

ФОРМУЛЫ ФРЕНЕЛЯ ДЛЯ ГРАНИЦЫ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ С ГИРОТРОПНЫМ ДИЭЛЕКТРИКОМ

О. С. ЕРИЦЯН, О. С. МЕРГЕЛЯН

Рассмотрено отражение и преломление электромагнитных волн на границе изотропной среды с гиротропной диэлектрической средой. Рассмотрены случаи, когда оптическая ось гиротропной среды совпадает с нормалью к поверхности, а также случаи, когда оптическая ось направлена по касательной к поверхности раздела. Получены формулы Френеля для таких сред.

1. Пусть две среды с постоянными ϵ_1 и μ_1 и ϵ_{2lk} , μ_2 разделены плоскостью $z=0$, причем гиротропная среда, у которой ϵ_{2lk} есть

$$\epsilon_{2lk} = \begin{pmatrix} \epsilon_2 & -ig & 0 \\ ig & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

находится в полупространстве $z > 0$. Из изотропной среды падает электромагнитная волна

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\omega) \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (2)$$

где

$$\vec{k} = \vec{k}(k_x, k_z), \quad k_y = 0.$$

Вследствие симметрии задачи допущение $k_y = 0$ не нарушает общности.

Из уравнений поля имеем

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1 \mu_1 = k_x^2 + k_z^2,$$

где

$$k_x = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} \sin \vartheta = k_{1x}, \quad k_z = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} \cos \vartheta, \quad k_{1z} = -k_z. \quad (3)$$

Здесь $\vec{k}_1$ — волновой вектор отраженной волны, ϑ — угол между $\vec{k}$ и осью z .

В гиротропной среде имеем два значения для $\vec{k}_2$, причем вследствие непрерывности тангенциальной составляющей волнового вектора $k_x = k_{2x}^+ = k_{2x}^-$, а

$$k_{2z}^{\pm 2} = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_3 \mu_2 - \frac{\epsilon_3 + \epsilon_2}{2\epsilon_3} k_x^2 \pm$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{2\varepsilon_3}\right)^2 k_x^4 - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\mu_2 g^2}{\varepsilon_3} k_x^2 + \frac{\omega^4}{c^4} \mu_2^2 g^2}. \quad (4)$$

Кроме того, в гиротропной среде вместо условия поперечности $(\vec{k}E) = 0$ имеют место другие соотношения, а именно:

$$E_{2x}^{\pm} = \alpha_1^{\pm} E_{2z}^{\pm}, \quad \alpha_1^{\pm} = \frac{k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_3 \mu_2}{k_x k_{2z}^{\pm}},$$

$$E_{2y}^{\pm} = i \alpha_2^{\pm} E_{2z}^{\pm}, \quad \alpha_2^{\pm} = \frac{k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_3 \mu_2}{k_x k_{2z}^{\pm}} \cdot \frac{\frac{\omega^2}{c^2} \mu_2 g}{k_{2z}^{\pm 2} - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_3 \mu_2}, \quad (5)$$

аналогичные полученным в [1] для изотропной оптически активной среды.

Законы Снелля в этом случае примут вид: если ϑ_1 — угол отражения, а ϑ_2^+ и ϑ_2^- — углы преломления, под которыми идут волны с $\vec{k}_2^+$ и $\vec{k}_2^-$, то

$$\vartheta_1 = \vartheta, \quad \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta_2^{\pm}} = \frac{n_2^{\pm}}{n_1}, \quad (6)$$

где

$$n_1 = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}, \quad n_2 = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$$

$$n_2^{\pm} = \sqrt{n_2^2 + n_1^2 \sin^2 \vartheta \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_3} \pm \zeta}, \quad (7)$$

$$\zeta = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{2\varepsilon_3}\right)^2 n_1^4 \sin^4 \vartheta - \frac{\mu_2 g^2}{\varepsilon_3} n_1^2 \sin^2 \vartheta + \mu_2^2 g^2}.$$

Как видно из (6) и (7), показатель преломления гиротропной среды зависит от угла, под которым распространяется волна. При получении формул Френеля мы для простоты положим $\varepsilon_1 = \mu_1 = 1$, а вместо ε_2 и μ_2 будем писать просто ε и μ .

