Изв. АН Армянской ССР, Физика, 3, 103—114 (1968)

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ ПРОЛЕТЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ ЧЕРЕЗ МНОГОСЛОЙНУЮ ПЛАСТИНУ

Г. М. ГАРИБЯН, М. М. МУРАДЯН

Вычислены поля излучения, возникающие при перпендикулярном пролете заряженной частицы через пластину, состоящую из произвольного числа слоев различного вещества. Получена общая формула (22), с помощью которой можно получить поля излучения до пластины, в слоях пластины и за пластиной.

В работах [1—3] получены поля излучения и с их помощью найдены потери энергии при перпендикулярном пролете заряженной частицы соответственно через однослойную, двухслойную и трехслойную пластины. Имея в виду как вопросы излучения, так и ионизационных потерь энергии, представляет интерес найти поля излучения при перпендикулярном пролете зараженной частицы через пластину, состоящую из произвольного числа слоев различного вещества любой толщины.

1. Пусть частица с зарядом e пролетает с постоянной скоростью v вдоль положительного направления оси z через n-слойную пластину, расположенную в среде, причем до пластины имеется среда с диэлектрической постоянной $\varepsilon_0(\omega)$, а за пластиной — $\varepsilon_{n+1}(\omega)$.

Пластину же будем считать состоящей из первого слоя толщины a_1 и с диэлектрической постоянной $\varepsilon_1(\omega)$, второго слоя с параметрами a_2 и и $\varepsilon_2(\omega)$ и так далее до n-того слоя с параметрами a_n и $\varepsilon_n(\omega)$.

Для получения полного решения, удовлетворяющего условиям на гриницах сред, к решениям неоднородных уравнений Максвелла (см. [4]) добавим в пространстве до пластины в качестве решений однородных уравнений Максвелла отраженную волну $E''_0(\vec{r}, t)$, в пространстве за пластиной—прошедшую волну $E'_{n+1}(\vec{r}, t)$ и, наконец, в каждом из слоев пластины как одну, так и другую волны.

Указанные поля излучения будем искать в следующем виде:

$$\vec{E}''_l(\vec{r}, t) = \int \vec{E}''_l(\overleftarrow{k})\, e^{i(\vec{\varkappa}\vec{\rho} - \lambda_l z - \omega t)}\, d\vec{k},$$

$$\vec{E}'_l(\vec{r}, t) = \int \vec{E}'_l(\vec{k})\, e^{i(\vec{\varkappa}\vec{\rho} + \lambda_l z - \omega t)}\, d\vec{k}, \tag{1}$$

где $\lambda_l^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_l \mu_l - \varkappa^2$; $l = 0, 1, \cdots, n+1$, $\lambda_l = \lambda'_l + i\lambda''_l$;

$$\lambda'_l > 0 \text{ при } \omega > 0;\ \lambda'_l < 0 \text{ при } \omega < 0;\ \lambda''_l > 0 \text{ при } \omega \gtrless 0$$

(отметим, что поля E'_0 и E''_{n+1} не существуют), $\vec{\varkappa}$ и $\vec{\rho}$ — компоненты векторов $\vec{k}$ и $\vec{r}$ в плоскости (x, y); $\omega = k_z v$. Для магнитных векторов можно написать выражения, аналогичные (1).

Фурье-компоненты полей излучения $\vec{E}''_l(\vec{k})$ и $\vec{E}'_l(\vec{k})$ определяются из граничных условий. Что же касается магнитных полей, то они выражаются через электрические поля с помощью однородных уравнений Максвелла

$$\vec{H}''_l(\vec{k}) = \frac{c}{\omega\mu_l}\left[\vec{\varkappa} - \frac{\vec{v}}{v}\lambda_l;\, \vec{E}''_l(\vec{k})\right],$$

$$\vec{H}'_l(\vec{k}) = \frac{c}{\omega\mu_l}\left[\vec{\varkappa} + \frac{\vec{v}}{v}\lambda_l;\, \vec{E}'_l(\vec{k})\right]. \tag{2}$$

В дальнейшем мы везде полагаем $\mu_l = 1$. Приравняв тангенциальные компоненты электрического и магнитного векторов полных полей и нормальные компоненты их индукций на границах раздела сред, получим $4(n+1)$ уравнений, поскольку в случае n-слойной пластины имеется $(n+1)$ границ раздела сред. Из $2(n+1)$ уравнений для магнитных векторов (см. [1]) следует, что тангенциальные компоненты электрических векторов полей излучения направлены по вектору $\vec{\varkappa}$. Тогда, учитывая связь между нормальными и тангенциальными компонентами электрических векторов полей излучения, следующую из условия поперечности

$$E'_{l\,\text{норм}}(\vec{k}) = -\frac{\varkappa}{\lambda_l} E'_{l\,\text{танг.}}(\vec{k}); \quad E''_{l\,\text{норм}}(\vec{k}) = \frac{\varkappa}{\lambda_l} E''_{l\,\text{танг.}}(\vec{k}), \tag{3}$$

для $2(n+1)$ неизвестных Фурье-компонент тангенциальных составляющих электрических векторов полей излучения получим $2(n+1)$ уравнений.

