Изв. АН Армянской ССР, Физика, 3, 265—268 (1968)

ЭФФЕКТ ДИСКРЕТНОСТИ УСКОРЕНИЯ В СИНХРОТРОНЕ

С. А. ХЕЙФЕЦ

Показано, что дискретный характер ускорения в синхротроне приводит к неустойчивости продольного движения при числе колебаний, большем некоторого максимального, и к искажению фазовых траекторий продольного движения частиц. Для малых колебаний фазовый эллипс поворачивается на некоторый угол, зависящий от отношения ускоряющего напряжения к энергии частицы.

Эти эффекты могут оказаться существенными для синхротрона с быстрым ускорением.

Для описания продольного движения частиц в синхротроне, учитывающего дискретный характер ускорения, удобно пользоваться уравнениями в конечных разностях. Предположим для простоты, что на орбите имеются k одинаковых, равномерно распределенных ускоряющих промежутков (резонаторов), длиной которых можно пренебречь. Последнее предположение не слишком точно, в особенности для электронных синхротронов. Однако для цели настоящей работы это не существенно.

Если в момент t_l подхода к резонатору частица имела энергию E_l, то после прохождения через него энергия станет равной

$$E_{l+1} = E_l + eV(t_l)/k,$$

где $V(t)$ — напряжение на обороте.

Следующий раз частица подойдет к резонатору в момент времени

$$t_{l+1} = t_l + T(E_{l+1})/k,$$

где $T(E)$ — время обращения частицы с энергией E.

Аналогичные уравнения имеют место (формально) для равновесной частицы

$$E^s_{l+1} = E^s_l + eV^s_l/k,$$

$$t^s_{l+1} = t^s_l + T^s_l/k,$$

где eV^s — равновесный прирост энергии частицы (при котором ее импульс соответствует магнитному полю синхротрона), T^s — время обращения по равновесной орбите.

Ввиду малости отклонения энергии частиц от равновесной, функцию $T(E)$ можно разложить в ряд

$$T(E_{l+1}) = \frac{L(E_{l+1})}{v(E_{l+1})} = \frac{L_s}{v^s}\left(1 + \frac{L - L_s}{L_s} - \frac{v - v^s}{v^s} + \cdots\right)$$

или, учитывая, что

$$\frac{\Delta L}{L^s} = \alpha\,\frac{\Delta p}{p_s} = \frac{\alpha}{1-(mc^2/E_s)^2}\,\frac{\Delta E}{E_s}$$

и

$$\frac{\Delta v}{v_s} = \frac{(mc^2/E_s)^2}{1-(mc^2/E_s)^2} \cdot \frac{\Delta E}{E_s},$$

получаем

$$T(E_{l+1}) = T^s_{l+1} + K_{l+1}\, T^s_{l+1}\,(E_{l+1} - E^s_{l+1})/E^s_{l+1},$$

где $T^s_{l+1} = T(E^s_{l+1})$, а

$$K_{l+1} = \frac{\alpha - (mc^2/E^s_{l+1})^2}{1-(mc^2/E^s_{l+1})^2}.$$

Введем вместо переменной t_l переменную

$$\Phi_l = 2\pi q \int_{t_0}^{t_l} dt/T^s_l + \psi$$

(где t_0 и ψ — произвольные константы), имеющую смысл фазы высокочастотного поля (q в этом выражении имеет смысл кратности Вч-поля).

Тогда,

$$\Phi_{l+1} = 2\pi q \int_{t_0}^{t_{l+1}} dt/T^s_l + \psi = 2\pi q \int_{t_0}^{t_l} dt/T^s_l + \psi + 2\pi q \int_{t_l}^{t_{l+1}} dt/T^s_l.$$

Отсюда следует

$$\Phi_{l+1} \simeq \Phi_l + \frac{2\pi q}{T^s_l}\, T(E_{l+1}),$$

$$\Phi_{l+1} \simeq \Phi_l + 2\pi q/k + 2\pi q\, K_{l+1}\, \epsilon_{l+1}/k,$$

где введено новое обозначение $\epsilon_{l+1} = (E_{l+1} - E^s_{l+1})/E^s_{l+1}$.