Для амплитуды отраженной волны получим

$$E_{1x} = \frac{1}{\Delta_0} \left\{ A^+ E_x - 2i \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon_3}{k_x} (\alpha_1^+ - \alpha_1^-) \cos \vartheta E_y \right\},$$

$$E_{1y} = \frac{1}{\Delta_0} \left\{ A^- E_y - 2i \frac{c}{\mu \omega} (k_{2z}^+ - k_{2z}^-) \alpha_2^+ \alpha_2^- E_x \right\}, \quad (8)$$

где

$$A^{\pm} = \alpha_1^+ \alpha_2^- \left(1 \pm \frac{c}{\mu \omega} k_{2z}^- \sec \vartheta \right) - \alpha_1^- \alpha_2^+ \left(1 \pm \frac{c}{\mu \omega} k_{2z}^+ \sec \vartheta \right) -$$

$$- \frac{\varepsilon_3}{\mu k_x} \alpha_2^+ \left(k_{2z}^{\pm} \pm \frac{\omega}{c} \mu \cos \vartheta \right) + \frac{\varepsilon_3}{\mu k_x} \alpha_2^- \left(k_{2z}^{\pm} \pm \frac{\omega}{c} \mu \cos \vartheta \right), \quad (8')$$

а для преломленных волн

$$E_{2z}^{\pm} = \pm \frac{2}{\Delta_0} \left\{ \alpha_2^{\mp} \left(1 + \frac{c}{\mu\omega} k_{2z}^{\mp} \sec \vartheta \right) E_x + i \left(\alpha_1^{\mp} - \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon_3}{k_x} \cos \vartheta \right) E_y \right\}, \quad (9)$$

где

$$\Delta_0 = \alpha_1^+ \alpha_2^- \left(1 - \frac{c}{\mu\omega} k_{2z}^- \sec \vartheta \right) - \alpha_2^+ \alpha_1^- \left(1 + \frac{c}{\mu\omega} k_{2z}^+ \sec \vartheta \right) - \\ - \frac{\varepsilon_3}{\mu k_x} \left(k_{2z}^+ - \frac{\omega}{c} \mu \cos \vartheta \right) \alpha_2^+ + \frac{\varepsilon_3}{\mu k_x} \left(k_{2z}^- + \frac{\omega}{c} \mu \cos \vartheta \right) \alpha_2^-.$$

Рассмотрим детально случай, когда гиротропия вызвана постоянным внешним магнитным полем $\vec{H}_0$. Тогда

$$\varepsilon = 1 + \frac{\omega_0^2 (\omega_s^2 - \omega^2)}{(\omega_s^2 - \omega^2)^2 - \omega_n^2 \omega^2}, \quad (10) \\ \varepsilon_3 = 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_s^2 - \omega^2}, \quad g = \frac{\omega_0^2 \omega \omega_n}{(\omega_s^2 - \omega^2)^2 + \omega_n^2 \omega^2},$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi N e^2}{m},$$

ω_s — собственная частота электронов среды,

$\omega_n = \frac{eH_0}{mc}$ — частота гирации.

Для твердого диэлектрика $\omega_s \sim 10^{16}$, в то время как $\omega_n \sim 10^{11} \div 10^{12}$. В этом случае разницей $\varepsilon_3 - \varepsilon$ можно пренебречь, так же как и величинами порядка ω_n^2 .

Тогда $\varepsilon_3 = \varepsilon$ и для $n^{\pm 2}$ имеем

$$n^{\pm 2} = n^2 \left(1 \pm \frac{g}{\varepsilon n} \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta} \right). \quad (11)$$

Отраженная волна имеет эллиптическую поляризацию, причем если в падающей волне отсутствовало E_y , то в отраженной амплитуда

$E_{1y} \sim g$, т. е. отношение полуосей эллипса $\frac{|E_{1y}|}{|E_{1x}|} \sim g$.

Поэтому эллипс так вытянут, что мы можем без особого нарушения точности считать отраженную волну плоско-поляризованной.

Обратимся к преломленной волне, которая имеет вид:

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = (\vec{E}_2^+ e^{ik_{2z}^+ z} + \vec{E}_2^- e^{ik_{2z}^- z}) e^{i(k_x x - \omega t)}. \quad (12)$$

С точностью до несущественных членов порядка g в амплитудах имеем

$$E_{2z}^{\pm} = - \left\{ \frac{k_x}{k_{2z} + \varepsilon k_z} E_x \pm i \frac{\mu k_x k_z}{k_z (k_{2z} + \mu k_z)} H_x \right\}, \quad (13)$$

$$k_{2z} = \frac{\omega}{c} \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}.$$

Остальные компоненты определяются через $E_{2z}^{\pm}$ с помощью соотношений (5).