Эта система уравнений будет состоять из $(n+1)$ пар уравнений следующего вида:

$$E'_l e^{i\lambda_l \sum\limits_{j=1}^{l} a_j} + E''_l e^{-i\lambda_l \sum\limits_{j=1}^{l} a_j} - E'_{l+1} e^{i\lambda_{l+1} \sum\limits_{j=1}^{l} a_j} - E''_{l+1} e^{-i\lambda_{l+1} \sum\limits_{j=1}^{l} a_j} =$$
$$= p_{l,\,l+1}\, e^{i\frac{\omega}{v} \sum\limits_{j=1}^{l} a_j}, \tag{4}$$
$$-\frac{\varepsilon_l}{\lambda_l} E'_l e^{i\lambda_l \sum\limits_{j=1}^{l} a_j} + \frac{\varepsilon_l}{\lambda_l} E''_l e^{-i\lambda_l \sum\limits_{j=1}^{l} a_j} + \frac{\varepsilon_{l+1}}{\lambda_{l+1}} E'_{l+1} e^{i\lambda_{l+1} \sum\limits_{j=1}^{l} a_j} -$$
$$-\frac{\varepsilon_{l+1}}{\lambda_{l+1}} E''_{l+1} e^{-i\lambda_{l+1} \sum\limits_{j=1}^{l} a_j} = \frac{v}{\omega} z_{l+1,\,l}\, e^{i\frac{\omega}{v} \sum\limits_{j=1}^{l} a_j},$$

где

$$p_{l,\,l+1}=\left(\frac{1}{\varepsilon_l \Lambda_l}-\frac{1}{\varepsilon_{l+1}\Lambda_{l+1}}\right);\; z_{l+1,\,l}=\left(\frac{1}{\Lambda_{l+1}}-\frac{1}{\Lambda_l}\right);$$

$$\Lambda_j=k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_j;\; j=0,\,1,\,2,\cdots,\; n+1;\quad k^2=\frac{\omega^2}{v^2}+\varkappa^2.$$

$l=0,1,2,\cdots,n$; и надо учесть, что $E_0'=E_{n+1}''=0$

В системе уравнений (4) для простоты опущен коэффициент $\frac{2\pi^2}{ie\varkappa}$, состоящий перед всеми неизвестными, а также индекс *танг*. Систему уравнений (4) можно легко понять, если уравнения рассматривать попарно. Каждая пара уравнений представляет собой граничные условия для Фурье-компонент тангенциальных составляющих электрического вектора и нормальных составляющих индукций этого же вектора, написанных на границах раздела сред соответственно при $z=0$, $z=a_1,\cdots,\; z=\sum\limits_{j=1}^{n} a_j$.

Систему уравнений (4) решим по правилу Крамера (см. [5]), в силу которого для одного из электрических векторов в l-том слое пластины, например, для E_l'' будем иметь

$$E_l''=\frac{D_n^l}{\Delta_n}, \tag{5}$$

где Δ_n — определитель системы уравнений (4) (n — число слоев пластины), D_n^l—определитель, который получается из Δ_n заменой столбца, где стоят коэффициенты перед неизвестными E_l'' ($l=0,1,2,\cdots,n$), свободными членами, стоящими в правой части системы уравнений (4). Правило Крамера справедливо при $\Delta_n\neq 0$.

2. Методом математической индукции докажем, что

$$\Delta_n=e^{i\lambda_{n+1}\sum\limits_{j=1}^{n}a_j}\sum_{(\pm)}\left(\prod_{r=0}^{n}\rho_{r,\,r+1}^{\pm}\, e^{\sum\limits_{j=1}^{n}(\pm\, i\lambda_j a_j)}\right), \tag{6}$$

где

$$\rho_{r,\,r+1}^{\pm}=\left(\frac{\varepsilon_r}{\lambda_r}\pm\frac{\varepsilon_{r+1}}{\lambda_{r+1}}\right). \tag{7}$$

$\sum\limits_{(\pm)}$ означает суммирование по всем возможным комбинациям знаков плюс и минус в сумме $\sum\limits_{j=1}^{n}(\pm\, i\lambda_j a_j)$, стоящей в экспоненте. Нетрудно показать, что таких комбинаций, а следовательно и членов в $\sum\limits_{(\pm)}$, будет 2^n. Множитель $\prod_{r=0}^{n} \rho^{\pm}_{r,\,r+1}$ мы не выносим из-под знака $\sum_{(\pm)}$, так как верхний знаковый индекс у $\rho^{\pm}_{r,\,r+1}$ определяется тем, какая комбинация знаков плюс и минус взята в сумме, стоящей в показателе экспоненты. Эти верхние знаковые индексы у $\rho^{\pm}_{r,\,r+1}$ определяются следующим образом. *В сумме* $\sum_{j=1}^{n} (\pm\, \vartheta_j a_j)$ *могут содержаться либо один член с индексом j, равным одному из нижних индексов* $\rho^{\pm}_{r,\,r+1}$, *либо два члена с индексами, равными нижним индексам* $\rho^{\pm}_{r,\,r+1}$ *либо ни один член с индексом j, равным нижним индексам* $\rho^{\pm}_{r,\,r+1}$. *В первом случае верхний знаковый индекс берется обратным знаку этого единственного члена. Во втором случае верхний знаковый индекс равен знаку произведения знаков этих двух членов. В третьем же случае верхний знаковый индекс* $\rho^{\pm}_{r,\,r+1}$ *всегда отрицателен.*

