

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЧЕЛЛЕНА-ПАУЛИ В
КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В. Б. ГОСТЕВ, А. Р. ФРЕНКИН

Встречающееся в задачах квантовой теории поля интегральное

$$\text{уравнение Челлена-Паули } \psi(\omega) = \varphi(\omega) - \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\psi(\omega') d\omega' \operatorname{Im} h(\omega')}{h(\omega_0 - \omega')(\omega' + \omega - \omega_0)}$$

решается путем интегрального представления $\psi(\omega)$ через функцию $\alpha(\omega)$, не имеющую разрывов на действительной оси. Получены выражения для $\psi(\omega)$ в конечной форме в случае однородного уравнения полиномиальных и полюсных неоднородных членов. Указаны возможные обобщения.

При рассмотрении различных моделей квантовой теории поля для определения волновых функций стационарных состояний, амплитуд рассеяния, пропагаторов и вершинных частей приходится решать интегральные уравнения вида

$$\psi(\omega) = \varphi(\omega) - \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\psi(\omega') d\omega' \operatorname{Im} h(\omega')}{h(\omega_0 - \omega')(\omega' + \omega - \omega_0)}, \quad (1)$$

где

$$h(\omega) = h(\omega + i\varepsilon) = \omega \left[1 + \frac{\omega}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{d\omega' \operatorname{Im} h(\omega')}{(\omega')^2 (\omega' - \omega - i\varepsilon)} \right], \quad (2)$$

$$\operatorname{Im} h(\omega) = \operatorname{Im} h(\omega + i\varepsilon),$$

и предполагается, что $\operatorname{Im} h(\omega)$ убывает на бесконечности так, что обеспечивается сходимость всех встречающихся в дальнейшем интегралов $\operatorname{Im} h(1) = 0$,

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \frac{h(\omega)}{\omega} = Z, \quad 0 \leq Z < 1, \quad (3)$$

$\varphi(\omega)$ — произвольная мероморфная функция, ограничения на $\varphi(\omega)$ будут наложены в дальнейшем.

Уравнение такого типа с $\varphi(\omega) = -\frac{1}{\omega}$ для рассеяния θ -частиц на V -частице в модели Ли [1] впервые было получено Челленом и Паули [2]. Однородное уравнение служит для определения волновой функции $V-\theta$ связанного состояния [3]. К такому же уравнению приводит задача рассеяния и определения волновой функции однонуклонного состояния в модели с тремя состояниями фиксированного

источника [4], [5], [6], [7] $\left(\varphi(\omega) = c, \varphi(\omega) = -\frac{1}{\omega}, \varphi(\omega) = -\frac{1}{\omega + a} \right)$, a и c — постоянные), и расчет энергии и времени распада (5,5) резонанса [8] в модели Чу-Лоу-Вика [9]. Для различных частных случаев специальными приемами уравнение (1) было решено в работах [10], [11], [12] $\left(\varphi(\omega) = -\frac{1}{\omega} \right)$, [8], [5], [7] $\left(\varphi(\omega) = -\frac{1}{\omega + a} \right)$, [6] $(\varphi(\omega) = c)$. В настоящей статье будет изложен систематический метод решения таких уравнений.

Следует отметить, что функция $h(\omega)$, постоянные Z и ω_0 имеют простой физический смысл, $\frac{1}{h(\omega)}$ — перенормированный пропагатор фиксированного источника в энергетическом представлении;

$$\text{Im } h(\omega) = 2\pi^2 \gamma \sqrt{\omega^2 - 1} u^2(\omega), \quad (4)$$

где γ — квадрат перенормированной постоянной связи источника с релятивистскими квантами единичной массы, $u(\omega)$ — изотропная действительная обрезающая функция ($u(0) = 1$), обеспечивающая сходимость интегралов.

Z — постоянная перенормировки источника, свойства $h(\omega)$, Z подробно исследованы [2].

ω_0 — энергия рассматриваемого состояния, отсчитываемая от массы фиксированных частиц. Случаю $\omega_0 < 1$ соответствуют дискретные стационарные состояния, $1 \leq \omega_0 < 2$ — состояния упругого рассеяния, для $\omega_0 > 2$ включается канал рождения частиц, и рассеяние становится неупругим.

