Изв. АН Армянской ССР, Физика, 3, 342—347 (1968)

УСТРОЙСТВО ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ЧАСТОТ БЕТАТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ В СИНХРОТРОНЕ С ЖЕСТКОЙ ФОКУСИРОВКОЙ

С. К. ЕСИН

В работе содержится расчет устройства для измерения частот бетатронных колебаний с помощью резонансной раскачки. Расчет доведен до численных значений, соответствующих параметрам Ереванского синхротрона ЭКУ на энергию 6 *Гэв*. Точность измерения не хуже $\mp 0{,}2\%$.

Резонансный способ измерения частот бетатронных колебаний описан в работах [1—4], где для возбуждения резонанса использовалось электрическое поле высокой частоты, создаваемое между пластинами специального конденсатора. Рассмотрим аналогичное устройство с магнитным высокочастотным полем в применении к Ереванскому синхротрону.

Рассматриваемое устройство для измерения частот вертикальных и горизонтальных бетатронных колебаний состоит из четырех проводников, соединенных, соответственно, таким образом, чтобы возникала радиальная или вертикальная компонента магнитного поля. Проводники располагаются в одном из прямолинейных промежутков. Расположение проводников относительно поперечника вакуумной камеры (рис. 1) соответствует вершинам квадрата, сторона которого равна 6 *см*. Центр квадрата совмещен с центром вакуумной камеры.

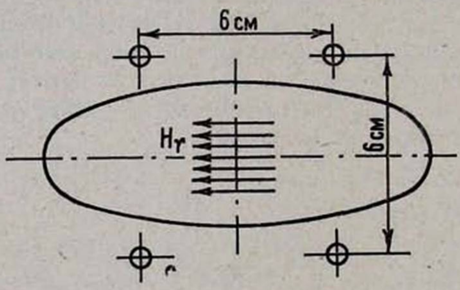

Рис. 1.

Система проводников, включенная таким образом, должна запитываться синусоидальным током с частотою f, которую можно регулировать.

Уравнение бетатронных колебаний, например, вертикальных, при наличии поля, создаваемого такой системой, имеет вид

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + \left(\frac{l}{2\pi\rho}\right)^2 n(\theta)\, z = \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{H_r(\theta)}{H_0} \sin \frac{f}{Mf_0}\, \theta, \tag{1}$$

где $H_r(\theta)$ — поле, создаваемое системой проводников на орбите,

f — частота этого поля,

$f_0 = 1{,}32 \cdot 10^6$ *гц* — частота обращения частицы.

Решением этого уравнения является

$$z = CF + C^* F^*, \tag{2}$$

$$z' = CF' + C^* F^{*\prime}, \tag{3}$$

где C и C^* — коэффициенты, зависящие от θ. Эта зависимость должна быть выбрана так, чтобы удовлетворялось указанное выше уравнение (1) с правой частью.

Чтобы (3) следовало из (2) необходимо выполнение условия

$$C'F + C^{*\prime} F^* = 0. \tag{4}$$

Если продифференцировать (3) вторично и учесть, что функции Флоке являются частными решениями уравнения (1) без правой части, то получим

$$C'F' + C^{*\prime} F^{*\prime} = \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{H_r(\theta)}{H_0} \sin \frac{f}{Mf_0} \theta. \tag{5}$$

Решая совместно (4) и (5), найдем C':

$$C' = -\frac{\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{\rho} \cdot \frac{H_r(\theta)}{H_0} \cdot F^* \cdot \sin \frac{f}{Mf_0} \theta}{F \cdot F^{*\prime} - F^* F'}, \tag{6}$$

причем, из условия нормировки $FF^{*\prime} - F^* F' = -2i$.

