

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ДИФфуЗИОННОМ
СЛОЕ ПЛАЗМЫ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В. А. ВАРДАНЯН, Р. С. ОГАНЕСЯН

Рассматривается вопрос устойчивости амбиполярно-диффузионного слоя плазмы по отношению к малым колебаниям в присутствии сильного магнитного поля. Установлено, что аномальный поперечный эффект диффузии при этом не наблюдается. Для колебаний, происходящих вдоль и поперек магнитного поля, задача (в рамках линейного приближения) решается точно.

Как известно [1, 2], поперечный диффузионный поток в положении столба плазмы, начиная с некоторого критического значения магнитного поля, аномально возрастает. Это связывается с характерной неустойчивостью плазменного шнура [3, 4].

В настоящей статье исследуется возможность проявления аномальной диффузии поперек магнитного поля в плоском слое плазмы. Предполагается, что плазменный слой, образовавшийся амбиполярной диффузией электронов и положительных ионов, находится в сильном магнитном поле.

Исходными для решения задачи могут служить следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{\mp} + D_{\mp} \nabla n_{\pm} \pm \mu_{\mp} n_{\pm} E \pm \mu_{\mp} (\Gamma_{\mp} \times B) &= 0, \\ \frac{\partial n_{\mp}}{\partial t} &= -\nabla \Gamma_{\pm} + n_{\mp} \xi, \quad (\xi = \nu_i - \nu_a) \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где $\Gamma_{\mp} = n_{\mp} v_{\mp}$, $\mu_{\mp}$ и $D_{\mp}$ представляют потоки подвижности и коэффициенты диффузии отрицательных и положительных частиц соответственно, а ν_i и ν_a — средние скорости ионизации и прилипания в единице объема на один электрон, E — электрическое, B — магнитное поле, n_{-} и n_{+} — числа отрицательных и положительных ионов в единице объема. Здесь все коэффициенты считаются не зависящими от координат.

В предположении квазинейтральности плазменного слоя ($n_{-} \approx n_{+}$) из системы уравнений (1) получаем

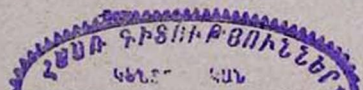
$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= n \cdot \xi + D_{\mp} \Delta^2 n \pm \mu_{\mp} \nabla (n E) + \mu'_{\mp} \mu_{\mp} \nabla (n B \times E) + \\ &+ \mu_{\mp}^2 B \cdot \nabla (D'_{\mp} B \cdot \nabla n \mp \mu'_{\mp} n B \cdot E), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$D'_{\mp} = (1 + \mu_{\mp}^2 B^2)^{-1} D_{\mp}, \quad \mu'_{\mp} = (1 + \mu_{\mp}^2 B^2)^{-1} \mu_{\mp} \quad (3)$$

коэффициенты диффузии и подвижности заряженных частиц в магнитном поле.

Положим теперь, что магнитное и электрическое поля параллельны плоскости симметрии xy и направлены по оси z . Исходя из сим-



метрии задачи, можно предполагать также, что градиент плотности отличен от нуля только по направлению x , перпендикулярному к плоскости симметрии $zoу$. Тогда из (2) получаем уравнение стационарной диффузии

$$D_{\mp} \nabla^2 n \pm \mu_{\mp} \nabla (nE) + n\dot{\xi} = 0. \quad (4)$$

Учитывая далее граничные условия

$$n = n_0 \text{ на плоскости симметрии } (x=0),$$

$$n = 0 \text{ на поверхности слоя } (x=h),$$

получаем из уравнений (4) стационарное распределение плотности и созданное им электрическое поле

$$n = n_0 \cos \beta_0 x, \quad \beta_0^2 = \xi/D_a = \pi^2/4h^2. \quad (5)$$

$$E_{0x} = - \frac{D'_+ - D'_-}{\mu_+ + \mu_-} \cdot \frac{\nabla n}{n} = \frac{a}{n} \frac{dn}{dx}. \quad (6)$$

Здесь h — полуширина слоя, а

$$D_a = \frac{D'_+ + \mu'_- + D'_- \mu'_+}{\mu_+ + \mu_-} \quad (7)$$

— коэффициент амбиполярной диффузии в присутствии магнитного поля.