Перейдем к доказательству формулы (6). Обозначив элементы определителя через a_{ij} и раскрыв его дважды, сначала по последнему столбцу, а затем по последней строке, получим

$$\Delta_n = [a_{2n+2,\,2n+2}\cdot a_{2n+1,\,2n+1} - a_{2n+1,\,2n+2}\cdot a_{2n+2,\,2n+1}) \times$$

$$\times \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & 0 & \text{---} & \text{---} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & \text{---} & \text{---} & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & \text{---} & \text{---} & 0 & a_{2n-1,\,2n-2} & a_{2n-1,\,2n-1} & a_{2n-1,\,2n} \\ 0 & \text{---} & \text{---} & 0 & a_{2n,\,2n-2} & a_{2n,\,2n-1} & a_{2n,\,2n} \end{vmatrix} +$$

$$+ (a_{2n+1,\,2n+2}\cdot a_{2n+2,\,2n} - a_{2n+2,\,2n+2}\cdot a_{2n+1,\,2n}) \times$$

$$\times \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & 0 & & & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & & & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & \text{---} & \text{---} & 0 & a_{2n-1,\,2n-2} & a_{2n-1,\,2n-1} & a_{2n-1,\,2n+1} \\ 0 & \text{---} & \text{---} & 0 & a_{2n,\,2n-2} & a_{2n,\,2n-1} & a_{2n,\,2n+1} \end{vmatrix}. \qquad (8)$$

Если в (8) вместо a_{ij} подставить их значения из (4), то нетрудно видеть, что первый определитель выражения (8) совпадает с определителем системы уравнений в случае $(n-1)$-слойный пластины, когда за пластиной $\left(z > \sum_{j=1}^{n-1} a_j\right)$ имеется среда с диэлектрической постоянной $\varepsilon_n(\omega)$, а до пластины $(z<0)$ по-прежнему $\varepsilon_0(\omega)$. Второй же опделитель будет отличаться от первого лишь знаком при λ_n. Обозначив определитель вышеуказанной системы уравнений $(n-1)$-слойной пластины через Δ_{n-1}, а этот же определитель с заменой $\lambda_n \to -\lambda_n$ через Δ'_{n-1} и вычислив выражения, стоящие в круглых скобках формулы (8), получим

$$\Delta_n = \rho^{+}_{n,\, n+1}\, e^{i\lambda_{n+1}\sum\limits_{j=1}^{n} a_j - i\lambda_n \sum\limits_{j=1}^{n} a_j} \Delta_{n-1} + \rho^{-}_{n,\, n+1}\, e^{i\lambda_{n,\, n+1}\sum\limits_{j=1}^{n} a_j + i\lambda_n \sum\limits_{j=1}^{n} a_j} \Delta'_{n-1} \tag{9}$$

Для доказательства допустим, что формула (6) справедлива для $(n-1)$-слойной пластины (левой границе пластины соответствует $z=0$), т. е.

$$\Delta_{n-1} = e^{i\lambda_n \sum\limits_{j=1}^{n-1} a_j} \sum_{(\pm)} \left(\prod_{r=0}^{n-1} \rho^{\pm}_{r,\, r+1}\, e^{\sum\limits_{j=1}^{n-1} (\pm i\lambda_j a_j)} \right). \tag{10}$$

Поскольку λ_n входит в формуле (10) помимо первой экспоненты также и в $\rho^{\pm}_{n-1,\, n}$, то для Δ'_{n-1} мы можем написать

$$\Delta'_{n-1} = e^{-i\lambda_n \sum\limits_{j=1}^{n-1} a_j} \sum_{(\pm)}{}' \left(\prod_{r=0}^{n-1} \rho^{\pm}_{r,\, r+1}\, e^{\sum\limits_{j=1}^{n-1} (\pm i\lambda_j a_j)} \right), \tag{11}$$

$\sum\limits_{(\pm)}'$ в (11) отличается от $\sum\limits_{(\pm)}$ в (10) тем, что здесь верхний знаковый индекс множителя $\rho^{\pm}_{n-1}$ равен (а не обратен) знаку члена $i\lambda_{n-1} a_{n-1}$ в показателе экспоненты.

Подставляя (10) и (11) в (9), получим

$$\Delta_n = e^{i\lambda_{n+1} \sum\limits_{j=1}^{n} a_j} \Bigg[\rho^{+}_{n,\, n+1}\, e^{-i\lambda_n a_n} \sum_{(\pm)} \left(\prod_{r=0}^{n-1} \rho^{\pm}_{r,\, r+1}\, e^{\sum\limits_{j=1}^{n-1} (\pm i\lambda_j a_j)} \right) +$$
$$+ \rho^{-}_{n,\, n+1}\, e^{i\lambda_n a_n} \sum_{(\pm)}{}' \left(\prod_{r=0}^{n-1} \rho^{\pm}_{r,\, r+1}\, e^{\sum\limits_{j=1}^{n-1} (\pm i\lambda_j a_j)} \right) \Bigg]. \tag{12}$$

