Изв. АН Армянской ССР, Физика, 2, 79—84 (1967)

ВЛИЯНИЕ ЗАТУХАНИЯ КОЛЕБАНИЙ НА ПОПЕРЕЧНУЮ ДИССИПАТИВНУЮ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

С. А. ХЕЙФЕЦ

Теория поперечной диссипативной неустойчивости обобщена на случай, когда колебания частиц затухают. Показано, что затухание приводит к устойчивости (при выполнении неравенства $\alpha > V$) даже при отсутствии разброса частот частиц. Полученный критерий устойчивости важен для ускорителей и накопителей электронов и позитронов, рассчитанных на ультрарелятивистскую энергию.

В работах [1, 2] развита теория неустойчивости когерентных вертикальных колебаний частиц, возникающей из-за конечной проводимости стенок камеры ускорителя. Рассматриваемая неустойчивость связана с тем, что при конечной проводимости стенок сила, действующая на пучок со стороны электромагнитного поля самого пучка, имеет компоненту, синфазную с вертикальной составляющей скорости когерентных колебаний пучка. Это может привести к экспоненциальному росту амплитуды когерентных колебаний и к полной потере частиц.

В работах [1, 2] не принималось во внимание затухание колебаний, что приводило, например, к тому, что пучок частиц, не имеющий разброса частот и энергий, неустойчив при конечной проводимости стенок даже при очень малом числе частиц в пучке. Только разброс частот достаточной величины приводит в этом случае к стабилизации движения.

В настоящей работе теория поперечной диссипативной неустойчивости обобщена для затухающих колебаний.

Учет затухания особенно важен для больших релятивистских ускорителей и накопителей, синхротронное излучение которых приводит к быстрому затуханию колебаний.

Рассмотрение целиком будет основано на работе [1]. Мы не будем повторять всех выкладок, которые не зависят от затухания колебаний, взяв все необходимые выражения (а также обозначения) из этой работы. В частности, это относится к выражениям для электромагнитного поля, создаваемого пучком.

Для нашей цели достаточно выписать общее выражение для амплитуды вертикальной составляющей электромагнитной силы, действующей на пучок:

$$f_z \sim U + (1+i)\,V. \tag{1}$$

Здесь V—компонента силы, возникающая из-за конечной проводимости стенок, U—„нормальная“ составляющая.

При выводе дисперсионного соотношения мы будем использовать кинетическое уравнение для функции распределения ψ_t, учитывающее затухание вертикальных колебаний. Уравнение затухающих вертикальных колебаний имеет вид

$$\ddot{z} + 2\alpha\dot{z} + \nu_z^2\Omega^2 z = \frac{f_z}{m_0\gamma}, \tag{2}$$

где α — декремент затухания (радиационного). Кинетическое уравнение для одной степени свободы с затуханием [3] исследовалось в работе [4], где было показано, что при выполнении одного из двух условий

$$\alpha \ll \nu_z\Omega, \tag{3а}$$

$$\alpha t \gg 1 \tag{3б}$$

функция распределения ψ_t оказывается зависящей только от амплитуды колебаний и не зависит от их фазы. Функцию ψ_t в этом случае можно считать удовлетворяющей симметричному уравнению

$$\frac{\partial\psi_t}{\partial t} + \dot{\theta}\frac{\partial\psi_t}{\partial\theta} + \langle\dot{W}\rangle\frac{\partial\psi_t}{\partial W} + \dot{z}\frac{\partial\psi_t}{\partial z} - \nu_z^2\Omega^2 z\frac{\partial\psi_t}{\partial\dot{z}} -$$

$$-\alpha\frac{\partial}{\partial\dot{z}}(\dot{z}\psi_t) - \alpha\frac{\partial}{\partial z}(z\psi_t) = -\frac{f_z}{m_0\gamma}\frac{\partial\psi_t}{\partial\dot{z}}. \tag{4}$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что условие (3) выполнено, что справедливо во всех практически встречающихся случаях.

Правая часть уравнения (4), являющаяся возмущением, изменяющим распределение частиц, пропорциональна силе, действующей на пучок со стороны электромагнитного поля пучка.

Если пренебречь этим членом, то оставшееся уравнение совместно с условием нормировки определяет равновесную функцию распределения частиц ψ. Теперь неудобно выбрать в качестве аргумента этой функции амплитуду колебаний a, поскольку при наличии затухания амплитуда не остается постоянной. В качестве соответствующей переменной мы выберем начальное значение амплитуды a_0, определяющей вертикальные колебания частиц.

$$z = a_0 e^{-\alpha t}\sin\varphi, \tag{5}$$

$$\dot{z} = a_0 e^{-\alpha t}\nu_z\Omega\cos\varphi, \tag{6}$$

$$a_0^2 = e^{2\alpha t}(z^2 + \dot{z}^2/\nu_z^2\Omega^2). \tag{7}$$

При переходе от переменной a к переменной a_0 необходимо одновременно преобразовать и функцию ψ, как это видно из условия нормировки [4]:

$$\psi[a(t),\ W,\ t] = \Phi(a_0,\ W)\,e^{2\alpha t}. \tag{8}$$

Используя выражения (5—8), нетрудно убедиться, что равновесная функция ψ удовлетворяет уравнению (4) без правой части.