С целью исследования устойчивости стационарного распределения по отношению к малым отклонениям представим плотности и поля в виде

$$n = n_0 + \delta n, \quad E = E_0 + \delta E, \quad B = B_0 + \delta B.$$

Пренебрегая δB по сравнению с сильным полем B_0 [4] линеаризуя уравнение (2) относительно малых добавок δn и δE , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta n}{\partial t} = & \xi \cdot \delta n + D'_{\mp} \nabla^2 \delta n \pm \mu'_{\mp} \nabla (n_0 \delta E + E_0 \delta n) + \\ & + \mu'_+ \mu'_{\mp} \nabla \cdot [B_0 \times (E_0 \delta n + n_0 \delta E)] + \\ & + \mu'^2_{\mp} B_0 \cdot \nabla [D'_{\mp} B_0 \nabla \delta n \pm \mu'_{\mp} B_0 \cdot (E_0 \delta n + n_0 \delta E)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Представим возмущения δn и δE в виде

$$\delta n = f(x) \exp \hat{r} (\omega f + k_1 z + k_2 y),$$

$$\delta E = - \nabla l g(x) \exp \hat{r} (\omega + k_1 z + k_2 y). \quad (9)$$

Подстановкой последних выражений в (8), после некоторых преобразований, находим

$$\begin{aligned} D'_{\pm} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \mp \mu'_{\mp} \frac{\partial}{\partial x} (f E_{0x}) + \{ \xi - \hat{r} \omega - D'_{\mp} k_1^2 - D'_{\mp} k_2^2 \pm \\ \mp \hat{r} k_1 \mu'_{\mp} E_{0z} + \hat{r} k_2 \mu'_{\mp} \mu'_{\mp} B_0 E_{0x} \} f(x) = \pm \mu'_{\mp} n_0 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \mp \mu'_{\pm} \frac{n_0}{a} E_{0x} \frac{\partial g}{\partial x} \pm \\ \pm n_0 \left\{ \mu'_{\pm} k_1^2 + k'_{\mp} k_2^2 - \mu'_{\mp} \mu'_{\mp} \frac{E_{0x}}{a} \hat{r} k_2 B_0 \right\} g(x). \end{aligned} \quad (10)$$

Введением новой функции

$$l(x) = n_0 g(x) + \alpha f(x)$$

можно из левой части уравнения (1) исключить первую производную по x .

$$\begin{aligned} (D_{\pm}^{\prime} \mp \alpha \mu_{\pm}^{\prime}) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left\{ \xi - r \omega - (D_{\pm} \mp \mu_{\pm} \alpha) k_1^2 - (D_{\pm}^{\prime} \mp \mu_{\pm}^{\prime} \alpha) k_2^2 \mp \right. \\ \left. \mp r \mu_{\pm}^{\prime} k_1 E_{0z} \right\} f(x) = \mp \mu_{\pm}^{\prime} \frac{\partial^2 l}{\partial x^2} \pm \mu_{\pm}^{\prime} \frac{\partial}{\partial x} \left(l \frac{E_{0x}}{\alpha} \right) \mp \\ \mp \left\{ \mu_{\pm} k_1^2 + \mu_{\pm}^{\prime} k_2^2 - \mu_{\pm}^{\prime} \mu_{\pm} \frac{r k_2}{\alpha} E_{0x} B_0 \right\} l(x). \end{aligned} \quad (11)$$

Поскольку функции $f(x)$ и $l(x)$ определены в интервале $(0, h)$, то их можно представить в виде рядов Фурье:

$$\begin{aligned} f(x) = \sum F_j \sin \frac{j\pi}{h} x; \quad F_j = \frac{2}{h} \int_0^h f(x) \sin \frac{j\pi}{h} x dx, \\ l(x) = \sum L_j \sin \frac{j\pi}{h} x; \quad L_j = \frac{2}{h} \int_0^h l(x) \sin \frac{j\pi}{h} x dx. \end{aligned}$$

Подстановка Фурье-образов функций $f(x)$ и $l(x)$ в уравнения (10) приводит их к виду

$$\alpha_{\pm} F_l = \pm \{ b_{\pm} L_l + \mu_{\pm}^{\prime} \sum L_j (D_{lj} \mp r k_2 \mu_{\pm} B_0 S_{lj}) \}. \quad (12)$$

Здесь

$$\alpha_{\pm} = \xi - r \omega - (D_{\pm} \pm \alpha \mu_{\pm}) k_1^2 - (D_{\pm}^{\prime} \pm \alpha \mu_{\pm}^{\prime}) k_2^2 \pm r k_1 E_{0z}. \quad (13)$$

$$b_{\pm} = \mu_{\pm} k_1^2 + \mu_{\pm}^{\prime} k_2^2; \quad \beta_l^2 = \frac{j^2 \pi^2}{h^2} + k_2^2, \quad (14)$$

$$D_{lj} = \frac{2^2}{h^2} \int_0^h \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E_{0x}}{\alpha} \sin \frac{j\pi}{h} x \right) \sin \frac{l\pi}{h} x dx, \quad (15)$$

$$S_{lj} = \frac{2}{h} \int_0^h \frac{E_{0x}}{\alpha} \sin \frac{l\pi}{h} x \sin \frac{j\pi}{h} x dx. \quad (16)$$