Выделим из функции Флоке периодическую часть f:

$$F^* = f^*(\theta)\, e^{-i\nu\theta}. \tag{7}$$

Разложим в ряд следующее выражение:

$$\frac{f^* \cdot H_r(\theta)}{H_0 \rho} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{i \frac{k}{M} \theta}. \tag{8}$$

Тогда выражение для C' запишется

$$C' = \frac{\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2}{2i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k}{2i} \left[e^{i\left(\frac{k}{M} - \nu + \frac{f}{Mf_0}\right)\theta} - e^{i\left(\frac{k}{M} - \nu - \frac{f}{Mf_0}\right)\theta} \right]. \tag{9}$$

Проинтегрировав это выражение, получим

$$C = C_0 - \frac{\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2}{4i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left[\frac{e^{i\left(\frac{k}{M} - \nu + \frac{f}{Mf_0}\right)\theta} - 1}{\left(\frac{k}{M} - \nu + \frac{f}{Mf_0}\right)} - \frac{e^{\left(\frac{k}{M} - \nu - \frac{f}{Mf_0}\right)\theta} - 1}{\left(\frac{k}{M} - \nu - \frac{f}{Mf_0}\right)} \right]. \tag{10}$$

Из последнего выражения видно, что при

$$\frac{k}{M} - \nu + \frac{f}{Mf_0} \to 0; \quad \frac{k}{M} - \nu - \frac{f}{Mf_0} \to 0$$

появляются члены линейно растущие с увеличением θ.

Действительно, если, например, при $\frac{k}{M} - \nu + \frac{f}{Mf_0} \to 0$ разложить в ряд первую экспоненту (вторая при этом даст быстро осциллирующие члены и интереса не представляет), то

$$C = C_0 - \frac{\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot \theta. \tag{11}$$

Аналогично при $\frac{k}{M} - \nu - \frac{f}{Mf_0} \to 0$

$$C = C_0 + \frac{\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot \theta. \tag{12}$$

Таким образом, имеет место внешний резонанс при частотах возмущающей силы

$$f_1 = f_0 (M\nu - k); \; f_2 = f_0 (k - M\nu), \tag{13}$$

где k—любое целое число.

Для ускорителя ЭКУ, имеющего число колебаний на одном обороте $M\nu = 5{,}385$, наиболее сильный резонанс имеет место при $k = 5$ и $k = 6$, что соответствует частотам

$$f_1 = 0{,}532532 \textit{ Мгц} \text{ и } f_2 = 0{,}850668 \textit{ Мгц}.$$

Чтобы исследовать область бетатронных частот от $M\nu = 5{,}2$ до $M\nu = 5{,}8$ необходимо менять частоту питания рассматриваемого устройства от 0,276640 *Мгц* до 1,106560 *Мгц*.

Определим коэффициент a_l в выражениях (8), (12). Коэффициенты ряда Фурье получаются из формулы

$$a_l = \frac{1}{2\pi M} \int_0^{2\pi M} d\theta \cdot \frac{f^* \cdot H_r(\theta)}{H_0 \cdot \rho} \cdot e^{-i\nu\theta} \cdot e^{-i \frac{l}{M}\theta + i\nu\theta} =$$

$$= \frac{1}{2\pi M} \int_0^{2\pi M} \frac{H_r}{H_0 \cdot \rho} \cdot F^* \cdot e^{-i\left(\frac{l}{M} - \nu\right)\theta} \cdot d\theta,$$

$$\operatorname{Re} a_l = \frac{1}{2\pi M} \int_0^{2\pi M} \frac{H_r}{H_0 \cdot \rho} \left[\operatorname{Re} F \cos\left(\frac{l}{M} - \nu\right)\theta - \operatorname{Im} F \sin\left(\frac{l}{M} - \nu\right)\theta \right] d\theta, \tag{14}$$

$$\operatorname{Im} a_l = -\frac{1}{2\pi M} \int_0^{2\pi M} \frac{H_r}{H_0 \cdot \rho} \left[\operatorname{Re} F \sin\left(\frac{l}{M} - \nu\right)\theta + \operatorname{Im} F \cos\left(\frac{l}{M} - \nu\right)\theta \right] d\theta. \tag{15}$$

Выберем начало отсчета $\theta = 0$ в месте возмущения H_r. Принимая во внимание, что возмущение действует на коротком азимуте, получим

$$\operatorname{Re} a_l = \frac{l_b \cdot H_r \cdot [\operatorname{Re} F]_b}{M \cdot l \cdot H_0 \rho}, \tag{16}$$

$$\operatorname{Im} a_l = -\frac{l_b \cdot H_r [\operatorname{Im} F]_b}{M \cdot l \cdot H_0 \rho}, \tag{17}$$

где l_b — длина возмущающего поля.