Аналогично этому для $\Phi^s_l = 2\pi q \int_{t_0}^{t^s_l} dt/T^s_l + \psi$ получим

$$\Phi^s_{l+1} = \Phi^s_l + 2\pi q/k.$$

Пару уравнений для E_{l+1} и E^s_{l+1} можно заменить другой парой для E^s_{l+1} и ϵ_{l+1}:

$$\epsilon_{l+1} = \epsilon_l \frac{E^s_l}{E^s_{l+1}} + \frac{eV(\Phi_l) - eV^s_l}{kE^s_{l+1}}.$$

Последний множитель в этом уравнении связан с затуханием продольных колебаний. Система уравнений для ϵ, $\varphi = \Phi - \Phi^s$, E^s и Φ^s полностью определяет продольное движение частиц в синхротроне [1]:

$$\epsilon_{l+1} = \epsilon_l \frac{E^s_l}{E^s_{l+1}} + \frac{eV(\Phi^s_l + \varphi^s_l) - eV^s_l}{kE^s_{l+1}}, \tag{A1}$$

$$\varphi_{l+1} = \varphi_l + 2\pi q K_{l+1} \epsilon_{l+1}/k, \tag{A2}$$

$$E^s_{l+1} = E^s_l + eV^s_l/k, \tag{A3}$$

$$\Phi^s_{l+1} = \Phi^s_l + 2\pi q/k. \tag{A4}$$

Покажем, что в случае, когда $V(\Phi^s + \varphi) = V_0 \cos\Phi$, система уравнений эквивалента обычным уравнениям синхротронных колебаний. Прежде всего, как нетрудно убедиться, $V^s = V_0 \cos \Phi^s$. Перейдем далее от конечных разностей к производным:

$$\frac{\epsilon_{i+1} - \epsilon_i}{t^s_{i+1} - t^s_i} \to \frac{d\epsilon}{dt},$$

$$\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{t^s_{i+1} - t^s_i} \to \frac{d\varphi}{dt}.$$

Тогда из двух первых уравнений получим уравнения

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{eV^s}{T^s E_s}\epsilon + \frac{eV_0}{T^s E_s}(\cos\Phi - \cos\Phi^s),$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = 2\pi q K\epsilon / T^s,$$

эквивалентные уравнению синхротронных колебаний

$$\ddot{\Phi} + \frac{eV^s}{T^s E_s}\dot{\Phi} = \frac{2\pi q K e V_0}{(T^s)^2 E_s}(\cos\Phi - \cos\Phi^s).$$

В частности, частота малых (линейных) фазовых колебаний дается формулой

$$\Omega^2 = \frac{2\pi q K e V_0 \sin\Phi^s}{(T^s)^2 E_s}.$$

Однако система уравнений (А) имеет более широкое значение. Она описывает продольное движение частиц в любом поле $V(\Phi)$. Кроме того, при ее выводе не делалось никаких предположений относительно величины T^s, в то время как при выводе дифференциального уравнения предполагается, что фазы Φ (и энергии ϵ) мало меняются за время одного оборота (в этом случае можно заменить конечные разности дифференциалами). Это приводит, в частности, к тому, что уравнения фазовых колебаний справедливы лишь тогда, когда они достаточно медленны, т. е. когда период колебаний много больше периода обращения.

Чтобы показать, чем движение частиц, подчиняющихся уравнениям (А), отличается от обычного, найдем фазовые траектории (т. е. кривые на плоскости (ϵ, Φ) малых колебаний. Затуханием при этом мы будем пренебрегать (в противном случае кривые оказываются не замкнутыми).

Первые два уравнения системы (А) в линейном приближении имеют вид

$$\epsilon_{i+1} = \epsilon_i - \varkappa\varphi_i,$$
$$\varphi_{i+1} = \beta\epsilon_i + (1 - \varkappa\beta)\varphi_i,$$

где $\varkappa = eV_0 \sin\Phi^s / kE_s$, $\beta = 2\pi q K / k$.

