

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНО-СЖИМАЕМОЙ ГРАВИТИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

Р. С. ОГАНЕСЯН

Изучаются малые колебания в изотермической самогравитирующей среде цилиндрической симметрии с учетом сжимаемости и неоднородности распределения плотности в равновесном состоянии.

Линеаризация исходной системы гидродинамических уравнений и уравнений гравитационного поля проводится по методу работы [1]. В качестве граничных условий задачи используется требование конечности полученных решений по всему объему, занятому гравитирующей материей [2].

Установлено, что сочетание методов работ [1, 2, 3] при решении этой задачи дает возможность указать лишь на ограниченность спектра частот возмущений и приближенную область изменения критической длины волны.

Вопросам устойчивости цилиндрической конфигурации (жидкая струя, плазменный шнур, гравитирующий цилиндр) по отношению к малым колебаниям посвящено много работ.

Одновременный учет факторов сжимаемости и неоднородности распределения плотности при рассмотрении устойчивости самогравитирующих систем приводит к сложным, даже в линейном приближении, уравнениям. Поэтому часто пренебрегают либо сжимаемостью, либо неоднородностью. В работах [4—8 и т. д.] не учитывается сжимаемость и рассматривается устойчивость жидких однородных и неоднородных цилиндрических конфигураций. В работах [9—11 и т. д.], учитывая сжимаемость газовых цилиндров, пренебрегают неоднородностью распределения плотности в равновесном состоянии. В работах [12, 14] для учета этих двух факторов рассматривается локальная устойчивость, в ряде случаев находятся критерии устойчивости методом Релея-Ритца без нахождения спектра частот.

Вообще говоря, определение спектра частот является существенным в теории малых колебаний, поскольку из него автоматически получается критерий устойчивости.

Для решения рассматриваемой задачи в основу полагаются уравнения гидродинамики и гравитационного поля

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\text{grad } P - \rho \text{ grad } U, \\ P &= \frac{\theta}{m} \rho = \frac{R}{\mu} \rho T; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0, \\ \nabla^2 U &= 4\pi G \rho. \end{aligned} \tag{1}$$

В рамках линейной теории решение этой системы уравнений представляется в виде

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho; \quad P = P_0 + \delta P; \quad U = U_0 + \delta U, \quad (2)$$

где ρ_0 , P_0 и U_0 являются решениями следующей системы уравнений равновесного состояния:

$$\begin{aligned} \text{grad } P_0 &= -\rho_0 \text{grad } U_0, \\ P_0 &= \frac{\theta}{m} \rho_0; \quad \nabla^2 U_0 = 4\pi G \rho_0, \end{aligned} \quad (3)$$

а $\delta\rho$, δP , δU — суть подлежащие определению малые изменения соответствующих величин. Они выражаются через вектор смещения $\vec{\xi} = (\xi_r, \xi_z)$ следующим образом [1]:

$$\delta\rho = -\text{div}(\rho_0 \vec{\xi}); \quad \delta P = -\frac{\theta}{m} \text{div}(\rho_0 \vec{\xi}), \quad \delta U = (\vec{\xi} \text{grad } U_0). \quad (4)$$

Предполагается, что возмущения симметричны относительно оси z . Имея в виду (2), (3), (4), исходную систему уравнений (1) после линеаризации можно представить в виде [15]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{\xi}}{dt^2} &= -\text{grad } \Phi, \\ \Phi &= -\frac{\theta}{m} \left\{ \text{div} \vec{\xi} + \frac{2\xi_r}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Следовательно, для решения поставленной задачи необходимо знать закон распределения плотности ρ_0 в равновесном состоянии.

Из (3) видно, что для нахождения ρ_0 необходимо решить нелинейное уравнение относительно самосогласованного потенциала гравитационных сил вида

$$\begin{aligned} \nabla^2 U_0 &= 4\pi G \rho(0) e^{-\frac{m}{\theta} U_0}, \\ \rho_0 &= \rho(0) e^{-\frac{m}{\theta} U_0}. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнение (6) не имеет решения с постоянной плотностью распределения гравитирующей материи, поэтому при всякой попытке решить систему уравнений (5), полагая в ней $\rho_0 = \text{const}$, задача становится некорректной.