Поле имеет вид

$$\vec{E}_2^{\pm}(\vec{k}) = \vec{E}_2' \pm i \vec{E}_2'', \quad (14)$$

причем $|\vec{E}_2'| = |\vec{E}_2''|$, т. е. волны имеют круговую поляризацию. Амплитуды $E_2' = E_2''$ определяются из формулы

$$E_2' = \sqrt{(\operatorname{Re} E_{2z}^+)^2 + (\operatorname{Re} E_{2z}^-)^2 + (\operatorname{Re} E_{2y}^-)^2}. \quad (15)$$

Суммарная волна, распространяющаяся в гиротропной среде, имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{E}_2(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{k}_2 \vec{r} - \omega t)} & \left\{ \vec{E}_2' \cos \left(\frac{\mu g \frac{\omega}{c}}{2n \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}} z \right) + \right. \\ & \left. + \vec{E}_2'' \sin \left(\frac{\mu g \frac{\omega}{c}}{2n \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}} z \right) \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Полученные результаты применимы также к холодной плазме, помещенной в магнитное поле, если частота падающей волны намного превосходит ω_H . Если же это условие не выполняется, то надо применять точные формулы (9).

Из (16) видно, что суммарная волна имеет круговую поляризацию, и плоскость поляризации делает полный оборот на расстоянии

$$z_0 = \frac{4 \pi n \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta} c}{\omega \mu g}. \quad (17)$$

Формулы (16) и (17) справедливы для углов падения, удовлетворяющих условию

$$\frac{g}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}} \ll 1. \quad (18)$$

II. Рассмотрим случай, когда оптическая ось гиротропной среды параллельна плоскости раздела сред (в нашем случае она направлена по оси x).

Полупространство $z < 0$ занимает изотропная среда с параметрами ε_1 и μ_1 , а полупространство $z > 0$ среда с постоянными μ_2 и

$$\varepsilon_{2ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon_3 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & -ig \\ 0 & ig & \varepsilon_2 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Исследуем раздельно два случая.

1. Пусть падает волна с волновым вектором $\vec{k} = \vec{k}(k_x, k_z)$. Компонента k_x сохраняется при переходе через границу раздела двух сред:

$$k_x = k_{1x} = k_{2x}^{\pm} = \frac{\omega}{c} n_1 \sin \vartheta, \quad (20)$$

где $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2^{\pm}$ — волновые векторы отраженной и преломленных волн, которые имеют вид:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(\vec{r}, t) &= \vec{E}_1(\omega) e^{i(k_x x - k_z z - \omega t)}, \\ \vec{E}_2(\vec{r}, t) &= e^{i(k_x x - \omega t)} \left\{ \vec{E}_2^+(\omega) e^{ik_{2z}^+ z} + \vec{E}_2^-(\omega) e^{ik_{2z}^- z} \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Дисперсионное соотношение для гиротропной среды имеет вид

$$\begin{aligned} k_{2z}^{\pm 2} &= \frac{\omega^2}{c^2} \mu_2 \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2} + k_x^2 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{2\varepsilon_2} - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\mu_2 g^2}{2\varepsilon_2} \pm \\ &\pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{2\varepsilon_2} \right)^2 \left(k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 \mu_2 \right)^2 + \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2\varepsilon_2^2} \frac{\omega^2}{c^2} \mu_2 g^2 \left(k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \mu_2 \varepsilon_2 \right) +} \\ &+ \frac{\omega^4}{c^4} \mu_2^2 g^2 \left(\frac{g^2}{4\varepsilon_2^2} + \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} \right), \quad (22) \\ k_{2z}^{\pm 2} &= k_{2z}^{\pm 2} - k_x^2. \end{aligned}$$

Между компонентами полей в гиротропной среде имеют место соотношения, аналогичные (5):

$$\begin{aligned} E_{2x}^{\pm} &= \frac{k_x k_{2z}^{\pm}}{k_{2z}^{\pm 2} - \frac{\omega^2}{c^2} \mu_2 \varepsilon_3} E_{2z}^{\pm}, \\ &- i \frac{\omega^2}{c^2} \mu_2 g \\ E_{2y}^{\pm} &= \frac{-i \frac{\omega^2}{c^2} \mu_2 g}{k_{2z}^{\pm 2} - \frac{\omega^2}{c^2} \mu_2 \varepsilon_2} E_{2z}^{\pm}, \end{aligned} \quad (23)$$

Из граничных условий можно получить точные выражения для отраженного и преломленного полей*, однако мы ограничимся случаем, когда гиротропия вызвана внешним магнитным полем и поэтому