II

Ограничимся сначала случаем $\omega_0 < 2$. Основной особенностью уравнения типа (1) является связь мнимой части $\text{Im } \psi(\omega) = \text{Im } \psi(\omega + i\varepsilon)$ со значением $\psi(\omega_0 - \omega)$ в сдвинутой точке, в отличие от классических сингулярных интегральных уравнений теории поля [13], связывающих мнимую часть искомой функции с ее значением в той же точке.

$$\text{Im } \psi(\omega + i\varepsilon) = \begin{cases} \frac{h(\omega_0 - \omega) \psi(\omega_0 - \omega)}{h(\omega)}, & \omega < \omega_0 - 1, \\ 0, & \omega > \omega_0 - 1. \end{cases} \quad (5)$$

Это отличие вызвано тем, что ядро интегрального уравнения зависит от суммы $\omega + \omega'$, а промежуток интегрирования полубесконечен.

Для дальнейшего исследования введем функцию

$$\alpha(\omega) = h(\omega) \psi(\omega) + h(\omega_0 - \omega) \psi(\omega_0 - \omega) = \alpha(\omega_0 - \omega). \quad (6)$$

Эта функция не имеет разрывов на действительной оси, поскольку при $\omega > 1$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} z(\omega + i\varepsilon) &= \psi(\omega) \operatorname{Im} h(\omega) + h(\omega_0 - \omega) \operatorname{Im} \psi(\omega_0 - \omega) = \\ &= \psi(\omega) \operatorname{Im} h(\omega) + h(\omega_0 - \omega) \left[-\frac{\psi(\omega) \operatorname{Im} h(\omega)}{h(\omega_0 - \omega)} \right] = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

что следует из равенства (5) и аналитичности $h(\omega)$ на всей комплексной ω -плоскости с разрезом вдоль действительной оси от 1 до $+\infty$. Аналогично можно показать, что $\operatorname{Im} z(\omega + i\varepsilon) = 0$ при $\omega < \omega_0 - 1$. Отсюда следует, что особенностями $z(\omega)$ могут быть только полюсы, совпадающие с полюсами $\varphi(\omega)$ и $\varphi(\omega_0 - \omega)$. Если $\varphi(\omega)$ целая функция, представляемая в виде ряда Маклорена

$$\varphi(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \omega^n, \quad (8)$$

то и $z(\omega)$ будет целой функцией

$$z(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \omega^n. \quad (9)$$

Построим новую функцию

$$f(\omega) = \frac{\omega [\psi(\omega_0 - \omega) - \varphi(\omega_0 - \omega)]}{h(\omega)}. \quad (10)$$

Определив $\psi(\omega_0 - \omega) - \varphi(\omega_0 - \omega)$ с помощью уравнения (1) и пользуясь тем, что $h(\omega)$ имеет ноль первого порядка при $\omega = 0$, можно заметить, что у $f(\omega)$ нет полюсов, она аналитична в комплексной ω -плоскости с разрезом вдоль действительной оси от 1 до $+\infty$ и $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} f(\omega) = 0$.

Поэтому по теореме Коши имеем

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega}, \\ \operatorname{Im} f(\omega) &= \operatorname{Im} f(\omega + i\varepsilon). \end{aligned} \quad (11)$$

Поскольку $z(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ целые функции, мнимую часть $f(\omega)$ с помощью равенства (5) можно представить в виде

$$\operatorname{Im} f(\omega) = \frac{\omega z(\omega)}{h(\omega_0 - \omega)} \operatorname{Im} \frac{1}{h(\omega)} - \omega \varphi(\omega_0 - \omega) \operatorname{Im} \frac{1}{h(\omega)}. \quad (12)$$

Подставим выражения (10) и (12) в тождество (11), заменим аргумент $\omega_0 - \omega$ на ω и разделим относительно $\psi(\omega)$:

$$\begin{aligned} \psi(\omega) &= \varphi(\omega) + \frac{h(\omega_0 - \omega)}{\omega_0 - \omega} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega' z(\omega') d\omega'}{(\omega' + \omega - \omega_0) h(\omega_0 - \omega)} \operatorname{Im} \frac{1}{h(\omega')} - \\ &\quad - \frac{h(\omega_0 - \omega)}{\omega_0 - \omega} \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\omega' \varphi(\omega_0 - \omega') d\omega'}{\omega' + \omega - \omega_0} \operatorname{Im} \frac{1}{h(\omega')}. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, $\psi(\omega)$ полностью определяется функцией $\alpha(\omega)$, для которой из определения (6) и представления (13) получаем интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) = & h(\omega) \varphi(\omega) + h(\omega_0 - \omega) \varphi(\omega_0 - \omega) + \frac{h(\omega) h(\omega_0 - \omega)}{\omega} \times \\ & \times \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\omega' d\omega'}{\omega' - \omega} \operatorname{Im} \frac{1}{h(\omega')} \left[\frac{\alpha(\omega')}{h(\omega_0 - \omega')} - \varphi(\omega_0 - \omega') \right] + \\ & + \frac{h(\omega) h(\omega_0 - \omega)}{\omega_0 - \omega} \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\omega' d\omega'}{\omega' + \omega - \omega_0} \operatorname{Im} \frac{1}{h(\omega')} \left[\frac{\alpha(\omega')}{h(\omega_0 - \omega')} - \varphi(\omega_0 - \omega') \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставив в это уравнение разложения (8) и (9) по степеням ω функции $h(\omega)$, $h(\omega_0 - \omega)$, что допустимо при $\omega_0 > 1$, можно получить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов p_n , однако решение такой системы довольно сложно [14], и поэтому мы попытаемся обойти эту трудность, хотя бы для полиномиальных неоднородных членов.

III

Если $\varphi(\omega)$ полином степени n , то $\alpha(\omega)$ должна быть полиномом степени не выше $n+1$, т. к. в силу асимптотического представления функции $h(\omega)$

$$\begin{aligned} h(\omega) &= \sum_{m=-1}^{\infty} \frac{d_m}{\omega^m}, \\ d_{-1} = Z &= 1 - \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{d\omega' \operatorname{Im} h(\omega')}{(\omega')^2}, \\ d_m &= -\frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} (\omega')^{m-1} [\operatorname{Im} h(\omega')] d\omega', \quad m = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (15)$$

правильная часть $\psi(\omega) h(\omega)$, совпадающая с точностью до постоянной с правильной частью $\varphi(\omega) h(\omega)$, имеет $(n+1)$ -ый порядок, а главная часть $\alpha(\omega)$ исчезает из-за отсутствия полюсов у $h(\omega)$, $\varphi(\omega)$ и $\psi(\omega)$.

Для $\varphi(\omega) = \omega^n$ искомая функция $\psi(\omega)$ имеет асимптотическое представление

$$\psi(\omega) = \omega^n + \xi \frac{1}{\omega}, \quad (16)$$

где коэффициент ξ остается пока неопределенным, и полином $\alpha(\omega)$ совпадает со своей асимптотикой

$$\alpha(\omega) = p_0 + \gamma_n(\omega),$$

$$\gamma_n(\omega) = \sum_{k=-1}^{n-2} d_k [\omega^{n-k} + (\omega_0 - \omega)^{n-k} - \omega_0^{n-k}], \quad (17)$$

в которой неизвестен только постоянный член

$$p_0 = \alpha(0) = h(\omega_0) \psi(\omega_0). \quad (18)$$

С учетом значения p_0 , путем подстановки функции $\alpha(\omega)$ в уравнение (13) определяем $\psi(\omega)$ в зависимости от $\psi(\omega_0)$

$$\begin{aligned} \psi(\omega) = \omega^n + \frac{h(\omega_0 - \omega) h(\omega_0) \psi(\omega_0)}{\omega_0 - \omega} A(\omega, \omega_0) + \\ + \frac{h(\omega_0 - \omega)}{\omega_0 - \omega} \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{\omega' \gamma_n(\omega') d\omega'}{(\omega' + \omega - \omega_0) h(\omega_0 - \omega')} \operatorname{Im} \frac{1}{h(\omega')} - \\ - \frac{h(\omega_0 - \omega)}{\omega_0 - \omega} \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{\omega' (\omega_0 - \omega')^n d\omega'}{\omega' + \omega - \omega_0} \operatorname{Im} \frac{1}{h(\omega')}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$A(\omega, \omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{\omega' d\omega'}{(\omega' + \omega - \omega_0) h(\omega_0 - \omega')} \operatorname{Im} \frac{1}{h(\omega')}. \quad (20)$$