Согласно вышеприведенному правилу, множитель $\rho^{\pm}_{n-1,\, n}$, находящийся под знаком $\sum\limits_{(\pm)}$, должен иметь верхний знаковый индекс, противоположный знаку члена $i\lambda_{n-1} a_{n-1}$, содержащегося в показателе экспоненты поскольку другого члена с нижним индексом $\rho^{\pm}_{n-1,\, n}$ там не содержится. Если мы в (12) внесем $e^{-i\lambda_n a_n}$ под знак $\sum\limits_{(\pm)}$, то это ничего не изменит, так как теперь в показатель экспоненты войдут два члена с нижними индексами $\rho^{\pm}_{n-1,\, n}$ и верхний знаковый индекс $\rho^{\mp}_{n-1,\, n}$ согласно нашему правилу будет определяться знаком произведения знаков членов $i\lambda_{n-1} a_{n-1}$ и $i\lambda_n a_n$, т. е. опять будет противоположен знаку члена $i\lambda_{n-1} a_{n-1}$. Легко видеть, что множитель $\rho^{+}_{n,\, n+1}$ также можно внести под знак $\sum\limits_{(\pm)}$, поскольку в показателе экспоненты будет содержаться только один член—$i\lambda_n a_n$ с нижним индексом $\rho^{+}_{n,\, n+1}$, знак которого противоположен верхнему знаковому индексу $\rho^{+}_{n,\, n+1}$. Пользуясь похожими рассуждениями нетрудно показать, что если внести в (12) $\rho^{-}_{n,\, n+1}\, e^{i\lambda_n a_n}$ под знак суммы $\sum\limits_{(\pm)}'$, то последняя превратится в обычную сумму $\sum\limits_{(\pm)}$. Тогда для (12) имеем

$$\Delta_n = e^{i\lambda_{n+1}\sum\limits_{j=1}^{n} a_j}\left[\sum_{(\pm)}\left(\rho^{+}_{n,\, n+1}\prod_{r=0}^{n-1}\rho^{\pm}_{r,\, r+1}\, e^{-i\lambda_n a_n+\sum\limits_{j=1}^{n-1}(\pm i\lambda_j a_j)}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{(\pm)}\left(\rho^{-}_{n,\, n+1}\prod_{r=0}^{n-1}\rho^{\pm}_{r,\, r+1}\, e^{i\lambda_n a_n+\sum\limits_{j=1}^{n-1}(\pm i\lambda_j a_j)}\right)\right]. \qquad (13)$$

В силу нашего правила раскрывания суммы $\sum\limits_{(\pm)}$ мы можем (13) написать в виде одного члена, совпадающего с выражением (6), чем и доказывается справедливость формулы (6).

3. Теперь перейдем к нахождению числителя выражения (5), т. е. D_n^l. Для свободных членов системы уравнений (4) введем обозначения:

$$C_{2r+1} = P_{r,\, r+1}\, e^{i\frac{\omega}{v}\sum\limits_{j=1}^{r} a_j};\quad C_{2r+2} = \frac{v}{\omega}\, z_{r+1,\, r}\, e^{i\frac{\omega}{v}\sum\limits_{j=1}^{r} a_j}, \qquad (14)$$

где индексы величины C_{2r+1} и C_{2r+2} указывают номер строки $(r=0, 1, 2, \cdots, n)$.

Определитель D_n^l легко получается из Δ_n, если в последнем заменить $(2l+1)$-ый столбец—$(l=0, 1, \cdots, n)$ свободными членами системы уравнений (4), т. е. членами (14), поскольку коэффициенты при E_l' стоят в $(2l+1)$-ом столбце.

Методом математической индукции докажем, что D_n^l имеет следующий вид:

$$D_n^l = e^{i\lambda_{n+1}\sum\limits_{j=1}^{n} a_j + i\lambda_l\sum\limits_{j=1}^{l-1} a_j}\times$$

$$\times\left[\sum_{k=0}^{l-1}\left(\prod_{s=k+1}^{l-1}\rho_s\, e^{i\frac{\omega}{v}\sum\limits_{j=1}^{k} a_j}\sum_{(\pm)}\left(\prod_{r=0}^{k-1}\rho^{\pm}_{r,\, r+1}\,\gamma^{\pm}_{k,\, k+1}\prod_{r=l}^{n}\rho^{\pm}_{r,\, r+1}\times\right.\right.\right.$$

$$e^{i\lambda_l a_l + \sum\limits_{s=1}^{k}(\pm i\lambda_j a_j) + \sum\limits_{s=l+1}^{n}(\pm i\lambda_j a_j)}\Bigg)\Bigg) + \sum_{k=l}^{n}\Bigg(\prod_{s=l+1}^{k}\rho_s e^{i\frac{\omega}{v}\sum\limits_{j=1}^{k} a_j}\sum_{(\pm)}\times$$

$$\times\Bigg(\prod_{r=0}^{l-1}\rho^{\pm}_{r,\,r+1}\,\delta^{\pm}_{k,\,k+1}\prod_{r=k+1}^{n}\rho^{\pm}_{r,\,r+1}\,e^{\sum\limits_{j=1}^{l-1}(\pm i\lambda_j a_j) + \sum\limits_{s=k+1}^{n}(\pm i\lambda_j a_j)}\Bigg)\Bigg)\Bigg], \qquad (15)$$