* Для преломленных волн в случае $\varepsilon_1 = 1$, $\mu_1 = 1$ имеем

$$g \ll 1, \text{ а } \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \sim g^2.$$

Тогда с точностью до членов порядка g^2 получим

$$k_2^{\pm 2} = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 \mu_2 \pm \frac{\omega}{c} k_x \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} g,$$

а соотношения (23) с той же точностью имеют вид:

$$E_{2y}^{\pm} = \mp i \frac{\frac{\omega}{c} n_2}{k_x} E_{2z}^{\pm},$$

$$E_{2x}^{\pm} = -\frac{k_{2z}}{k_x^2} \left[k_x \pm \frac{\omega}{c} n_2 \frac{g}{\varepsilon_2} \left(1 + \frac{k_x^2}{2k_{2z}^2} \right) \right]. \quad (23a)$$

Из граничных условий и формул (23a) для преломленной волны имеем

$$E_{2x}^+ = \frac{1}{\zeta_1 \zeta_2} \left\{ \left[\zeta_2 + \frac{k_2 g}{k_x \varepsilon_2} \left(\zeta_2 + \frac{\mu_2 k_z k_x^2}{2\mu_1 k_{2z}^3} \right) \right] E_x + \right. \\ \left. + i \frac{\mu_2}{n_2} \left[\zeta_1 + g \frac{k_x k_2 k_z}{2\varepsilon_1 k_{2z}^3} \right] H_x \right\}, \quad (24)$$

$$E_{2z}^{\pm} = \pm 2 \frac{\alpha_2^{\mp} \left(1 + \frac{c}{\mu_2 \omega} k_{2z}^{\mp} \sec \vartheta \right) E_x +}{\Delta_0} \\ + i \frac{\left[\alpha_1^{\mp} \left(1 + \frac{c}{\mu_2 \omega} k_{2z}^{\mp} \cos \vartheta \right) - \frac{c}{\mu_2 \omega} k_x \cos \vartheta \right] E_y}{\Delta_0},$$

где

$$\alpha_1^{\pm} = \frac{k_x k_{2z}^{\pm}}{k_{2z}^{\pm 2} - \frac{\omega^2}{c^2} \mu_2 \varepsilon_3}, \quad \alpha_2^{\pm} = -\frac{\frac{\omega^2}{c^2} \mu_2 g}{k_{2z}^{\pm 2} - \frac{\omega^2}{c^2} \mu_2 \varepsilon_2},$$

$$\Delta_0 = \alpha_1^+ \alpha_2^- \left(1 + \frac{c}{\mu_2 \omega} k_{2z}^- \sec \vartheta \right) - \alpha_1^- \alpha_2^+ \left(1 + \frac{c}{\mu_2 \omega} k_{2z}^+ \sec \vartheta \right) - \\ - \frac{c}{\mu_2 \omega} \alpha_2^+ (\alpha_1^- k_{2z}^- - k_x) \left(\cos \vartheta + \frac{c}{\mu_2 \omega} k_{2z}^+ \right) + \\ + \frac{c}{\mu_2 \omega} \alpha_2^- (\alpha_1^+ k_{2z}^+ - k_x) \left(\cos \vartheta + \frac{c}{\mu_2 \omega} k_{2z}^- \right).$$

$E_{2x}^{\pm}$ и $E_{2y}^{\pm}$ определяются через $E_{2z}^{\pm}$ с помощью соотношений (23).

$$E_{2x}^- = \frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2} \left\{ \left[\epsilon_2 - \frac{k_x g}{k_x \epsilon_2} \left(\epsilon_2 + \frac{\mu_2 k_z k_x^2}{2 \mu_1 k_{2z}^3} \right) \right] E_x + \right. \\ \left. + i \frac{\mu_2}{n_2} \left[-\epsilon_1 + g \frac{k_x k_z k_x}{2 \epsilon_1 k_{2z}^3} \right] H_x \right\}, \quad (25)$$

где

$$\epsilon_1 = 1 + \frac{\epsilon_2 k_z}{\epsilon_1 k_{2z}}, \quad k_z = \frac{\omega}{c} n_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu_2 \epsilon_2}, \\ \epsilon_2 = 1 + \frac{\mu_2 k_z}{\mu_1 k_{2z}}, \quad k_{2z} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} n_2^2 - k_x^2}. \quad (26)$$