Исключив из уравнений (12) F_l , мы получаем алгебраическое уравнение относительно амплитуд Фурье-разложения функции $l(x)$, т. е.

$$A_l L_l + \sum_{j=1}^{\infty} E_{lj} L_j = 0, \quad (17)$$

где введены обозначения

$$E_{lj} = (\mu_{+}^{\prime} \alpha_{-} + \mu_{-}^{\prime} \alpha_{+}) D_{lj} + r k_2 B_0 (\mu_{-}^{\prime} \mu_{+} \alpha_{+} - \mu_{+}^{\prime} \mu_{-} \alpha_{-}) S_{lj}, \quad (18)$$

$$A_l = a_+ b_- + a_- b_+.$$

Решая систему бесконечных алгебраических уравнений (17), мы восстановим Фурье-образы функций $f(x)$ и $l(x)$. Однако дисперсионное уравнение, определяющее характер колебаний диффузионного слоя заряженных частиц, можно найти, приравняв нулю определитель, составленный из коэффициентов уравнения (17):

$$\begin{vmatrix} A_1 + E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1j}, \dots \\ E_{21}, A_2 + E_{22}, \dots, E_{2j}, \dots \\ \vdots & \vdots \\ E_{j1}, \dots, A_j + E_{jj}, \dots \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0. \quad (19)$$

В двух частных случаях уравнение (19) допускает точные решения. 1. $k_1 \neq 0$, $k_2 = 0$, т. е. колебания совершаются вдоль магнитного поля. Проводя вычисления интегралов типа (15) при различных i, j и учитывая (18), определитель (19) приводится к виду

$$\begin{vmatrix} A_1 + E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1j}, \dots \\ 0, A_2 + E_{22}, \dots, E_{2j}, \dots \\ \vdots & \vdots \\ 0, \dots, 0, A_j + E_{jj}, \dots \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0,$$

откуда получаем, что

$$\prod_{j=1}^{\infty} (A_j + E_{jj}) = 0. \quad (20)$$

Это значит, что

$$A_j + E_{jj} = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (21)$$

Представляя $\hat{r}\omega$ в виде $\omega_j + \hat{r}\omega_j''$ и решая уравнение (21) относительно ω_j и ω_j'' , получаем

$$\omega_j = \frac{D_a \left\{ AC k_1^4 h^4 + \left[ABG_j - C \left(D_{jj} h^2 + \frac{\pi^2}{4} \right) \right] k_1^2 h^2 + \pi^2 \left(j^2 - \frac{1}{4} \right) AG_j \right\}}{A (AG_j + C k_1^2 h^2)}, \quad (22)$$

$$\omega_j'' = \frac{\mu_+ \mu_- (\mu_- - \mu_+) G_j E_0 B_0^2 k_1}{AG_j + C k_1^2 h^2}, \quad (23)$$

где введены обозначения $G_j = D_{jj} h^2 + \pi^2 j^2$,

$$A = 1 + \mu_- \mu_- B_0^2, B = 2 + (\mu_-^2 + \mu_+^2) B_0^2, C = (1 + \mu_-^2 B_0^2)(1 + \mu_+^2 B_0^2).$$

Поскольку $A > 1$, $B > 0$, $C > 0$ и $j \geq 1$, $AB > C$, то ω_j' всегда меньше нуля. Следовательно, все гармоники со временем затухают. Однако, согласно (22) и (23), скорость затухания ω_j' и частота колебаний ω_j зависят не только от волнового числа k_1 и номера гармоники разложения малого возмущения j , но и от магнитного поля B_0 . Причем, с увеличением k_1 и j скорость затухания возмущения увеличивается и, наоборот, она уменьшается с ростом магнитного поля, стремясь к предельному значению

$$\omega_j' = -D_a k_1^2. \quad (24)$$

2. — $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$, т. е. колебания совершаются перпендикулярно к направлению магнитного поля. При этом E_{ij} можно привести к виду

$$E_{ij} = A_i E'_{ij}, \quad A_i = \xi - r\omega - D_a' \beta_i^2,$$

где

$$E'_{ij} = \frac{h^2 (i^2 \pi^2 + k_2^2 h^2)^{-1}}{\mu_- + \mu_+} \left(D_{ij} + r k_2 B_0 S_{ij} \frac{\mu_- - \mu_- \mu_+ + \mu_+}{\mu_- + \mu_+} \right),$$