Положив в равенстве (19) $\omega = \omega_0$, найдем постоянную $\psi(\omega_0)$ и после подстановки ее значения в (19) получим решение уравнения (1) для $\varphi(\omega) = \omega^n$,

$$\begin{aligned} \psi(\omega) = \omega^n + \frac{h(\omega_0 - \omega)}{\omega_0 - \omega} \left[\frac{h(\omega_0) [Q_n(\omega_0) - B_n(\omega_0) + \omega_0^n]}{1 - h(\omega_0) A(\omega_0, \omega_0)} A(\omega, \omega_0) + \right. \\ \left. + Q_n(\omega) - B_n(\omega) \right], \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$Q_n(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{\omega' \gamma_n(\omega') d\omega'}{(\omega' + \omega - \omega_0) h(\omega_0 - \omega')} \operatorname{Im} \frac{1}{h(\omega')}, \quad (22)$$

$$B_n(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{\omega' (\omega_0 - \omega')^n d\omega'}{\omega' + \omega - \omega_0} \operatorname{Im} \frac{1}{h(\omega')}. \quad (23)$$

Входящие в ответ интегралы вида

$$F_k(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{(\omega')^k d\omega'}{\omega' + \omega - \omega_0} \operatorname{Im} \frac{1}{h(\omega')}, \quad (24)$$

$$L_k(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{(\omega')^k d\omega'}{(\omega' + \omega - \omega_0) h(\omega_0 - \omega')} \operatorname{Im} \frac{1}{h(\omega')} \quad (25)$$

вычисляются с помощью рекуррентного соотношения

$$F_k(\omega) - F_k(\omega_0) = (\omega_0 - \omega) F_{k-1}(\omega) \quad (26)$$

и аналогичного для $L_k(\omega)$:

$$\begin{aligned} F_k(\omega) &= \sum_{j=0}^{k-1} (\omega_0 - \omega)^j F_{k-j} + (\omega_0 - \omega)^k F_0(\omega), \\ L_k(\omega) &= \sum_{j=0}^{k-1} (\omega_0 - \omega)^j L_{k-j} + (\omega_0 - \omega)^k L_0(\omega), \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} F_j &= \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} (\omega')^{j-1} d\omega' \operatorname{Im} \frac{1}{h(\omega')}, \\ F_1 &= 1 - Z^{-1}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$F_0(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega' + \omega - \omega_0} \operatorname{Im} \frac{1}{h(\omega')} = \frac{1}{\omega - \omega_0} + \frac{1}{h(\omega_0 - \omega)},$$

последние два интеграла найдены контурным интегрированием (ср. [2]),

$$\begin{aligned} L_j(\omega_0) &= \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{(\omega')^{j-1} d\omega'}{h(\omega_0 - \omega')} \operatorname{Im} \frac{1}{h(\omega')}, \\ L_0(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{d\omega'}{(\omega' + \omega - \omega_0) h(\omega_0 - \omega')} \operatorname{Im} \frac{1}{h(\omega')}. \end{aligned} \quad (29)$$

В частности

$$\begin{aligned} A(\omega, \omega_0) &= L_1(\omega) = L_0(\omega) (\omega_0 - \omega) + L_1(\omega_0); \\ A(\omega_0, \omega_0) &= L_1(\omega_0). \end{aligned} \quad (30)$$

В наиболее простых случаях выпишем ответ в явном виде:

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= 1, \\ \psi(\omega) &= Z^{-1} \frac{h(\omega_0 - \omega)}{\omega_0 - \omega} \frac{1 + h(\omega_0) L_0(\omega)}{1 - h(\omega_0) L_1(\omega_0)}; \end{aligned} \quad (31)$$

$\varphi(\omega) = \omega$,

$$\psi(\omega) = \omega + \frac{h(\omega_0 - \omega)}{\omega_0 - \omega} \left\{ \frac{h(\omega_0) [2ZL_3(\omega_0) - 2Z\omega_0 L_2(\omega_0) - \omega_0 F_1 + F_2 + \omega_0] A(\omega, \omega_0)}{1 - h(\omega_0) L_1(\omega_0)} + \right.$$

$$+ 2Z[-L_0(\omega)\omega(\omega_0 - \omega)^2 + (\omega_0 - \omega)(L_2(\omega_0) - \omega L_1(\omega_0))] - \\ - F_0(\omega)\omega(\omega_0 - \omega) - \omega F_1 + F_2 \}. \quad (32)$$

Таким же приемом легко решить однородное уравнение (1), для которого $\alpha(\omega) = \text{const}$ и

$$\psi(\omega) = C \frac{h(\omega_0 - \omega)}{\omega_0 - \omega} A(\omega, \omega_0), \quad (33)$$

где C — произвольная постоянная, а ω_0 определяется из характеристического уравнения

$$1 - h(\omega_0)L_1(\omega_0) = 0, \quad (34)$$

имеющего при $\omega_0 < 1$ не более одного действительного корня, лежащего в интервале $0 < \omega_0 < 1$.