$\left.\begin{matrix}[\operatorname{Re} F]_b \\ [\operatorname{Im} F]_b\end{matrix}\right\}$ — действительная и мнимая части функции Флоке в месте возмущения поля.

Если рассматривать только интересующие нас вынужденные колебания (отбросим C_0), то окончательно

$$C = \frac{\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2}{4} \cdot \frac{l_b \cdot H_r F_b^*}{M \cdot l \cdot H_0 \rho} \theta = \frac{l \cdot l_b H_r \cdot F_b^*}{16\pi^2 \cdot M \cdot H_0 \rho} \theta. \tag{18}$$

Теперь решение для вынужденных колебаний запишется в виде

$$z(\theta) = GF + C^* F^* = 2\ (\operatorname{Re} F \cdot \operatorname{Re} C - \operatorname{Im} F \cdot \operatorname{Im} C). \tag{19}$$

Максимальное возмущение орбиты будет в фокусирующем по z промежутке

$$z_{\max} = \frac{l . l_b \cdot H_r \cdot |F|_b^2}{8\pi^2 \cdot M \cdot H_0 \rho} \cdot \theta. \tag{20}$$

Чтобы получить нарастание $z_{\max}$ во времени, необходимо сделать подстановку $\theta = \dfrac{2\pi ct}{l}$:

$$z_{\max} = \frac{l_b \cdot H_r \cdot |F|_b^2 \cdot c \cdot t}{4\pi \cdot M \cdot H_0 \rho}. \tag{21}$$

Аналогичная формула получается и для радиальных колебаний.

Наибольший интерес представляет исследование частот бетатронных колебаний до уровня поля в электромагните ≈ 300 *эрстед*, (что соответствует $E = 225$ *Мэв*), когда положение рабочей точки в области устойчивости колебаний может заметно меняться с изменением поля.

Определим требуемую амплитуду поля H_r, необходимую для возмущения колебаний на 2 *см* (полувысота камеры) в прямолинейном промежутке между двумя фокусирующими полублоками за время 10 *мксек* при величине поля на равновесной орбите 300 *эрстед:*

$$H_r = \frac{z_{\max} \cdot 4\pi \cdot M \cdot H_0 \rho}{l_b \cdot |F|_b^2 \cdot c \cdot t} = \frac{2 \cdot 12{,}56 \cdot 24 \cdot 300 \cdot 2525}{40 \cdot 8{,}6 \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-5}} = 4{,}43 \text{ эрст.}$$

Магнитное поле на оси системы проводников, показанной на рис. 1, равно

$$H_{[\text{эрст}]} = 4 \cdot \frac{0{,}2\ I\ [a]}{r\ [\text{см}]} \cdot \cos 45^\circ.$$

Таким образом, требуемая амплитуда тока

$$I = \frac{4{,}43 \cdot 4{,}24}{0{,}8 \cdot 0{,}707} = 33a.$$

Для исследования изменения частоты бетатронных колебаний с ростом магнитного поля можно либо запитывать рассмотренную систему шин с задержкой по времени, либо создавать в нужный момент раскачку колебаний специальным коротким импульсным полем и, таким образом, усугублять в этот момент времени возможность потерь пучка под действием четырехшинной системы.

Если мощности питания четырехшинной системы оказалось бы недостаточно для раскачки колебаний до возникновения потерь частиц, то можно создать предварительное возмущение орбиты с помощью системы обмоток "бим-бамп" и, таким образом, уменьшить требуемую раскачку.