и, следовательно, определитель (19) примет вид

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i \times \begin{vmatrix} 1 + E'_{11}, & \dots & E'_{1j} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \\ E'_{ij}, & \dots & 1 + E'_{jj} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \end{vmatrix} = 0 \quad (25)$$

Определитель, фигурирующий в (25), не зависит от искомой частоты и поэтому может оказаться, вообще говоря, отличным от нуля. Дисперсионное уравнение определяется из условия

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i = \prod_{i=1}^{\infty} (\xi - r\omega - D_a' \beta_i^2) = 0, \quad (26)$$

откуда получим

$$r\omega = \xi - D_a' \left(\frac{i^2 \pi^2}{h^2} + k_2^2 \right). \quad (27)$$

Подставляя значение ξ из (5), находим

$$r\omega = - \left[\left(i^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{\pi^2}{h^2} + k_2^2 \right] D_a'. \quad (28)$$

Таким образом, $r\omega$ оказывается всегда отрицательной вещественной величиной и, следовательно, колебания затухают аperiодически. Зависимость скорости затухания колебаний от магнитного поля в явном виде согласно (28), (3) и (7) выражается формулой

$$r\omega = - \left[\left(i^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{\pi^2}{h^2} + k_2^2 \right] \cdot \frac{D_a}{1 + \mu_- \mu_+ B_0^2}. \quad (29)$$

Отсюда непосредственно следует, что с ростом магнитного поля скорость затухания, монотонно убывая, стремится к нулю.

Важно отметить, что [затухание возмущений вдоль магнитного поля даже при $B_0 \rightarrow \infty$ происходит с конечной скоростью и через время релаксации $\tau = 1/D_0 k^2$ почти восстанавливается прежнее равновесное распределение.

В общем случае ($k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$) точное решение уравнения (19) невозможно. В первом приближении ($1 + E_{11} = 0$) хотя получается устойчивое решение, однако для окончательного выяснения вопроса устойчивости необходимо найти дисперсионное уравнение в более высоком приближении и доказать сходимость.

Решение общего случая проводится нами методом приближенного вычисления, результаты которого намечается представить к опубликованию отдельно.

Ереванский государственный университет,

Кафедра физики Ереванского
мединститута

Поступила 29.I.1969

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. Ленерт. Труды Второй Международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Избранные доклады иностранных ученых. Физика плазмы и термоядерные реакции. М., Гостехиздат, 1958, 1, 648.
2. F. C. Hoh, B. Lehnert, Phys. Fluids, 1, 230 (1960).
3. B. B. Kadomtsev, A. U. Nedospasov, J. Nucl. Energy, 3, 600 (1960).
4. R. R. Johnson, D. A. Herde, Phys. Fluids, 5, 983 (1962).

ՓՈՔՐ ՏՍՏԱՆՈՒՄՆԵՐ ՊԼԱԶՄԱՅԻ ԴԻՖԴՈՒԶԻՈՆ ՇԵՐՏՈՒՄ ՈՒԺԵՂ ՄԱԳՆԵՏԱԿԱՆ ԴԱՇՏԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ

Վ. Հ. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ, Ռ. Շ. ՀՈՎՀԱՆԻՍՅԱՆ

Քննարկված է էլեկտրոնների և դրական իոնների համատեղ (ամբիպոլյար) դիֆուզիայի հետևանքով առաջացած պլազմային շերտում անոմալ դիֆուզիոն հոսանքների հնարավորությունը մագնիսական դաշտի առկայության դեպքում:

Խնդիրը լուծված է փոքր տատանումների մեթոդով:

Քննարկվող սխեմայի սիմետրիայից օգտվելով երկու մասնավոր դեպքերի համար խնդիրը լուծված է ճշգրիտ, այսինքն մագնիսական դաշտին ուղղահայաց և նրան զուգահեռ տատանումների դեպքերում դրված է դիսպերսիոն հավասարման անալիտիկ տեսքը:

Ցույց է տրված, որ քննարկվող դեպքերում սխեմայում անոմալ դիֆուզիոն հոսանքներ չպետք է նկատվեն:

SMALL OSCILLATIONS IN AN DIFFUSION LAYER OF THE PLASMA IN THE PRESENCE OF A MAGNETIC FIELD

V. H. VARDANIAN, R. S. HOVHANISIAN

The problem of stability of an ambipolar diffusion plasma layer with regard to small oscillations in the presence of a strong magnetic field is considered.

No anomalous transversal effect of diffusion is observed in the case. For oscillations along and across the magnetic field the problem is solved accurately (linear approximation).