Точное и общее решение уравнения (6) с граничными условиями $U_0'(0) = U_0'(R) = 0$ имеет вид [16, 17]

$$U_0(r) = \frac{2\theta}{m} \ln(1 + \gamma_1^2 r^2). \quad (7)$$

Для плотности находим

$$\rho_0 = \rho(0) (1 + \gamma_1^2 r^2)^{-2}, \quad (8)$$

где $\rho(0)$ — плотность на оси симметрии $r = 0$, а

$$\gamma_1^2 = \frac{\pi G \rho(0) m}{2\theta} = \frac{\pi G \rho(0) \mu}{2RT}. \quad (9)$$

Основная характерная черта этого решения — быстрое, но монотонное убывание плотности с расстоянием и конечность массы единицы длины. У рассматриваемой системы фактически нет резко очерченной граничной поверхности; давление и плотность обращаются в нуль только в бесконечности.

Перепишем систему уравнений (5) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} &= -\frac{\theta}{m} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \operatorname{div} \vec{\xi} + \frac{2\xi_r}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} \right\}, \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \operatorname{div} \vec{\xi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_r) \right\} &= \frac{\theta}{m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ \operatorname{div} \vec{\xi} + \frac{2}{r} \frac{\xi_r}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

и представим ее решение так:

$$\begin{aligned} \xi_r(r, z, t) &= \tilde{\xi}_r(r) \exp \{i(\omega t - kz)\}, \\ \operatorname{div} \vec{\xi} &= F(r) \exp \{i(\omega t - kz)\}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\tilde{\xi}_r(r)$ и $F(r)$ — неизвестные функции, для определения которых с помощью (11) и (10) получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} (k^2 c^2 - \omega^2) F(r) &= - \left\{ \frac{\omega^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{\xi}_r) + k^2 c^2 \frac{2\xi_r}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} \right\}, \\ \omega^2 \tilde{\xi}_r &= -c^2 \left\{ \frac{\partial F}{\partial r} + 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\xi_r}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} \right) \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

($c = \theta/m$ скорость звука).

Исключая $F(r)$, с учетом (8) получим

$$\tilde{\xi}_r + \frac{1 - 7\gamma_1^2 r^2}{r(1 + \gamma_1^2 r^2)} \tilde{\xi}_r' - \left\{ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{8\gamma_1^2 (1 - \gamma_1^2 r^2)}{(1 + \gamma_1^2 r^2)^2} \right\} \tilde{\xi}_r = 0. \quad (13)$$

Теперь необходимо решить это уравнение и с помощью граничных условий установить связь между ω и k , то есть найти дисперсионные уравнения или спектр частот.

Формальное решение уравнения (13) можно найти с помощью обобщенных степенных рядов. Однако при этом между неизвестными коэффициентами ряда получается многочленная рекуррентная формула, которая чрезвычайно осложняет рассмотрение вопросов сходимости ряда.

В данной задаче доказательство сходимости полученных решений очень существенно в связи с получением спектра частот. Зависимость ω от k мы должны выбрать таким образом, чтобы уравнение (13) во всей области переменной r ($0 \leq r \leq \infty$) оказалось конечным.

Таким образом, естественное требование конечности полученных решений выступает в роли граничных условий и определяет спектр частот.

Такой подход применяется при исследовании устойчивости не только гравитирующих, но и плазменных неоднородных образований [2, 18].

Ввиду непригодности формального решения поступим иначе.

Прежде всего рассмотрим возможность распространения звуковых колебаний, полагая в (13) $\omega^2 |k^2 = c^2$.

Далее, обозначая $1 + \gamma^2 r^2 = x$, после некоторых преобразований уравнение (13) можно привести к уравнению класса уравнений Фукса

$$\tilde{\xi}_r + \left(\frac{1}{x-1} - \frac{4}{x} \right) \tilde{\xi}_r' - \left[\frac{1}{4(x-1)} - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x} \right] \tilde{\xi}_r = 0, \quad (14)$$

которое, в свою очередь, с помощью подстановки

$$\tilde{\xi}_r = x^p (x-1)^g u(x), \quad (15)$$

приводится к гипергеометрическому уравнению Гаусса путем подходящего выбора p и g ввиду их произвольности [19].