При наличии возмущения будем искать решение уравнения (4) в виде бегущих по азимуту θ волн:

$$\psi_t = e^{2\alpha t}\left[\Phi(a_0, W) + \psi_1(a_0, \varphi, W, t)\, e^{i(n\theta-\omega t)}\right], \tag{9а}$$

$$\langle f_z \rangle = P_n(U + (1+i)V)\frac{\nu_z\omega_0 m_0}{\pi e}\gamma e^{i(n\theta-\omega t)}, \tag{9б}$$

$$\langle \dot W \rangle = 0. \tag{9в}$$

Последнее уравнение является следствием того, что мы рассматриваем аксиально-однородный пучок. Мы здесь не рассматриваем затухания продольных колебаний, поскольку оно не влияет на решение и не меняет результата.

Произведя необходимые выкладки и отбрасывая члены квадратичные по возмущению, получим следующее уравнение для функции ψ_1:

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial t} + i(n\Omega-\omega)\psi_1 + \nu_z\Omega\frac{\partial\psi_1}{\partial\varphi} = -\frac{\omega_0 P_n(U+(1+i)V)}{\pi e\Omega}\frac{\partial\Phi}{\partial a_0}e^{\alpha t}\cos\varphi.$$

Решением его является

$$\psi_1 = \frac{\nu_z\omega_0 P_n(U+(1+i)V)}{\pi e\nu_z\Omega}\frac{\partial\Phi}{\partial a_0}\frac{[\alpha + i(n\Omega-\omega)]\cos\varphi + \nu_z\Omega\sin\varphi}{(\omega - n\Omega + i\alpha)^2 - \nu_z^2\Omega^2}e^{\alpha t}. \tag{10}$$

Вычислив с помощью (10) дипольный момент на единицу длины

$$P_n(\theta, t) = p_n \exp i(n\theta - \omega t),$$

где

$$p_n = e\int z\psi_1 a_0 da_0 d\varphi dW,$$

получим дисперсионное уравнение

$$\nu_z\omega_0[U + (1+i)V]I = 1, \tag{11}$$

где

$$I = \int\frac{(\partial h/\partial a_0)\, a_0^2 da_0 l(W)dW}{(\omega - n\Omega + i\alpha)^2 - \nu_z^2\Omega^2}. \tag{12}$$

Уравнение (11) определяет частоту (комплексную) поперечного вертикального движения и является основным для анализа устойчивости движения.

Рассмотрим сначала пучок, все частицы которого имеют одинаковую энергию $l(W) = \delta(W)$, а частоты обращения $\Omega = \omega_0$ и колебаний ν_z не зависят от амплитуды. Уравнение (11) в этом случае приобретает вид $\left(\text{так как } \int h'(a_0)\, a_0^2\, da_0 = -2\right)$

$$(\omega - n\omega_0 + i\alpha)^2 = \nu_z^2\omega_0^2 - 2\nu_z\omega_0(U + V + iV).$$

При выполнении неравенства $U, V \ll \nu_z\omega_0$ (что обычно имеет место) отсюда получаем

$$\omega = (n \pm \nu_z)\,\omega_0 \mp (U + V) - i\alpha \mp iV. \tag{13}$$

Верхние знаки относятся к всегда затухающей „быстрой волне“, нижние — к „медленной“. Как видно из соотношения (13), для $n > \nu_z$ амплитуда „медленной“ волны затухает или экспоненциально растет в зависимости от знака неравенства

$$\alpha > V, \tag{14а}$$

либо

$$\alpha < V. \tag{14б}$$

Неравенство (14а) является критерием устойчивости для затухающих колебаний. Оно всегда выполняется для пучка достаточно малой интенсивности, так как V пропорционально числу частиц в пучке.

Поскольку наибольший интерес с точки зрения устойчивости представляет „медленная волна“, то нас в дальнейшем будут интересовать значения ω, лежащие достаточно близко к значению $(n-\nu_z)\omega_0$. В этом случае дисперсионное соотношение можно упростить:

$$(U + V + iV)\int \frac{h'(a_0)\,a_0^2 da_0 l\,(W)\,dW}{\omega - (n - \nu_z)\,\Omega + i\alpha} = -2. \tag{11а}$$

Не будем производить далее полного анализа соотношения (11а), ограничимся одним лишь примером, чтобы продемонстрировать, как изменяются результаты при учете затухания.