где

$$\gamma^{\pm}_{k,\,k+1} = \pm\frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}}{\Lambda_k\Lambda_{k+1}}\left(\frac{\omega}{c}\beta \pm \frac{\Lambda_k - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{k+1}}{\lambda_k\varepsilon_{k+1}}\right);$$

$$\delta^{\pm}_{k,\,k+1} = \frac{\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k}{\Lambda_{k+1}\Lambda_k}\left(\frac{\omega}{c}\beta \pm \frac{\Lambda_{k+1} - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_k}{\lambda_{k+1}\varepsilon_k}\right); \quad \rho_s = 2\frac{\varepsilon_s}{\lambda_s}; \qquad (16)$$

и, кроме того, условимся считать $\sum\limits_{j=\alpha}^{\beta} A_j = 0$ и $\prod\limits_{j=\alpha}^{\beta} A_j = 1$, если $\alpha < \beta$ (при произвольном A_j).

У множителя $\lambda^{\pm}_{k,\,k+1}$ нижний второй индекс может содержаться в членах $i\lambda_j a_j$ показателя экспоненты лишь при $k+1=l$, первый же индекс содержится всегда, за исключением случая, когда $k=0$.

У множителя $\delta^{\pm}_{k,\,k+1}$ нижний второй индекс содержится в показателе экспоненты всегда, за исключением случая $k=n$, первый же индекс—никогда. *Верхние знаковые индексы множителей $\gamma^{\pm}_{k,\,k+1}$ и $\delta^{\pm}_{k,\,k+1}$ определяются следующим образом. При $k \neq 0$ верхний знаковый индекс $\gamma^{\pm}_{k,\,k+1}$ равен знаку члена $i\lambda_k a_k$ показателя экспоненты, индекс которого совпадает с нижним первым индексом $\lambda^{\pm}_{k,\,k+1}$, а при $k=0$ верхний знаковый индекс $\gamma^{\pm}_{k,\,k+1}$ всегда отрицателен. При $k \neq n$ верхний знаковый индекс $\delta^{\pm}_{k,\,k+1}$ обратен знаку члена $i\lambda_{k+1} a_{k+1}$ показателя экспоненты, индекс которого совпадает с нижним вторым индексом $\delta^{\pm}_{k,\,k+1}$, а при $k=n$ верхний знаковый индекс $\delta^{\pm}_{k,\,k+1}$ всегда положителен. Что же касается верхних знаковых индексов $\rho^{\pm}_{r,\,r+1}$, то они определяются так же как и в п. 2.*

Для доказательства формулы (15) допустим, что она имеет место для $(n-1)$-слойной пластины, отличающейся от нашей пластины лишь тем, что отсутствует n-тый слой, а за пластиной имеется среда с диэлектрической постоянной $\varepsilon_n(\omega)$.

Тогда

$$D^{l}_{n-1} = e^{i\lambda_n\sum\limits_{j=1}^{n-1} a_j + i\lambda_l\sum\limits_{j=1}^{l-1} a_j}\Bigg[\sum_{k=0}^{l-1}\Bigg(\prod_{s=k+1}^{l-1}\rho_s\, e^{i\frac{\omega}{v}\sum\limits_{j=1}^{k} a_j}\sum_{(\pm)}\Bigg(\prod_{r=0}^{k-1}\rho^{\pm}_{r,\,r+1}\,\gamma^{\pm}_{k,\,k+1}\times$$

$$\times\prod_{r=l}^{n-1}\rho^{\pm}_{r,\,r+1}\, e^{i\lambda_l a_l+\sum\limits_{j=1}^{k}(\pm i\lambda_j a_j)+\sum\limits_{s=l+1}^{n-1}(\pm i\lambda_j a_j)}\Big)\Big)+\sum_{k=l}^{n-1}\Big(\prod_{s=l+1}^{k}\rho_s\, e^{i\frac{\omega}{v}\sum\limits_{j=1}^{k}a_j}\sum_{(\pm)}\times$$

$$\times\Big(\prod_{r=0}^{l-1}\rho^{\pm}_{r,\,r+1}\,\delta^{\pm}_{k,\,k+1}\prod_{r=k+1}^{n-1}\rho^{\pm}_{r,\,r+1}\, e^{\sum\limits_{j=1}^{l-1}(\pm i\lambda_j a_j)+\sum\limits_{j=k+1}^{n-1}(\pm i\lambda_j a_j)}\Big)\Big)\Big]. \qquad (17)$$

Если теперь к $(n-1)$-слойной пластине в конце добавить один слой с параметрами a_n и $\varepsilon_n(\omega)$, а за платиной $\left(z>\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\right)$ взять среду с диэлектрической постоянной $\varepsilon_{n+1}(\omega)$, то получим наш случай с определителем D_n^l. Раскрыв определитель D_n^l вначале по последнему столбцу, а затем по последней строке, получим

$$D_n^l=e^{i\lambda_{n+1}\sum\limits_{j=1}^{n}a_j}\Big[\rho^{+}_{n,\,n+1}\, e^{-i\lambda_n\sum\limits_{j=1}^{n}a_j} D^l_{n-1}+\rho^{-}_{n,\,n+1}\, e^{i\lambda_n\sum\limits_{j=1}^{n}a_j} D'^l_{n-1}+$$

$$+\delta^{+}_{n,\,n+1}\, B e^{i\frac{\omega}{v}\sum\limits_{j=1}^{n}a_j}\Big], \qquad (18)$$

где D'^l_{n-1} получается из D^l_{n-1} заменой $\lambda_n\to-\lambda_n$, а определитель B получается из D_n^l, если в нем вычеркнуть последние две строки, а также $(2l+1)$-ый и последний столбец.