Подставляя (15) в (14), для определения $u(x)$ получим

$$x(x-1)u'' + [(2p+2g-3)x - (2p-4)]u' + (p-2)(1+2g)u = 0, \quad (16)$$

где

$$p^2 - 5p + 4 = 0, \quad g^2 = 1/4, \quad (17)$$

или, обозначая

$$\alpha + \beta + \gamma = 2p + 2g - 3; \quad \alpha\beta = (p-2)(1+2g); \quad \gamma = 2p - 4, \quad (18)$$

уравнение (16) преобразуется к виду

$$x(x-1)u'' + [\alpha + \beta + 1)x - \gamma]u' + \alpha\beta u = 0. \quad (19)$$

Решая систему алгебраических уравнений (17) и (18), получим следующие возможные четыре комбинации параметров гипергеометрического уравнения Гаусса (19):

- | | |
|--|---|
| 1) $p = 4, \quad g = 1/2,$
$(\alpha = 1, \beta = \gamma = 4)$ | 2) $p = 4, \quad g = -1/2,$
$(\alpha = 3, \beta = 0, \gamma = 4),$ |
| 3) $p = 1, \quad g = 1/2,$
$(\alpha = 1, \beta = \gamma = -2),$ | 4) $p = 1, \quad g = -1/2,$
$(\alpha = -3, \beta = 0, \gamma = -2).$ |

Решения (19) при $\alpha = 1, \beta = \gamma$ [1 и 3] совпадают независимо от конкретных значений параметров β :

$$u_1(x) = u_3(x) = \left(\frac{1}{x} \right)^\alpha F \left(\alpha, 1 + \alpha - \gamma, 1 + \alpha - \beta, \frac{1}{x} \right) = \\ = \frac{1}{x} F \left(1, -2, -2, \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x-1}; \quad x > 1. \quad (20)$$

Решения 2) и 4), соответствующие $\beta = 0$, также совпадают, и согласно определению гипергеометрической функции Гаусса находим $u_2 = u_4 = 1$.

Подставляя эти значения в (15), получим для $\tilde{\xi}_r$ два решения

$$\tilde{\xi}_r = x^4 (1-x)^{-1/2} = (\eta r)^{-1} (1 + \eta^2 r^2)^4, \quad (21)$$

$$\tilde{\xi}_r = x (1-x)^{-1/2} = (\eta r)^{-1} (1 + \eta^2 r^2). \quad (22)$$

Но из них только решение (21) удовлетворяет первому уравнению системы (12) при $\omega^2 = k^2 c^2$. Полученное решение (21) не удовлетворяет условию конечности, оно расходится при $r \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$. Следовательно, в исходном уравнении (12) параметр $k^2 - \omega^2/c^2 \neq 0$, то есть в рассматриваемой среде (как и в среде плоской симметрии [3]) возможность существования звуковых колебаний исключается. Эта возможность не исключается в работе [2].

Теперь вернемся к решению исходного уравнения (13), которое с помощью обозначения $\eta r = x$ можно привести к виду

$$\tilde{\xi}_r'' + \frac{1-7x^2}{x(1+x^2)} \tilde{\xi}_r' - \left[x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{8(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \right] \tilde{\xi}_r = 0, \quad (23)$$

где

$$\alpha^2 = \eta^{-2} \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) = \frac{2\theta}{\pi G \rho(0) m} \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right]. \quad (24)$$

Рассмотрим решение уравнения (23) в двух предельных случаях, когда $x \ll 1$ и $x \gg 1$.

При $x \ll 1$ имеем

$$\tilde{\xi}_r'' + \frac{1}{x} \tilde{\xi}_r' - \left(\sigma^2 + \frac{1}{x^2} \right) \tilde{\xi}_r = 0, \quad (25)$$

где

$$\sigma^2 = \alpha^2 + 8 = \frac{2\theta}{\pi G \rho(0) m} \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) + 8.$$

σ^2 может принимать как положительные так и отрицательные значения в зависимости от знака $k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$.