Будем считать, что Ω и ν_z не зависят от амплитуды колебаний. Учтем лишь зависимость параметров ускорителя от энергии частиц:

$$\Omega = \omega_0 + (\partial\Omega/\partial W)\cdot W,$$
$$\nu_z = \nu_0 + (\partial\nu_z/\partial W)\cdot W.$$

Далее примем для невозмущенного распределения частиц по энергиям гауссово распределение

$$l\,(W) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,q}\, e^{-W^2/q^2}. \tag{15}$$

Дисперсионное соотношение в этом случае приобретает следующий вид

$$\zeta\,(x_1) = -\frac{B}{U + V + iV}. \tag{11б}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\zeta\,(x_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}dx}{x - x_1},$$

$$x_1 \equiv y + iz = \frac{\delta + i\alpha}{B}, \qquad \delta = \omega - (n - \nu_0)\,\omega_0.$$

Можно показать, что функция ζ имеет следующий вид

$$\zeta(x_1) = i\sqrt{\pi}e^{-x_1^2} - 2e^{-x_1^2}\int_C e^{x^2}dx. \tag{16}$$

Контур интегрирования в (16) соединяет точки 0 и x_1. В случае, когда x_1 почти действительное число (т. е. $|\mathrm{Im}\, x_1| \ll |\mathrm{Re}\, x_1|$), функция $\zeta(x_1)$ имеет следующую асимптотику:

$$\zeta(x_1) \simeq i\sqrt{\pi}\; e^{-(\mathrm{Re}\, x_1)^2} - \frac{1}{x_1}, \qquad |x_1| \gg 1.$$

Рассмотрим теперь практически важный случай $|U| \gg V$. Решение уравнения (11б) в этом приближении должно удовлетворять требованию $|\mathrm{Re}\,\zeta| \gg |\mathrm{Im}\,\zeta|$, что возможно в асимптотической области. Разделяя действительную и мнимую части уравнения, получим

$$\frac{y}{y^2+z^2} - \sqrt{\pi}\; e^{-(y^2-z^2)}\sin 2yz = \frac{B}{U}, \tag{17а}$$

$$\frac{z}{y^2+z^2} - \sqrt{\pi}\; e^{-(y^2-z^2)}\cos 2yz = \frac{BV}{U^2}. \tag{17б}$$

Приближенным решением этой системы (когда можно пренебречь вторыми слагаемыми в левых сторонах равенств) является

$$y = U/B,$$
$$z = V/B,$$

или $\delta = U + i(V - \alpha)$, что дает опять тот же критерий устойчивости (14а). Как видно из этого примера, при достаточно сильном затухании критерий устойчивости явно не зависит от разброса частиц по энергиям. Однако эта зависимость содержится в неявном виде, так как для справедливости подобного решения требуется выполнение неравенства $U \gg B$, зависящего от этого разброса. Если такое неравенство не выполнено, то нужно решать общее уравнение (11б). Если в системе (17) совершить предельный переход $z \to 0$ (что соответствует пренебрежению затуханием), то получится результат работы [1].

В заключение заметим, что критерий устойчивости (14а) имеет простой физический смысл. Переписав его в виде

$$\tau_{\text{рад}} < \tau_{\text{неуст}},$$

где $\tau_{\text{рад}} = 1/\alpha$ — время радиационного затухания, $\tau_{\text{неуст}} = 1/V$ — время развития неустойчивости, можно убедиться, что оно означает просто требование, чтобы радиационное затухание происходило быстрее, чем развивается неустойчивость.

Ереванский физический
институт

Поступила 20 мая 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. *L. F. Laslett, V. K. Neil, A. M. Sessler*, RSI, 36, 436 (1965).
2. *В. И. Балбеков, А. А. Коломенский*, АЭ, 19, 126 (1965).
3. *С. Чандрасекар*, Стохастические проблемы в физике и астрономии, ИЛ, М., 1947.
4. *С. А. Хейфец*, Потери частиц в современных циклических ускорителях, кандидатская диссертация, Ереван, 1960.

ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՐՄԱՆ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ԸՆԴԼԱՅՆԱԿԱՆ ԴԻՍԻՊԱՏԻՎ ԱՆԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

Ս. Ա. ՀԵՅՖԵՑ

Ընդլայնական դիսիպատիվ անկայունության տեսությունը ընդհանրացված է այն դեպքի համար, երբ մասնիկների տատանումները մարում են։ Ցույց է տրված, որ մարումը բերում է կայունության (եթե տեղի ունի $\alpha > V$ անհավասարությունը) նույնիսկ մասնիկների հաճախականությունների ցրվածության բացակայության դեպքում։

Կայունության ստացված չափանիշը կարևոր է ուլտրառելյատիվիստիկ էներգիաների դեպքում հաշված արագացուցիչների և էլեկտրոնների ու պոզիտրոնների կուտակիչների համար։

THE INFLUENCE OF THE DAMPING OF THE OSCILLATIONS ON THE TRANSVERSE DISSIPATIVE INSTABILITY

S. A. KHEIFETS

The theory of the transverse dissipative instability is generalized for the case of oscillation damping. It is shown that the damping brings to an stability (when the inequality $\alpha > V$ is fulfiled) even in case when there is no spread of particle frequencies. The obtained criterion of the stability is important for the acclerators and electron-positron storage rings of ultrarelativistic energy.