Подставив выражение (17) в (18) и сделав те же преобразования, что и в п. 2, связанные с внесением множителей $\rho^{+}_{n,\,n+1}\, e^{-i\lambda_n a_n}$ и $\rho^{-}_{n,\,n+1}\, e^{i\lambda_n a_n}$ под знак сумм $\sum\limits_{(\pm)}$ и $\sum\limits_{(\pm)}{}'$, получим

$$D_n^l=e^{i\lambda_{n+1}\sum\limits_{j=1}^{n}a_j+i\lambda_l\sum\limits_{j=1}^{l-1}a_j}\times \qquad (19)$$

$$\times\Big[\sum_{k=0}^{l-1}\Big(\prod_{s=k+1}^{l-1}\rho_s\, e^{i\frac{\omega}{v}\sum\limits_{j=1}^{k}a_j}\sum_{(\pm)}\Big(\prod_{r=0}^{k-l}\rho^{\pm}_{r,\,r+1}\,\delta^{\pm}_{k,\,k+1}\prod_{r=l}^{n}\rho^{\pm}_{r,\,r+1}\times$$

$$\times e^{i\lambda_l a_l+\sum\limits_{j=1}^{k}(\pm i\lambda_j a_j)+\sum\limits_{j=l+1}^{n}(\pm i\lambda_j a_j)}\Big)\Big)+\sum_{k=l}^{n-1}\Big(\prod_{s=l+1}^{k}\rho_s\, e^{i\frac{\omega}{v}\sum\limits_{j=1}^{k}a_j}\sum_{(\pm)}\times$$

$$\times\Big(\prod_{r=0}^{l-1}\rho^{\pm}_{r,\,r+1}\,\delta^{\pm}_{k,\,k+1}\prod_{r=k+1}^{n}\rho^{\pm}_{r,\,r+1}\, e^{\sum\limits_{j=1}^{l-1}(\pm i\lambda_j a_j)+\sum\limits_{j=k+1}^{n}(\pm i\lambda_j a_j)}\Big)\Big)\Big]+$$

$$+\,\delta^{\pm}_{n,\,n+1}\,Be^{\,i\lambda_{n+1}\sum\limits_{j=1}^{n} a_j + i\frac{\omega}{v}\sum\limits_{j=1}^{n} a_j}.$$

В силу приложения (см. [5] § 10) к теореме Лапласа об умножении определителей B можно представить в следующем виде:

$$B = B' \times \begin{vmatrix} a_{2l+1,\,2l+2} & a_{2l+1,\,2l+3} \\ a_{2l+2,\,2l+2} & a_{2l+2,\,2l+3} \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} a_{2l+3,\,2l+4} & a_{2l+3,\,2l+5} \\ a_{2l+4,\,2l+4} & a_{2l+4,\,2l+5} \end{vmatrix} \times \cdots \times \begin{vmatrix} a_{2n-1,\,2n} & a_{2n-1,\,2n+1} \\ a_{2n,\,2n} & a_{2n,\,2n+1} \end{vmatrix}, \qquad (20)$$

где определитель B' получается из определителя B, если в последнем оставить только первые $2l$ строки и $2l$ столбцов.

Если подставить в B' значения a_{ij} из (4), то нетрудно видеть, что B' есть определитель системы уравнений $(l-1)$-слойной пластины, левой границей которой является плоскость $z=0$, т. е. Δ_{l-1}, а последующие определители однотипны и равны соответственно ρ_{l+1}, $\rho_{l+2}, \cdots$ $\cdots$, ρ_n (см. формулу (16)). В качестве примера вычислим последний определитель:

$$\begin{vmatrix} a_{2n-1,\,2n} & a_{2n-1,\,2n+1} \\ a_{2n,\,2n} & a_{2n,\,2n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -e^{\,i\lambda_n\sum\limits_{j=1}^{n} a_j} & -e^{-i\lambda_n\sum\limits_{j=1}^{n} a_j} \\ \dfrac{\varepsilon_n}{\lambda_n}\,e^{\,i\lambda_n\sum\limits_{j=1}^{n} a_j} & -\dfrac{\varepsilon_n}{\lambda_n}\,e^{-i\lambda_n\sum\limits_{j=1}^{n} a_j} \end{vmatrix} = 2\frac{\varepsilon_n}{\lambda_n} = \rho_n .$$