В обоих случаях при $x = 0$ получаются конечные решения в виде

$$\tilde{\xi}_r = A I_1(\sigma x) = A I_1(\sigma \eta r) \quad \text{при } \sigma^2 > 0, \quad (26)$$

$$\tilde{\xi}_r = A_1 J_1(\sigma x) = A_1 J_1(\sigma \eta r) \quad \text{при } \sigma^2 < 0. \quad (27)$$

Выбор между этими решениями зависит от знака параметра $k^2 - \omega^2/c^2$, который однозначным образом можно определить путем рассмотрения второго предельного случая ($x \gg 1$). При этом из (23) получим

$$\tilde{\xi}_r'' - \frac{7}{x} \tilde{\xi}_r' + \left(\alpha^2 - \frac{7}{x^2} \right) \tilde{\xi}_r = 0, \quad (28)$$

Путем замены переменной $t = ix$ уравнение (28) можно привести к виду

$$\tilde{\xi}_r'' - \frac{7}{t} \tilde{\xi}_r' + \left[a^2 + \frac{7}{t^2} \right] \tilde{\xi}_r = 0. \quad (29)$$

Решение этого уравнения представим в виде

$$\tilde{\xi}_r = t^4 \varphi(t). \quad (30)$$

Для определения неизвестной функции $\varphi(t)$ получим уравнение Бесселя

$$\varphi'' + \frac{1}{t} \varphi' + \left(a^2 - \frac{9}{t^2} \right) \varphi(t) = 0,$$

общее решение которого есть

$$\varphi(t) = A J_3(at) + B N_3(at).$$

Полагая $t = ix$, получим

$$\varphi = A I_3(ax) + B K_3(ax).$$

В силу конечности решения при $x = \eta r \rightarrow \infty$ должно $A = 0$. Следовательно, для $\tilde{\xi}_r$ согласно (30) имеем

$$\tilde{\xi}_r = B (\eta r)^4 K_3(\eta a r). \quad (31)$$

Пользуясь асимптотическим представлением функции Бесселя при больших r , получаем

$$\tilde{\xi}_r = B (\eta r)^{1/4} \left(\frac{\pi}{2a} \right)^{1/2} e^{-a\eta r}. \quad (32)$$

Поскольку $a \neq 0$ полученное решение (32) всегда конечно при больших, но конечных r .

Требование конечности решения при $r \rightarrow \infty$ приводит к условию $a > 0$, или из (24) имеем

$$\frac{2\theta}{\pi G \rho(0) m} \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) = n > 0. \quad (33)$$

η^2 оставляется из соображения размерности, n — положительное число. Из (33) находим значение ω^2

$$\omega^2 = k^2 c^2 - \frac{1}{2} \pi G \rho(0) n, \quad (34)$$

которое представляет собой полный спектр частот.

Докажем, что n — ограниченное число. Допустим, что $n \rightarrow \infty$. Следовательно и ω неограниченно возрастает, тогда, пользуясь асимптотическим значением функции Бесселя, из (20) имеем

$$\tilde{\xi}_r(r) = A \left(\frac{1}{2\pi\sigma\eta r} \right)^{1/2} e^{\sigma\eta r} \simeq A \left(\frac{1}{2\pi\eta n r} \right)^{1/2} e^{n\eta r}.$$

Из последней формулы видно, что при неограниченном возрастании n $\tilde{\xi}_r \rightarrow \infty$ а это противоречит требованию конечности. Таким образом, изменение n происходит в конечной области, то есть n ограничено. Более конкретно конечность n можно доказать пользуясь условием $|\partial\rho/\partial_0| \ll 1$. Но аналитически это сделать невозможно в виду сложности выражения для решений. Поэтому при необходимости надо численно провести вычисления, что не входит в задачу настоящей работы.

Существенно отметить, что аналогичный спектр частот был получен и для плоской симметрии при точном решении линеаризованного уравнения относительно ξ . Следовательно, можно утверждать, что точное или численное решение (23) к качественно новому результату не приведет.

Спектр частот можно получить также путем исследования пространственно-временного поведения компоненты ξ_z , которая легко вычисляется с помощью ξ_r . Приведем значение ξ_z без вычисления

$$\tilde{\xi}_z = e^{i(\omega t - k z)} \begin{cases} \frac{Aik\eta c^2}{\omega^2 - k^2 c^2} \{ \tau I_0(\sigma\eta r) - 8\eta r I_1(\sigma\eta r) \}, & \eta r \ll 1 \\ -\frac{Bic^2\eta^4 r^3}{\omega^2 - k^2 c^2} \{ \tau K_3(x\eta r) + x\eta r K_2(x\eta r) \}, & \eta r \gg 1 \end{cases}.$$

Из (34) видно, ω^2 может принимать как положительные, так и отрицательные значения. При положительных значениях ω^2 распространяются малые колебания, амплитуда которых постепенно уменьшается по r , обращаясь в нуль на бесконечности. При отрицательных значениях ω^2 амплитуда колебаний неограниченно возрастает со временем. Условием $\omega^2 = 0$ определяется критическая длина волны

$$\lambda_c^2 = \frac{8\pi c^2}{G\rho(0)n} = \frac{8\pi RT}{G\rho(0)\mu n}, \quad (35)$$

область изменения которой определяется изменением n . При подходящем выборе n из (35) получается критерий устойчивости, установленный в работе [11].

