vec{k} \vec{u}}{c} \right) \left(\frac{\vec{u} \vec{E}}{c} \right) = 0. \quad (34)$$

Отсюда сразу следует

$$-\frac{E_z}{E_\rho} = \frac{k_\rho}{k_z(1 - \chi \beta^2 \gamma^2) + \chi \beta \frac{\omega}{c} \gamma^2}. \quad (35)$$

Если мы теперь введем угол ϑ между волновым вектором $\vec{k}$ и осью z , то с помощью дисперсионного уравнения для волны в движущейся среде [3]

$$\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \chi \gamma^2 \left(\frac{\omega}{c} - \frac{\vec{k} \cdot \vec{u}}{c} \right)^2 = 0 \quad (36)$$

можно вычислить отношение E_z/E_ρ и показать, что

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{(1 + \chi \gamma^2) \cdot \operatorname{tg} \vartheta}{(1 + \chi) - \chi \beta \gamma^2 \sqrt{1 + \chi + (1 + \chi \gamma^2) \operatorname{tg}^2 \vartheta}}. \quad (37)$$

Последнее соотношение совпадает с формулой (28), дающей связь угла наблюдения с углом стационарной фазы, если под углом ϑ понимать угол стационарной фазы ϑ' . Отсюда следует, что поток $\vec{P}$ энергии излучения тоже направлен в точку наблюдения.

Мы получили выражение для поля заряда в движущейся среде на далеких расстояниях в том случае, когда он движется в ограниченной области пространства. В этом случае всегда можно отойти от этой области на такое достаточно далекое расстояние, что угол $\vartheta(t') \approx \vartheta_0$ и волна имеет вид (24). Однако, если заряд движется в неограниченной области, как это имеет место при его равномерном и прямолинейном движении (напр., вдоль оси z), то угол $\vartheta(t)$ между осью z и направлением от заряда в точку наблюдения может изменяться в интервале от 0 до π . В этом случае вычисление интегралов (19) нужно проводить более аккуратно даже для поля на достаточно далеких расстояниях.

Для того чтобы посмотреть, как осуществляется переход от поля для заряда, движущегося в ограниченной области, к полю заряда, движущегося равномерно от $t = -\infty$ до $t = +\infty$, рассмотрим потенциалы (19) для заряда, двигавшегося равномерно вдоль оси z от $t = -T$ до $t = +T$, то есть когда

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = q \vec{v} \cdot \rho(\vec{r}, t) = \begin{cases} q \vec{v} \cdot \delta(z - vt) & \text{при } -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{при } t \text{ вне } [-T, T]. \end{cases}$$

Это означает, что в выражениях (19) $R(t') = |\vec{r} - \vec{r}_1(t')| = \sqrt{(z - vt')^2 + \rho^2}$, где ρ — расстояние точки наблюдения от оси z , а z — координата точки наблюдения и $\operatorname{tg} \vartheta(t') = \frac{\rho}{(z - vt')}$. Если мы поставим теперь все эти выражения в формулы (19), то получим, что $\vec{A}_\omega = A_{z\omega} \vec{e}_z$ равно

$$A_{z\omega}(\vec{r}) = \frac{iq}{2\pi} \left\{ \frac{v}{c} - \frac{\chi \gamma^2}{1 + \chi} \cdot \frac{u}{c} \left(1 - \frac{uv}{c^2} \right) \right\} \cdot J(\omega, z, \rho), \quad (38)$$

$$\varphi_{\omega}(\vec{r}) = \frac{\mu q}{2\pi} \cdot \left\{ 1 - \frac{\chi \gamma^2}{1 + \chi} \left(1 - \frac{uv}{c^2} \right) \right\} \cdot J(\omega, z, \rho),$$

где интеграл $J(\omega, z, \rho)$ имеет вид

$$J(\omega, \rho, z) = \int_{-T}^{+T} dt' \cdot e^{i \frac{\omega}{c} \left\{ ct' + \frac{\sqrt{1+\chi} \cdot \sqrt{(1-\chi\beta^2\gamma^2)\rho^2 + (z-vt')^2} - \chi\beta^2\gamma^2(z-vt')}{1-\chi\beta^2\gamma^2} \right\}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\chi\beta^2\gamma^2)\rho^2 + (z-vt')^2}}.$$