С другой стороны, можно просто измерять с помощью шторки величину искажения орбиты в фокусирующем промежутке и регулировкой частоты f добиваться максимума возмущения орбиты.

Оценим ориентировочно „точность" определения резонансного значения f. Если точный резонанс не имеет места, то амплитуда возмущения орбиты равна

$$A_{\max} = \frac{\left(\frac{l}{2\pi}\right) \cdot l_b \cdot H_r \cdot |F|_b^2}{2\pi \cdot M \cdot H_0 \rho \cdot 2\varepsilon}, \tag{22}$$

где ε — расстояние до резонанса.

Тогда из (21) и (22) вытекает при $A_{max} = z_{max}$ = расстоянию до препятствия

$$M\varepsilon = \frac{M\left(\frac{l}{2\pi}\right)}{c \cdot t},$$

где t — время, необходимое для нарастания отклонения вынужденной орбиты на величину A_{max}.

Если потребовать потерю пучка за время ≈ 10 *мксек*, то потеря пучка будет иметь место в области частот

$$\Delta M\nu = \pm M\varepsilon = \pm 1{,}2 \cdot 10^{-2}.$$

Измеряя значения частот f, при которых происходит потеря пучка, справа и слева от резонансного значения частоты, можно уточнить $f_{рез}$, взяв среднее значение этих частот.

Описанная система проводников, если ее включить квадруполем, позволяет также находить расстояние рабочей частоты до параметрического резонанса. Резонансные значения частот f равны

$$f_3 = f_0(2M\nu - k), \quad f_4 = f_0(k - 2M\nu).$$

При том же диапазоне частот f можно исследовать область частот бетатронных колебаний $M\nu$ от 5,1 до 5,4.

Область локализации значения частот f_3 и f_4 при этом равна

$$\pm Mg = \frac{M\left(\frac{l}{2\pi}\right) \ln \frac{A}{A_0}}{c \cdot t},$$

где A_0 — амплитуда бетатронных колебаний до включения устройства,
A — амплитуда после введения раскачки.
t — время, требуемое для раскачки до амплитуды A.
g — полуширина создаваемого резонанса.

В заключение автор выражает благодарность кандитату физ.-мат. наук С. А. Хейфецу и доктору физ.-мат. наук Ю. Ф. Орлову за полезные советы в ходе обсуждения рассматриваемого вопроса.

Ереванский физический институт
Поступила 5.I.1968

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hammer, Pidd, Terwilliger*., Rev., Sci. Instr. 26, 555 (1955).
2. *F. J. Cole* at. al. Rev. Sci. Instr, 28, 403 (1957).
3. *Э. А. Мяэ, В. А. Обозный*, ПТЭ, № 6, 25 (1962).
4. *А. А. Журавлев* и др., ЖТФ, 32, 905 (1962).

ԿՈՇՏ ՖՈԿՈՒՍԱՑՈՒՄՈՎ ՍԻՆԽՐՈՏՐՈՆՈՒՄ ԲԵՏԱՏՐՈՆԱՅԻՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՃԱԽՈՒԹՅԱՆ ՉԱՓՄԱՆ ՍԱՐՔԱՎՈՐՈՒՄ

Ս. Կ. ԵՍԻՆ

Աշխատանքում բերված է ռեզոնանսային ճոճման միջոցով բետատրոնային տատանումների հաճախության չափման հաշվարկը։ Հաշվարկը հասցված է թվային արժեքների, որոնք համապատասխանում են Երևանի սինխրոտրոնին 6 Գէվ էներգիայի համար։ Չափման ճշտությունը ± 0,2%-ից վատ չէ։

A DEVICE FOR THE MEASUREMENT OF THE BETATRON OSCILLATION FREQUENCIES IN A STRONG-FOCUSING SYNCHROTRON

S. K. YESIN

A resonant system for the measurements of betatron frequencies is calculated. Numeral results corresponding to the parameters of the 6 GeV Yerevan synchrotron are resented . The practicable accuracy of the measurement is about 0,2%.