Учитывая выше сказанное, (20) можно записать в следующем виде:

$$B = \Delta_{l-1}\prod_{s=l+1}^{n}\rho_s = e^{\,i\lambda_l\sum\limits_{j=1}^{l-1} a_j}\prod_{s=l+1}^{n}\rho_s\sum_{(\pm)}\left(\prod_{r=0}^{l-1}\rho^{\pm}_{r,\,r+1}\,e^{\sum\limits_{j=1}^{l-1}(\pm i\lambda_j) a_j}\right). \qquad (21)$$

Подставляя (21) в (19), легко видеть, что последний член выражения (19) можно опустить, если распространить суммирование по k во втором члене до значения $k=n$. Тогда (19) перейдет в формулу (15). В этом доказательстве был использован явный вид только величины $\delta^{\pm}_{k,\,k+1}$. Это обязано тому, что $\delta^{\pm}_{k,\,k+1}$ связаны лишь со слоями пластины, расположенными справа от $(l-1)$-го, так как из формулы (15) видно, что индекс k величин $\delta^{\pm}_{k,\,k+1}$ принимает значения от $k=l$ до $k=n$. Из той же формулы (15) видно, что $\gamma^{\pm}_{k,\,k+1}$ связаны со слоями пластины, находящимися слева от $(l+1)$-слоя, так как индекс k величины $\gamma^{\pm}_{k,\,k+1}$ принимает значения от $k=0$ до $k=l-1$. Поэтому для окончательного доказательства формулы (15) с использованием также явного вида $\gamma^{\pm}_{k,\,k+1}$, необходимо рассмотреть случай, когда дополнительный слой добавляется перед $(n-1)$-слойной пластиной. Для этого в качестве такой вспомогательной $(n-1)$-слойной пластины возьмем пластину, которая состоит из первого слоя с параметрами a_2 и $\varepsilon_2(\omega)$, второго слоя a_3 и $\varepsilon_3(\omega)$ и так далее до $(n-1)$-го слоя a_n и $\varepsilon_n(\omega)$ и расположим ее так, чтобы до пластины $(z<a_1)$ была среда с диэлектрической постоянной $\varepsilon_n(\omega)$, а за пластиной $\left(z>\sum\limits_{j=1}^{n} a_j\right)$ с $\varepsilon_{n+1}(\omega)$. Если теперь к этой вспомогательной $(n-1)$-слойной пластине добавить впереди слой с параметрами a_1 и $\varepsilon_1(\omega)$, а до пластины взять среду с диэлектрической постоянной $\varepsilon_0(\omega)$, то получим нашу n-слойную пластину, параметры $(l+1)$-го слоя которой совпадут с параметрами l-того слоя вспомогательной $(n-1)$-слойной пластины. Доказательство же этого случая аналогично предыдущему.

4. Итак, из формул (5), (6) и (7) следует, что Фурье-компоненты тангенциальной составляющей электрического вектора отраженного поля излучения в произвольном слое $(l=1, 2, \cdots, n)$ n-слойной пластины, а также до пластины $(l=0)$, имеет следующий вид:

$$\vec{E}_{lnt}=\frac{ie\,\vec{\varkappa}}{2\pi^2}\cdot\frac{e^{i\lambda_l\sum\limits_{j=1}^{l-1}a_j}}{\sum\limits_{(\pm)}\left(\prod\limits_{r=0}^{n}\rho^{\pm}_{r,\,r+1}\,e^{\sum\limits_{j=1}^{n}(\pm i\lambda_j a_j)}\right)}\times$$

$$\times\left[\sum_{k=0}^{l-1}\left(\prod_{s=k+1}^{l-1}\rho_s\,e^{i\frac{\omega}{v}\sum\limits_{j=1}^{k}a_j}\sum_{(\pm)}\left(\prod_{r=0}^{k-1}\rho^{\pm}_{r,\,r+1}\,\gamma^{\pm}_{k,\,k+1}\prod_{r=l}^{n}\rho^{\pm}_{r,\,r+1}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\,e^{i\lambda_l a_l+\sum\limits_{j=1}^{k}(\pm i\lambda_j a_j)+\sum\limits_{j=l+1}^{n}(\pm i\lambda_j a_j)}\right)\right)+\sum_{k=l}^{n}\left(\prod_{s=l+1}^{k}\rho_s\,e^{i\frac{\omega}{v}\sum\limits_{j=1}^{k}a_j}\sum_{(\pm)}\times\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\left(\prod_{r=0}^{l-1}\rho^{\pm}_{r,\,r+1}\,\delta^{\pm}_{k,\,k+1}\prod_{r=k+1}^{n}\rho^{\pm}_{r,\,r+1}\,e^{\sum\limits_{j=1}^{l-1}(\pm i\lambda_j a_j)+\sum\limits_{j=k+1}^{n}(\pm i\lambda_j a_j)}\right)\right)\right], \qquad (22)$$

где t — означает тангенциальную компоненту, $\sum\limits_{(\pm)}$ — суммирование по всем возможным комбинациям плюс и минус в сумме $\Sigma\,(\pm i\lambda_j a_j)$ стоящей в экспоненте под знаком $\sum\limits_{(\pm)}$. Величины ρ_s; $\rho^{\pm}_{r,\,r+1}$; $\gamma^{\pm}_{k,\,k+1}$; $\delta^{\pm}_{k,\,k+1}$ задаются формулами (7) и (16), а их верхние знаковые индексы определяются согласно правилам, приведенным в п. 2 и 3 курсивом.