Этот интеграл можно вычислить точно. Однако мы оценим его для достаточно больших расстояний

$$z \gg vT \text{ и } [z^2 + \rho^2(1-\chi\beta^2\gamma^2)] \gg 2vT \cdot z.$$

В этом случае мы можем разложить корни в ряд и получить

$$J = \frac{2 \cdot e^{i \frac{\omega r}{c} \cdot n_{\text{эф}}(\vartheta_0)}}{r \cdot \sqrt{1 - \chi\beta^2\gamma^2 \sin^2 \vartheta_0}} \cdot \frac{\sin \left\{ \alpha(\vartheta_0) \frac{\omega T}{c} \right\}}{\alpha(\vartheta_0) \frac{\omega}{c}}, \quad (39)$$

где все величины были определены ранее, а

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad \text{tg } \vartheta_0 = \rho/z. \quad (40)$$

Величина

$$\begin{aligned} \alpha(\vartheta_0) &= 1 - \frac{v}{c(1-\chi\beta^2\gamma^2)} \cdot \left[\frac{\sqrt{1+\chi} \cdot z}{\sqrt{z^2 + (1-\chi\beta^2\gamma^2)\rho^2}} - \chi\beta^2\gamma^2 \right] = \\ &= 1 - \frac{v}{c(1-\chi\beta^2\gamma^2)} \cdot \left[\frac{\sqrt{1+\chi} \cdot \cos \vartheta_0}{\sqrt{1-\chi\beta^2\gamma^2 \sin^2 \vartheta_0}} - \chi\beta^2\gamma^2 \right], \end{aligned} \quad (41)$$

стоящая в последнем множителе, определяет поведение поля равномерно движущегося заряда с возрастанием пройденного пути $l = vT$. При $T \rightarrow \infty$ последний множитель в (39) приобретает характер δ -функции. Это означает, что поле заряда на больших расстояниях будет отличаться от нуля только в том случае, когда

$$\alpha(\vartheta_0) = 1 - \frac{v/c}{1-\chi\beta^2\gamma^2} \cdot \left[\frac{\sqrt{1+\chi} \cdot \cos \vartheta_0}{\sqrt{1-\chi\beta^2\gamma^2 \sin^2 \vartheta_0}} - \chi\beta^2\gamma^2 \right] = 0. \quad (42)$$

Это условие эквивалентно хорошо известному условию излучения Вавилова-Черенкова [2]

$$1 - \frac{v}{c} \cdot n(\vartheta') \cdot \cos \vartheta' = 0 \quad (43)$$

для той волны, волновой вектор которой $\vec{k} = \vec{s} \cdot \frac{\omega}{c} n(\vartheta)$ направлен в точку стационарной фазы $\vartheta = \vartheta'$. Для того, чтобы показать это, достаточно в выражении (42) заменить угол ϑ_0 через угол ϑ' с помощью соотношения (28) и воспользоваться формулой (25) для показателя преломления $n(\vartheta)$ волны, распространяющейся в среде под углом $\vartheta = \vartheta'$.

Таким образом, мы видим, что потенциалы равномерно движущегося заряда в движущейся изотропной среде опять пропорциональны

экспоненте $\frac{1}{r} e^{i \frac{\omega}{c} \Phi(\vartheta') r}$ вида (16). Однако амплитуда этих потенциалов

зависит от выполнения определенных фазовых условий между волной и зарядом, т. е. от выполнения условия (43) излучения Вавилова-Черенкова в движущейся среде $\frac{c}{n(\vartheta')} \cdot \cos \vartheta' = v$. Во всех этих выражениях, как мы видим, основной вклад дает окрестность точки стационарной фазы $\vartheta = \vartheta'$, $\varphi = \varphi_0 = \varphi'$, направление на которую отличается от направления наблюдения $\vartheta = \vartheta_0$, $\varphi = \varphi_0$.

В рассмотренных примерах излучения в движущейся среде в точку наблюдения направлен поток энергии, который вычисляется по формуле $\vec{P} = \vec{P}_M = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}]$, вытекающей из выражения для тензора энергии-импульса Минковского. Туда же направлена групповая скорость. Если бы для потока энергии в движущейся среде была справедлива

формула Абрагама $\vec{P}_A = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}] + \frac{c}{4\pi} \cdot ([\vec{E}, \vec{H}] - [\vec{D}, \vec{B}]) \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \frac{\vec{u}}{u}$, то он бы не был направлен в точку наблюдения. Поэтому можно считать, что в безграничной среде следует пользоваться тензором энергии-импульса Минковского (так как задание одной компоненты тензора устраняет неоднозначность, даваемую вариационным принципом).

3. В качестве еще одного примера рассмотрим поле переходного излучения зараженной частицы, пересекающей границу изотропной среды и одноосного кристалла. Оптическая ось кристалла предполагается перпендикулярной к границе раздела.