Для целой $\varphi(\omega)$ (8), по крайней мере формально, решение можно представить в виде ряда $\sum_{n=0}^{\infty} q_n \psi_n(\omega)$, где $\psi_n(\omega)$ — решение (19) уравнения (1) с неоднородным членом ω^n . Сходимость этого ряда в настоящей статье не исследуется.

IV

Разберем случай $\varphi(\omega) = -\frac{1}{\omega - c}$. Функция $\alpha(\omega)$ стремится к постоянной при $|\omega| \rightarrow \infty$ и имеет простые полюсы при $\omega = c$, $\omega = \omega_0 - c$ с вычетами $-h(c)$ (эти полюсы компенсируются нулями $h(\omega)$ и $h(\omega_0 - \omega)$ для $c = 0$), поэтому

$$\alpha(\omega) = h(\omega_0)\psi(\omega_0) - \frac{h(c)(\omega_0 - 2c)}{(\omega_0 - c)c} + \frac{h(c)(\omega_0 - 2c)}{(\omega - c)(\omega - \omega_0 + c)}. \quad (35)$$

Теорему Коши теперь можно применить к функции

$$f(\omega) = \frac{\omega\psi(\omega_0 - \omega)}{h(\omega)}, \quad (36)$$

убывающей на бесконечности, но, в отличие от функции (10), имеющей полюс при $\omega = \omega_0 - c$ с вычетом $\frac{\omega_0 - c}{h(\omega_0 - c)}$:

$$f(\omega) = \frac{\omega_0 - c}{h(\omega_0 - c)} \frac{1}{\omega - \omega_0 + c} + \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} \text{Im} f(\omega'). \quad (37)$$

Используя равенство

$$\text{Im} f(\omega) = \frac{\omega\alpha(\omega)}{h(\omega_0 - \omega)} \text{Im} \frac{1}{h(\omega)}, \quad (38)$$

найдем $\psi(\omega)$ методом, полностью аналогичным случаю целой $\varphi(\omega)$:

$$\begin{aligned} \psi(\omega) = & \frac{h(\omega_0 - \omega)}{\omega_0 - \omega} \left\{ -\frac{\omega_0 - c}{h(\omega_0 - c)(\omega - c)} + \right. \\ & + \frac{[h(\omega_0)h(c)h(\omega_0 - c)(\omega_0 - 2c)C(\omega_0 - c)D(\omega_0) - \\ & - h(\omega_0)(\omega_0 - c)c - h(c)h(\omega_0 - c)(\omega_0 - 2c)]A(\omega, \omega_0)}{(\omega_0 - c)ch(\omega_0 - c) \times} \\ & \times [1 - h(\omega_0)L_1(\omega_0)] \\ & \left. + h(c)(\omega_0 - 2c)D(\omega) \right\}, \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$D(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\omega' d\omega'}{(\omega' - c)(\omega' - \omega_0 + c)(\omega' + \omega - \omega_0)h(\omega_0 - \omega')} \operatorname{Im} \frac{1}{h(\omega')}. \quad (40)$$

При $c = 0$ решение (39) переходит, как и следовало ожидать, в решение уравнения $V - \theta$ рассеяния с $\varphi(\omega) = -\frac{1}{\omega}$ [10], [11], [12]

$$\psi(\omega) = -\frac{h(\omega_0 - \omega)}{\omega_0 - \omega} \left[\frac{\omega_0}{h(\omega_0)} \frac{1}{\omega} + \frac{2A(\omega)}{1 - h(\omega_0)L_1(\omega_0)} \right]. \quad (41)$$

Для $\varphi(\omega) = -\frac{1}{(\omega - c)^n}$ функция $\alpha(\omega)$ имеет главную часть порядка n и определяется с помощью разложения $h(\omega)$ в ряд Тейлора в точке $\omega = c$. Окончательный результат таков:

$$\begin{aligned} \psi(\omega) = & \frac{h(\omega_0 - \omega)}{\omega_0 - \omega} \left\{ U_n(\omega) + \right. \\ & + \frac{h(\omega_0)L_1(\omega_0)[U_n(\omega_0) + T_n(\omega_0)]A(\omega, \omega_0)}{1 - h(\omega_0)L_1(\omega_0)} + T_n(\omega) \left. \right\}, \end{aligned} \quad (42)$$