Нетрудно убедиться, что решением этой системы является

$$\epsilon_i = A\cos\delta\sin(\nu i + \chi) - B\sin\delta\cos(\nu i + \chi),$$

$$\varphi_i = A\sin\delta\sin(\nu i + \chi) + B\cos\delta\cos(\nu i + \chi),$$

где $\cos\nu = 1 - \frac{\varkappa\beta}{2} = 1 - \frac{\pi q K e V_0 \sin\Phi^s}{k^2 E_s}$, (Б1)

$$\operatorname{tg} 2\delta = \frac{\varkappa\beta}{\varkappa - \beta} = \frac{2\pi q K e V_0 \sin \Phi^s}{k\,(e V_0 \sin \Phi_s - 2\pi q K E_s)}. \tag{Б2}$$

Фазовая траектория, соответствующая такому решению, представляет собой эллипс, главные оси которого повернуты относительно осей (ϵ, φ) на угол δ, определяемый соотношением (Б 2).

Число колебаний на один оборот $\nu/2\pi$ можно найти из соотношения (Б 1), из которого также следует, что продольное движение устойчиво для параметров синхротрона, удовлетворяющих неравенствам

$$0 \leqslant \pi q K e V_0 \sin \Phi^s / k^2 E_s \leqslant 2.$$

Для электронного синхротрона $\beta = \mathrm{const}$ и обычно выполняется неравенство $\beta \gg \varkappa$. Поэтому для электронного синхротрона $|\delta| \sim \varkappa = e V_0 \sin \Phi^s / k E_s \ll 1$. Для протонного сихротрона β вблизи критической энергии становится равной $\varkappa$ и δ стремится к $\pi/4$. Значение энергии, при которой возникает это явление, определяется обращением в ноль знаменателя правой части уравнения (Б 2);

$$(E/mc^2) = (1 + e V_0 \sin \Phi^s / 4\pi\, mc^2 q \sqrt{\alpha}) / \sqrt{\alpha}\,.$$

Отсюда видно, что поворот эллипса на значительный угол происходит при энергии несколько меньшей ($\sin \Phi^s < 0$) и несколько большей ($\sin \Phi^s > 0$) критической.

Отличие этой энергии от критической энергии тем больше, чем быстрее происходит ускорение.

Ереванский физический институт

Поступила 5.I.1968

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. А. Хейфец*, Proceed. of the V internatinal conference on high-energy accelerators, Fraskati, 1965.

ԱՐԱԳԱՑՄԱՆ ԴԻՍԿՐԵՏՈՒԹՅԱՆ ԷՖԵԿՏԸ ՍԻՆԽՐՈՏՐՈՆՈՒՄ

Ս. Ա. ԽԵՅՖԵՑ

Ցույց է տրված, որ արագացման դիսկրետությունը բերում է երկայնական շարժման անկայունության, երբ տատանումների թիվը մեծ է ինչ-որ մաքսիմումից, և մասնիկի երկայնական շարժման ֆազային հետագծերի աղավաղման։ Փոքր տատանումների դեպքում ֆազային էլիպսը շրջվում է որոշ անկյունով՝ կախված մասնիկի էներգիայի և արագացնող լարման հարաբերությունից։

Այս երևույթները կարող են լինել նշանակալից արագ արագացնող սինխրոտրոնների համար։

NONCONTINUAL ACCELERATION EFFECT IN SYNCHROTRON

S. A. KHEIFETS

It is shown that noncontinual acceleration in the synchrotron brings to a longitudinal motion instability when the oscillation number exceeds the maximal one and to the distortion of the longitudinal motion phase orbits. The phase ellips in the case of linear oscillations tilts for a small angle depending on the ratio of the accelerating voltage to the particle energy. These effects may become essential for a synchrotron with fast acceleration.