Пусть имеется одноосный кристалл с тензорной диэлектрической проницаемостью вида

$$\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad \mu_{ik} = \mu \delta_{ik}. \quad (44)$$

Как известно [5], в такой среде могут распространяться обыкновенные и необыкновенные волны с k показателями преломления соответственно

$$n_o = \sqrt{\varepsilon \mu}, \quad n_e = \sqrt{\frac{\varepsilon_3 \mu}{\sin^2 \vartheta + \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon} \cos^2 \vartheta}}, \quad (45)$$

где ϑ есть угол между волновым вектором $\vec{k} = \vec{s} \cdot k$ и осью z .

Прежде чем переходить к рассмотрению полей излучения получим некоторые соотношения, связывающие направления фазовой скорости $\vec{v}_{\text{фаз.}} = \frac{\omega}{k} \cdot \vec{s}$ с направлением потока энергии $\vec{P} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}]$ в

одноосном кристалле. Как известно, направление потока энергии в среде совпадает с направлением групповой скорости $\vec{v}_{гр} = \frac{d\omega}{dk}$, или,

как говорят, с направлением луча [6].

Поэтому полученные ниже формулы для одноосного кристалла аналогичны формулам (28) (или (37)) для случая движущейся среды или общим формулам (32) для случая произвольной зависимости $n(\vartheta)$.

Для простоты рассмотрим плоские монохроматические волны с магнитным полем $\vec{H}$, перпендикулярным оси z , т. е.

$$\vec{E}(r, t) = (E_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + E_z \cdot \vec{e}_z) \cdot e^{i k r - i \omega t}; \quad \vec{H} = H_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \cdot e^{i k r - i \omega t},$$

где $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ — единичные векторы цилиндрической системы координат. В этом случае угол ϑ_0 , который характеризует направление распространения энергии в кристалле, определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{P_\varphi}{P_z} = -\frac{E_z}{E_\varphi}. \quad (46)$$

Если воспользоваться условием поперечности $\operatorname{div} \vec{D} = \vec{k} \vec{D} = 0$, которое в нашем случае принимает вид

$$\varepsilon_\varphi E_\varphi + \varepsilon_z k_z E_z = 0, \quad (47)$$

то можно получить

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_z} \cdot \frac{k_\varphi}{k_z} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_z} \cdot \operatorname{tg} \vartheta, \quad (48)$$

где угол ϑ определяет направление волнового вектора $\vec{k}$, т. е. $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{k_\varphi}{k_z}$. Таким образом, для плоских монохроматических волн в кристалле направление групповой и фазовой скорости не совпадают между собой.

Рассмотрим теперь, какой вид имеют поля переходного излучения зараженной частицы в одноосном кристалле. Мы покажем, что поля на далеких расстояниях от источника имеют вид сферической волны (16), в которой в фазу экспоненциального выражения входит величина показателя преломления не в направлении наблюдения, характеризуемым углом ϑ_0 , а в направлении $\vartheta = \vartheta'$, угловые координаты которого удовлетворяют соотношению (48).

Итак, пусть заряженная частица движется по оси z и пересекает границу раздела между изотропной средой с постоянными ε_1, μ_1 и одноосным кристаллом с тензорами ε_{ik} и μ_{ik} вида (44). Плоскость границы раздела расположена при $z=0$, а ось z перпендикулярна этой плоскости.

Электрический вектор $\vec{E}(r, t)$ собственного поля, переносимого этим зарядом, как известно [7], имеет вид

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \frac{iq}{2\pi^2} \int \frac{1}{\varepsilon_1} \cdot \frac{\frac{\omega}{c^2} \vec{v} \cdot \varepsilon_1 \vec{u}_1 - \vec{k}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 u_1} \cdot e^{i \vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{v} t)} d\vec{k} \quad (52)$$

в изотропной среде при $z < 0$ и

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = \frac{iq}{2\pi^2} \int \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\frac{\omega}{c^2} \varepsilon \vec{u} - \vec{k}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon u^2} \cdot e^{i \vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{v} t)} d\vec{k} \quad (53)$$

в кристалле при $z > 0$.

Здесь введена цилиндрическая система координат в $\vec{k}$ - и $\vec{r}$ -пространстве так, что вектор $\vec{k}$ имеет компоненты $(z, k_z = \frac{\omega}{v})$, а вектор $\vec{r} = \{\rho, z\}$; $d\vec{k} = \rho d\rho d\varphi \frac{d\omega}{v}$.

Напомним еще раз, что заряд, движущийся по оси одноосного кристалла, возбуждает только необыкновенные волны.