где

$$U_n(\omega) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k-1} \frac{1}{k!} g^{(n-k)}(\omega_0 - c) \frac{1}{(\omega - c)^k}, \quad (43)$$

$$g(\omega) = \frac{\omega}{h(\omega)},$$

$$T_n(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\omega' \beta_n(\omega') d\omega'}{(\omega' + \omega - \omega_0)h(\omega_0 - \omega')} \operatorname{Im} \frac{1}{h(\omega')}, \quad (44)$$

а главная часть $\alpha(\omega) - \beta_n(\omega) - K_n$ выражается формулами

$$\begin{aligned} \beta_n(\omega) = & K_n - \sum_{j=1}^n a_j \left[\frac{1}{(\omega - c)^{n-j+1}} + \frac{1}{(\omega_0 - \omega - c)^{n-j+1}} \right], \\ & a_1 = h(c), \\ & a_2 = h'(c), \end{aligned} \quad (45)$$

$$a_{j+1} = \frac{1}{j!} h^{(j)}(c) = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{d\omega' \operatorname{Im} h(\omega')}{(\omega' - c)^{j+1}}, \quad j = 2, 3, \dots, n,$$

$$K_n = \sum_{j=1}^n a_j \left[\frac{1}{(\omega_0 - c)^{n-j+1}} - (-1)^{n-j} \frac{1}{c^{n-j+1}} \right]. \quad (46)$$

В отличие от случая полиномиального неоднородного члена интегралы, входящие в $T_n(\omega)$ (44), не сводятся к единственной функции $L_0(\omega)$, но могут быть приведены с помощью рекуррентных соотношений, аналогичных (26) и одной из n форм

$$M_n(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{d\omega'}{(\omega' - c)^n (\omega' - \omega_0 + c)^n (\omega' + \omega - \omega_0) h(\omega_0 - \omega')} \operatorname{Im} \frac{1}{h(\omega')} \quad (47)$$

и функции $A(\omega, \omega_0)$ (20).

Аналогично целой функции формальное решение для мероморфной $\varphi(\omega)$ можно записать в виде ряда по решениям (42).

Отметим, что все результаты, полученные в предположении $\omega_0 < 2$, имеют место и при $\omega_0 \geq 2$. Особенностью этого случая является то, что при $\omega_0 \geq 2$ для значений ω в области $1 \leq \omega \leq \omega_0 - 1$ обе функции $\psi(\omega)$ и $\psi(\omega_0 - \omega)$, используемые при построении $z(\omega)$, имеют отличные от нуля мнимые части. Поэтому прежде всего необходимо определить правила обхода полюсов в подынтегральных выражениях. Эти правила устанавливаются из физических соображений. Например, при нахождении $i\eta$ -состояний рассеяния функция $\psi(\omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\Psi(\omega) = \varphi(\omega) - \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{d\omega' \psi(\omega') \operatorname{Im} h(\omega')}{h(\omega_0 - \omega') (\omega' + \omega - \omega_0 - i\varepsilon)} \quad (1a)$$

и в подынтегральном выражении $\Psi(\omega')$ следует рассматривать как $\Psi(\omega' - i\varepsilon)$. Аналогично выводу формулы (7) легко показать, что введенная функция $z(\omega)$ по-прежнему не имеет разрывов во всей комплексной плоскости. Отсюда следует, что после выбора правил обхода полюсов в случае $\omega_0 \geq 2$ функция $z(\omega)$, как и ранее, удовлетворяет интегральному уравнению (14).

Поэтому все полученные результаты справедливы для любых действительных значений ω_0 .

V

Возможны различные обобщения уравнения (1), к которым применим изложенный метод. Важным для физических приложений является следующее видоизменение функции $h(\omega)$ (2) и уравнения (1):

$$h(\omega) = (\omega - b) \left[1 + \frac{(\omega - b)}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{Im h(\omega') d\omega'}{(\omega' - b)^2 (\omega' - \omega - iz)} \right], \quad (48)$$

$$\psi(\omega) = \varphi(\omega) - \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\psi(\omega') d\omega'}{h(b + \omega_0 - \omega') (\omega' + \omega - \omega_0 - b)} Im h(\omega'), \quad b < 1. \quad (49)$$