Легко видеть, что если в системе уравнений (4) поля E''_l и E'_l написать формально в виде

$$E''_l \, e^{-i\left(\frac{\omega}{v}+\lambda_l\right)\sum\limits_{j=1}^{n} a_j + i\left(\frac{\omega}{v}+\lambda_l\right)\sum\limits_{j=1}^{n} a_j}; \quad E'_l \, e^{-i\left(\frac{\omega}{v}-\lambda_l\right)\sum\limits_{j=1}^{n} a_j + i\left(\frac{\omega}{v}-\lambda_l\right)\sum\limits_{j=1}^{n} a_j},$$

затем экспоненту $e^{i\frac{\omega}{v}\sum\limits_{j=1}^{n} a_j}$ перенести в правую часть системы, всюду, за исключением неизвестных, сделать замену индексов, $n+1-m \rightleftarrows m$ $(m=0, 1, \cdots, n+1)$ не изменяя пределов суммирования, изменить знак скорости $v \to -v$ (заметим, что $p_{r,\,r+1} = -p_{r+1,\,r}$; $z_{r,\,r+1} = -z_{r+1,\,r}$; и $\sum\limits_{j=l}^{n} a_{n+1-j} = \sum\limits_{j=1}^{n+1-l} a_j$) и после этого ввести обозначения

$$E'_{n+1-l} = E''_l \, e^{i\left(\frac{\omega}{v}-\lambda_{n+1-l}\right)\sum\limits_{j=1}^{n} a_j}, \tag{23}$$

$$E''_{n+1-l} = E'_l \, e^{i\left(\frac{\omega}{v}+\lambda_{n+1-l}\right)\sum\limits_{j=1}^{n} a_j}, \tag{24}$$

то система уравнений (4) в целом не изменится (изменится только порядок написания уравнений попарно на обратный). Следовательно, Фурье-компоненты тангенциальных составляющих электрических векторов прошедших полей мы можем найти с помощью формулы (23), зная эти же компоненты для отраженных полей, если в последних сделать замену $v \to -v$; $n+1-m \to m$ (не меняя пределов сумм и произведений). С помощью же формулы (24) аналогично мы можем найти отраженные поля, зная прошедшие.

Таким образом, с помощью формулы (2), (3), (22) и (23) получаются все электрические и магнитные вектор полей излучения до пластины, в слоях пластины, и за пластиной.

Из системы уравнений (4) следует также, что в каждом слое пластины прошедшая волна E'_l равна отраженной E''_l, если только в последней заменить λ_l, соответствующее данному слою на $-\lambda_l$:

$$E'_l = E''_l \, (\lambda_l \to -\lambda_l) \qquad (l = 1, 2, \cdots, n).$$

При $n=0$ выражения, получающиеся из формул (22) и (23), совпадают с соответствующими формулами работы [6], когда заряженная частица пролетает из одной полубесконечной среды в другую.

Если взять $\varepsilon_0 = \varepsilon_{n+1} = 1$, то при $n=1, 2, 3$ выражения, получающиеся из формул (22) и (23), совпадают с соответствующими формулами работ [1—3].

Ереванский физический институт

Поступила 7 марта 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. М. Гарибян, Г. А. Чаликян*, ЖЭТФ, 35, 1282 (1958). Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 12, № 3 (1959).
2. *Г. М. Гарибян, М. М. Мурадян*, Изв. АН АрмССР, Физика, 1, 310 (1966)
3. *М. М. Мурадян*, Изв. АН АрмССР, Физика, 2, 343—351 (1967).
4. *А. Г. Ситенко*, ДАН СССР, 98, 377 (1954).
5. *Л. Я. Окунев*, Высшая алгебра, Учпедгиз, М., 1958.
6. *Г. М. Гарибян*, ЖЭТФ, 33 (1957).

ԼԻՑՔԱՎՈՐՎԱԾ ՄԱՍՆԻԿԻ ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԵՐԸ ԲԱԶՄԱՇԵՐՏ ԹԻԹԵՂԻ ՄԻՋՈՎ ԱՆՑՆԵԼԻՍ

Գ. Մ. ՂԱՐԻԲՅԱՆ, Մ. Մ. ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ

Հաշված են ճառագայթման դաշտերը, որոնք առաջանում են, երբ լիցքավորված մասնիկը ուղղահայաց անցնում է կամավոր թվով և կամավոր հաստությամբ տարբեր նյութերի շերտերից կազմված թիթեղի միջով։

Ստացված է ընդհանուր բանաձև (22), որի միջով հնարավոր է ստանալ ճառագայթման դաշտերը ինչպես մինչև թիթեղը այնպես էլ թիթեղի շերտերում և թիթեղից հետո։

ON THE ELECTROMAGNETIC FIELDS OF THE CHARGED PARTICLE PASSING THROUGH A MANY-LAYER PLATE

G. M. GARIBIAN AND M. M. MOORADIAN

The electromagnetic fields arising when the charged particle passes normally through a many-layer plate composed of arbitrary number of layers of various thickness of different substances are calculated. The obtained general formula (28) gives a possibility to calculate the radiation fields in the plate and out of it.