При пересечении зарядом границы раздела кроме этих полей появляются дополнительные поля переходного излучения. В изотропной среде при $z < 0$ мы обозначим это поле через $\vec{E}'_1(\vec{r}, t)$, а внутри кристалла при $z > 0$ — через $\vec{E}'_2(\vec{r}, t)$. Мы можем записать эти поля в виде [6]

$$\vec{E}'_{1,2}(\vec{r}, t) = \int \vec{E}'_{1,2}(\vec{k}) \cdot e^{i(\vec{z} \cdot \vec{\rho} + \lambda_{1,2} z - \omega t)} d\vec{k}, \quad (54)$$

где

$$\lambda_1 = -\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 u_1 - x^2} \quad \text{и} \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_3} \cdot \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_3 u^2 - x^2 \right)}, \quad (55)$$

а $\vec{E}'_{1,2}(\vec{k})$ — пока неизвестные амплитуды.

Нас будет интересовать в дальнейшем лишь то поле переходного излучения, которое уходит в кристалл, ибо только на этом поле будут сказываться все специфические особенности анизотропной среды. Неизвестную амплитуду $\vec{E}'_{2z}(\vec{k})$ этого поля нетрудно определить из условий сшивания полных полей на границе раздела. Фурье-компонента этого поля равна

$$E'_{2z}(\vec{k}) = \frac{iq}{2\pi^2} \cdot \Phi\left(x, k_z = \frac{\omega}{v}\right), \quad \text{где} \quad \Phi(x, \omega) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_3} \cdot \frac{x^2}{\varepsilon_1 \lambda_2 - \varepsilon_2 \lambda_1}.$$

$$\left[\frac{\left(\frac{v_1}{\omega} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right) \frac{\varepsilon}{\varepsilon_3}}{\frac{\omega^2}{v^2} - \lambda_2^2} + \frac{1 - \frac{v_1}{\omega}}{\frac{\omega^2}{v^2} - \lambda_1^2} \right]. \quad (55)$$

Если ввести теперь расстояние R от начала координат, помещенного в точку пересечения зарядом границы раздела, до точки наблюдения, то координаты ρ и z в (54) можно записать в виде $\rho = R \cdot \sin \vartheta_0$, $z = R \cdot \cos \vartheta_0$, где ϑ_0 — угол, составляемый направлением наблюдения, т. е. направлением луча, с осью z .

Подставляя эти выражения в формулу (54) для $\vec{E}_2(\vec{r}, t)$, интегрируя по азимутальному углу φ и считая, что величины χ_1 и $\lambda_2 z$ много больше единицы, получим выражение для Фурье-компоненты частоты ω поля переходного излучения в кристалле на больших расстояниях

$$E_{2z}(\omega, R) = \frac{iq}{\pi v} \int \frac{\sqrt{z} \cdot \Phi(z, \omega)}{\sqrt{2\pi \sin \vartheta_0 R}} \cdot e^{i(z \sin \vartheta_0 + \lambda_2 \cos \vartheta_0) R - i \frac{\pi}{4}} dz. \quad (57)$$

Поскольку мы рассматриваем поле на больших расстояниях от источника (который помещен в начало координат), то экспонента в подынтегральном выражении будет быстро осциллировать и мы опять можем вычислить этот интеграл по z методом стационарной фазы. Можно показать, что точкой стационарной фазы в данном случае является точка

$$z' = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_3 \mu} \cdot \frac{\sin \vartheta_0}{\sqrt{\sin^2 \vartheta_0 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_3} \cos^2 \vartheta_0}}$$

и при этом

$$i_2' = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_3 \mu} \cdot \frac{\cos \vartheta_0}{\sqrt{\sin^2 \vartheta_0 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_3} \cos^2 \vartheta_0}} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_3}.$$

Тогда формула (57) дает следующее выражение для Фурье-компоненты $E_{2z}(\omega, R)$ поля переходного излучения в кристалле на больших расстояниях от источника:

$$E_{2z}(\omega, R) = \frac{q}{\pi v} \sin^2 \vartheta_0 \cdot \cos \vartheta_0 \cdot \xi(\vartheta_0) \cdot \frac{e^{i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_3 \mu} \cdot \alpha(\vartheta_0) R}}{R}, \quad (58)$$

где

$$\alpha(\vartheta_0) = \sqrt{\sin^2 \vartheta_0 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_3} \cos^2 \vartheta_0}; \quad \gamma_1(\vartheta_0) = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 \cdot \alpha^2(\vartheta_0) - \varepsilon_3 \mu \sin^2 \vartheta_0}$$