Оно соответствует случаю неравных масс фиксированных частиц, например, $m_V \neq m_N$ в модели Ли. Решение уравнения (49) практически с точностью до замены $\omega_0 \rightarrow \omega_0 + b$ не отличается от решения уравнения (1) [6], [7]. Неперенормированной постоянной связи и массе V -частицы или только одной постоянной связи соответствует изменение определения функции $h(\omega)$ [15], [3]:

$$h(\omega) = P_1(\omega) + \frac{\omega^j}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{d\omega'}{(\omega')^j (\omega' - \omega)} Im h(\omega'), \quad (50)$$

где $P_1(\omega)$ — полином первой степени,

$j = 0$ в первом случае,

$P_1(\omega) = \omega$, $j = 1$ во втором случае.

Метод решения уравнения (1), рассмотренный в настоящей работе, при этом не изменяется.

* *

Авторы глубоко благодарны В. И. Григорьеву за полезные обсуждения.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила 25 апреля 1966

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. T. D. Lee, Phys. Rev., 95, 1329 (1954).
2. G. Kallen, W. Pauli, Kgl Dansk. Vid. Sels. Mat-fys. Medd. 30, № 7 (1955) (перевод УФН 60, 425 (1956)).
3. T. Muta, Progr. Theor. Phys., 33, 666 (1965).
4. U. Haber-Shaim, W. Thirring, Nuovo Cimento 2, 100 (1955).
5. J. B. Bronzan, Phys. Rev. 139, B 751 (1965).
6. В. Б. Гостев, А. Р. Френкин, ДАН СССР, 1966 (в печати).
7. В. Б. Гостев, А. Р. Френкин, ДАН СССР, 1966 (в печати).
8. T. L. Trueman, Phys. Rev., 137, B 1566 (1965).
9. G. C. Wick, Rev. Mat. Phys., 27, 339 (1955).
10. R. P. Kenschaft, R. D. Amado, Journ. Math. Phys., 5, 1340 (1964).
11. C. M. Sommerfield, Journ. Math. Phys., 6, 1170 (1965).
12. E. Kazes, Journ. Math. Phys., 6, 1772 (1965).
13. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения, ФМ, М., 1962. R. Omnes, Nuovo Cimento 8, 316 (1958).
14. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, Курс современного анализа, т. I, ФМ, М., 1962.
15. W. Heisenberg, Nucl. Phys., 4, 532 (1957) (перевод в сборнике Нелинейная квантовая теория поля, ИЛ, 1959, стр. 175).

ՉԵԼԼԵՆ-ՊԱՈՒԼԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ՔՎԱՆՏԱՅԻՆ ԴԱՇՏԻ
ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Վ. Բ. ԳՈՍՏԵՎ, Ա. Բ. ՖՐԵՆԿԻՆ

Քվանտային դաշտի տեսության խնդիրներում հանդիպող Չելլեն-Պաուլի ինտեգրալային հավասարումները:

$$\psi(\omega) = \varphi(\omega) - \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{d\omega' \psi(\omega') \operatorname{Im} h(\omega')}{h(\omega_0 - \omega')(\omega' + \omega - \omega_0)}$$

Լուծվում են $\alpha(\omega)$ — ֆունկցիայի միջոցով $\psi(\omega)$ -ի ինտեգրալային ներկայացմամբ, որը
իրական առանցքի վրա կտրվածքներ չունի:

$\psi(\omega)$ -ի համար ստացված են վերջավոր տեսքով արտահայտություններ համասեռ պոլի-
նոմիալային հավասարումների և անհամասեռ բևեռային անդամների դեպքում:

Նշված են հնարավոր ընդհանրացումները:

INTEGRAL EQUATIONS OF THE KALLEN-PAULI
TYPE IN THE QUANTIZED FIELD THEORY

V. B. GOSTEV, A. R. FRENKIN

The Källen-Pauli integral equation:

$$\psi(\omega) = \varphi(\omega) - \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{d\omega' \psi(\omega') \operatorname{Im} h(\omega')}{h(\omega_0 - \omega')(\omega' + \omega - \omega_0)}$$

found in problems connected with quantized field theory can be solved using an integral representation of $\psi(\omega)$ through a function $\alpha(\omega)$ which has no cuts on the real axis. Expressions for $\psi(\omega)$ have been obtained in the final form in cases of a homogenous equations with polynomial and polar inhomogenous term.

Possible generalizations are indicated.