Свойства проявления гравитационной неустойчивости цилиндрической конфигурации не зависят от состояния вещества. Для жидких конфигураций λ_c определяется точно, а при учете факторов сжимаемости и неоднородности можно лишь приблизительно указать область изменения λ_c .

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. A. B. Bernstein, E. A. Frieman, M. D. Kruskal, R. M. Kulsrud, Proc. Roy. Soc., 244, 17 (1958).
2. P. Ledoux, Ann. Astrophys. 14, 438 (1951).
3. P. С. Оганесян, Изв. АН АрмССР, Физика, 1, 186 (1966).
4. С. Чандрасекар, Э. Ферми, ПСФ, 2, 108 (1954).
5. P. С. Оганесян, Астрон. Ж., 33, 928 (1956).
6. G. S. Murty, Arkiv fis. 19, № 6, 483 (1961).
7. J. M. Gandhi, Astrophys. J., 135, 2 (1962).
8. В. А. Варданян, Изв. АН АрмССР (серия физ.-мат. наук), 17, № 2, 127 (1964).
9. Э. А. Дибай, Астрон. Ж., 34, 954 (1957).
10. A. G. Pacholczyk, Acta astron., 10, № 1, 1 (1960).
11. Т. В. Попова, Астрон. Ж. 39, 5 (1962).
12. A. G. Pacholczyk, Atti della Accademia delle Scienze di Torino, 94, 1 (1960).
13. A. G. Pacholczyk, Acta astron., 13, № 1, 1 (1963).
14. J. S. Stodolkiewicz, Acta astron., 13, № 1, 30 (1963).
15. А. В. Северный, Успехи астроном. наук 2, 206 (1941).
16. А. А. Власов, Вестник МГУ, 4, 95 (1957).
17. А. А. Власов, Статистические функции распределения, М., 1966.
18. Б. А. Трубишков, Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций 1, М. (1958).
19. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М. (1961).

ՓՈՔՐ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՀԱՄԱԶԱՓՈՒԹՅԱՄԲ ՕԺՏՎԱԾ
ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ-ՍԵՂՄԵԼԻ ԳՐԱՎԻՏԱՅԻՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ

Ռ. Ս. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

Ուսումնասիրվում են փոքր տատանումները իզոթերմիկ դրանային համաչափությամբ օժտված սեղմելի զրավիտացիոն միջավայրում, հաշվի առնելով խտության անհամասեռ բաշխումը հավասարակշռության վիճակում:

Հիդրոդինամիկայի և զրավիտացիոն դաշտի հիմնական հավասարումների գծայնացումը կատարված է [1] աշխատանքի մեթոդով: Զրավիտացիոն միջավայրի ամբողջ ծավալում ստացված լուծումների վերջավոր լինելու պահանջը համաձայն [2] աշխատանքի, օդտագործվում է որպես սահմանային պայման: Այդ մեթոդների զուգակցումը հնարավորություն է տալիս ցույց տալ միայն տատանումների հաճախականությունների սպեկտրի սահմանափակվածությունը և կրիտիկական ալիքի երկարության փոփոխության մոտավոր տիրույթը:

SMALL OSCILLATIONS IN THE ISOTHERMAL, INHOMOGENEOUSLY COMPRESSIBLE GRAVITATING MEDIUM OF CYLINDRICAL SYMMETRY

R. S. OGANESEYAN

It is considered the small oscillations in the isothermal self-gravitating medium of cylindrical symmetry taking into account the compressibility and the inhomogeneity of the density distribution in the equilibrium state using the linear system of hydrodynamic equations. It is obtained the spectrum of the frequencies, and it is shown the approximate region of the change of the critical wavelength.