и

$$\xi(\vartheta_0) = \frac{\varepsilon_1 \mu_1^2 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_3}} \cdot \frac{1}{\alpha^2(\vartheta_0)}}{\varepsilon_1 \varepsilon \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_3}} \cdot \cos \vartheta_0 + \varepsilon_3 \cdot \gamma_1(\vartheta_0)} \cdot \left[\frac{\varepsilon \beta \cdot \gamma_1(\vartheta_0) - \varepsilon_1 \alpha(\vartheta_0)}{\alpha^2(\vartheta_0) - \beta^2 \cdot \varepsilon \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_3}} \cos^2 \vartheta_0} + \right]$$

$$\left. + \frac{\varepsilon_3}{\alpha(\vartheta_0) - \beta \cdot \gamma(\vartheta_0)} \right\},$$

$$\beta = \frac{v}{c}.$$

Из выражения (58) видно, что поле переходного излучения в кристалле опять представляет из себя сферическую волну типа (16), фаза которой равна $\Phi_0 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu \varepsilon_3} \cdot \alpha(\vartheta_0) R$.

Величина $\sqrt{\mu \varepsilon_3} \cdot \alpha(\vartheta_0)$, как и в предыдущих случаях, не совпадает с величиной показателя преломления необыкновенной волны $n_e(\vartheta_0)$ (45) в направлении наблюдения ϑ_0 . Однако, если воспользоваться соотношением (45), связывающим между собой направление фазовой скорости $\vartheta = \vartheta'$ в точку стационарной фазы и направление групповой скорости $\vartheta = \vartheta_0$ в одноосном кристалле, то можно показать, что фаза сферической волны (58) имеет вид

$$\Phi = \frac{\omega}{c} \cdot \alpha(\vartheta_0) \sqrt{\mu \varepsilon_3} \cdot R = \frac{\omega}{c} \cdot n_e(\vartheta') \cdot \cos(\vartheta_0 - \vartheta') = \frac{\omega}{c} n_e(\vartheta') \cdot (\vec{s}' \cdot \vec{R}), \quad (59)$$

где

$$\vec{s}' = \frac{\vec{k}'}{k'}, \text{ а } \operatorname{tg} \vartheta' = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon} \operatorname{tg} \vartheta_0.$$

ФИАН СССР и Ереванский
физический институт

Поступила 12.V.1969

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. С. Н. Столяров, Изв. ВУЭ-ов, Радиофизика, 6, 1268 (1963).
2. Б. М. Болотовский, А. А. Рухадзе, ЖЭТФ, 37, 1346 (1959).
3. С. П. Фиников, Дифференциальная геометрия, Учпедгиз, 1939.
4. С. Н. Столяров, ЖТФ, 33, 565 (1963).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИТТЛ, М., 1957.
6. Г. М. Гарибян, ЖЭТФ, 33, 1403 (1957).
7. В. Е. Пафомов, Труды ФИАН, т. 16, 94, 1961.

ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐՈՒՄ ՀԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ԴԱՇՏԻ ՈՐՈՇ
ԱՌԱՆՁՆԱՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ ԱՂԲՅՈՒՐԻՅ ՄԵՆ
ՀՆՈՒԱՎՈՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Բ. Մ. ԲՈՂՈՏՈՎՍԿԻ, Հ. Ս. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ, Ս. Ն. ՍՈՈՂԱՐԴՂ

Յույց է արված, որ աղբյուրից մեծ հեռավորությունների դեպքում ալիքային դաշտի մեջ ներգրավված են կատարում այն ճառագայթվող ալիքները, որոնց խմբային արագությունը ուղղված է աղբյուրից դեպի դիտման կետը: Ընդ որում, ճառագայթված ալիքների ֆազային արագու-

բյունը դեպի դիտման կետը չի ուղղված: Որպես օրինակ դիտարկվել է աղբյուրի ճառագայթման դաշտը շարժվող միջավայրում և միառանցք բյուրեղում: Շարժվող միջավայրերում կատարվող ճառագայթումներին վերաբերող արդյունքները խոսում են էներգիայի հոսքի այն արտահայտության օգտին, որը բխում է Մինկովսկու էներգիայի—իմպուլսի տենզորից:

CERTAIN FEATURES OF THE RADIATION FIELD IN AN ANISOTROPIC MEDIA AT A LONG DISTANCE FROM THE SOURCE

B. M. BOLOTOVSKY, O. S. MERGELIAN, S. N. STOLIAROV

It is shown that the only radiated waves, having a group velocity which is directed away from the source to the point of observation, makes a contribution to the wave field. At the same time the phase velocity of the radiated waves is not directed to the point of observation. The radiated field of the source in a moving medium and in a single axis crystal is considered as an example. The data on the radiation in the moving media are in agreement with the expression for the flow of energy which follows from the Minkovsky tensor of energy and momentum.