Рассмотрим результирующую волну в ряде частных случаев. Пусть $E = E_y$. Тогда в падающей волне $E_x = 0$,

$$H_x = -\frac{ck_z}{\omega \mu_1} E_y.$$

Результирующая преломленная волна имеет следующую x -компоненту:

$$E_{2y}^{(рез)}(\vec{r}, t) = \frac{2 \mu_2 k_z}{\mu_1 \epsilon_1 \epsilon_2 k_2} E_y e^{i(k_z r - \omega t)} \left\{ \epsilon_1 \sin \left(\frac{k_x k_x g}{2 \epsilon_2 k_{2z}} z \right) - \right. \\ \left. - i g \frac{k_x k_z k_z}{2 \epsilon_1 k_{2z}^3} \cos \left(\frac{k_x k_x g}{2 \epsilon_2 k_{2z}} z \right) \right\}. \quad (27)$$

Как видим, второй член, описывающий добавочную волну, смещенную на $\frac{\pi}{2}$ по фазе относительно основной, имеет амплитуду порядка g , которой можно пренебречь. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь основную волну.

Для $E_{2y}^{(рез)}$ имеем

$$E_{2y}^{(рез)}(\vec{r}, t) = \frac{2 \mu_2 k_z}{\mu_1 \epsilon_2 k_{2z}} E_y e^{i(k_z r - \omega t)} \cos \left(\frac{k_x k_x g}{2 \epsilon_2 k_{2z}} z \right), \quad (28)$$

т. е. волны имеют круговую поляризацию.

Плоскость поляризации волны делает полный оборот на расстоянии

$$z_0 = \frac{4 \pi \epsilon_2 k_{2z}}{k_x k_x g}.$$

В отраженной волне появляется компонента

$$E_{1x}(\omega) = E_{2x}^{(рез)}(\vec{r}, t)|_{z=0}.$$

Она смещена по фазе на $\frac{\pi}{2}$ относительно E_{1y} и имеет величину порядка g , так что поворот плоскости поляризации при этом ничтожен.

Если в падающей волне мы имели E_x и E_z , а $E_y = 0$, то результат аналогичен предыдущему.

2. Пусть теперь волновой вектор падающей волны $\vec{k} \perp \vec{H}_0$. Тогда имеем $\vec{k}(k_y, k_z)$, $k_x = 0$.

В этом случае поворот плоскости поляризации не наблюдается, а имеет место лишь двойное лучепреломление в магнитном поле. Этот эффект пропорционален $\varepsilon_3 - \varepsilon_2$ и g^2 и известен как эффект Коттона-Муттона [2].

Полученные формулы могут быть полезными для определения оптических параметров анизотропных сред, и, в частности, для исследования явлений, происходящих при растяжении полимеров.

Авторы благодарны Б. М. Болотовскому за обсуждение результатов.

ЦНИ физико-техническая лаборатория
АН АрмССР

Поступила 28 апреля 1966

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. О. С. Мергелян, Изв. АН АрмССР, Физико-математические науки, 15, № 6, 75 (1962).
2. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., 1959.

ՖՐԵՆԵԼԻ ԲԱՆԱԶԵՎԵՐԸ ԻԶՈՏՐՈՊ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ԵՎ ԳԻՐՈՏՐՈՊ ԴԻԷԼԵԿՏՐԻԿԻ ԲԱԺԱՆՄԱՆ ՍԱՀՄԱՆԻ ՀԱՄԱՐ

Հ. Ս. ԵՐԻՑԻԱՆ, Հ. Ս. ՄԵՐԳԵԼԻԱՆ

Քննարկված է էլեկտրամագնիսական ալիքների անդրադարձումն ու բեկումը իզոտրոպ և գիրոտրոպ միջավայրերի բաժանման սահմանի վրա: Ստացված են Ֆրենելի բանաձևերը այն դեպքերի համար, երբ գիրոտրոպ միջավայրի օպտիկական առանցքը ուղղահայաց է բաժանման սահմանին և երբ այդ սահմանին զուգահեռ է: Վերլուծված է անդրադարձված և բեկված ալիքների բևեռացումը:

FRESNEL'S FORMULAE FOR THE BOUNDARY BETWEEN THE ISOTROPIC MEDIUM AND GYROTROPIC DIELECTRIC

O. S. YERITSIAN and H. S. MERGELIAN

The reflection and the refraction of the electromagnetic waves on the boundary between isotropic and gyrotropic dielectric media are considered. Fresnel's formulae are obtained for cases when the optical axis of gyrotropic medium is perpendicular and is parallel to the boundary. The polarization of reflected and refracted waves is analyzed.