Изв. АН Армянской ССР, Физика, 1, 111—120 (1966)

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В РЕЗОНАНСНОЙ СРЕДЕ

В. М. АРУТЮНЯН

Исследованы электромагнитные колебания в резонансной среде, состоящей из идентичных двухуровневых молекул без учета подкачки и релаксационных потерь.

1. Введение

Точные методы решения задачи об излучении квантов системой резонансных двухуровневых атомов на основе квантовой электродинамики представляют практический интерес, поскольку позволяют выяснить границы применимости различных полуклассических методов решения данной задачи. Указанному вопросу посвящен ряд работ [1, 2], где получены приближенные уравнения квантовой электродинамики без учета релаксационных потерь и влияния подкачки. В этих работах показано, что колебания плотности фотонов в резонансной среде носят периодический характер и в отличие от результатов, полученных на основе балансовых уравнений, весьма существенны коллективные эффекты. Наряду с пренебрежением потерь и подкачкой, в [1, 2] рассматривается приближение невзаимодействующих мод и квантово-механическое среднее $\langle nn \rangle$ заменяется произведением средних $\langle n \rangle \langle n \rangle$ (n — оператор числа квантов), в результате чего удается получить замкнутое нелинейное уравнение для $n(t) = \langle n \rangle$. При этом фактически пренебрегается вкладом недиагональных элементов матрицы оператора n. Представляет интерес получить точные уравнения квантовой электродинамики без указанного приближения.

В настоящей работе показано, что если написать уравнения не для матричных элементов оператора n, а для соответствующих амплитуд разложения волновой функции по базисным функциям, то для них получается система линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Особенно простой вид имеют эти уравнения, когда вначале возбуждено мало атомов. В этом случае удается решить указанную систему. Очень близок к этой задаче также случай, когда вначале среда равновесная (все атомы занимают нижний энергетический уровень) и имеется слабое (сильное) поле излучения. Эту задачу также удается решить приближенно. Если написать уравнение для матрицы числа квантов и пренебречь недиагональными элементами этой матрицы, то можно получить уравнение, аналогичное соответствующему уравнению из работ [1, 2], однако совпадающее с ним только в случае, когда все атомы возбуждены. Мы более подробно рассматриваем также линейный по числу фотонов случай и находим поправки как за счет нелинейных, так и недиагональных членов. Для выяснения роли недиагональных членов на счетно-вычислительной машине указанная система решалась в случаях, когда среда состоит из 10, 50 и 150 активных атомов, которые все возбуждены. Результаты численных вычислений показывают, что колебания плотности фотонов носят нерегулярный характер и не согласуются с результатами [1, 2].

2. Система основных уравнений

Рассмотрим модельную задачу об излучении N идентичных двухуровневых атомов без учета подкачки и релаксационных потерь. Считая матричный элемент перехода одинаковым для всех атомов, гамильтониан системы запишем в виде

$$H=\frac{\omega_0}{2}\left(\sum_j \sigma_3^{(j)}+2\sum_{\vec{k}\lambda} c^+_{\vec{k}\lambda} c_{\vec{k}\lambda}\right)+\sum_{\vec{k}\lambda} H_{\vec{k}\lambda},$$

$$H_{\vec{k}\lambda}=(\omega_{\vec{k}}-\omega_0)\, c^+_{\vec{k}\lambda} c_{\vec{k}\lambda}+\beta^*_{\vec{k}\lambda} c_{\vec{k}\lambda}\sum_j \sigma_+^{(j)} e^{i\vec{k}\vec{x}_j}+\beta_{\vec{k}\lambda} c^+_{\vec{k}\lambda}\sum_j \sigma_-^{(j)} e^{-i\vec{k}\vec{x}_j}. \tag{1}$$

Здесь ω_0 — разность энергии верхнего и нижнего уровня изолированного атома, $c^+_{\vec{k}\lambda}$ и $c_{\vec{k}\lambda}$ — операторы излучения и поглощения фотона с импульсом $\vec{k}$ и поляризацией λ, $\vec{x}_j$ — координата центра тяжести j-го атома, $\beta_{\vec{k}\lambda}$ — матричный элемент перехода с верхнего уровня на нижний с излучением $\vec{k}$, λ — фотона, $\sigma_{3,\pm}$ — матрицы Паули.

При вычислении среднего числа фотонов данной моды

$$n_{\vec{k}\lambda}(t)=\langle e^{itH} c^+_{\vec{k}\lambda} c_{\vec{k}\lambda} e^{-itH}\rangle \tag{2}$$

мы можем опустить в H первое слагаемое, поскольку этот оператор коммутирует как с оператором $\sum H_{\vec{k}\lambda}$, так и с оператором числа фотонов $c^+_{\vec{k}\lambda} c_{\vec{k}\lambda}$. (Заметим, что в формуле (2) усреднение производится по начальному состоянию системы). В дальнейшем мы ограничимся упрощенной задачей, когда в резонаторе имеет место лишь один какой-либо тип колебаний, а распределение атомов по уровням в начальный момент фиксировано (N_1, N_2 — число атомов на верхнем и нижнем уровнях соответственно, $N_1+N_2=N$). В этом случае полная волновая функция системы из N атомов и поля излучения данной моды $\vec{k}$, λ удовлетворяет уравнению Шредингера:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi_{\vec{k}\lambda}(t)=H_{\vec{k}\lambda}\psi_{\vec{k}\lambda}(t). \tag{3}$$

Пронумеруем атомы в порядке $j=1, 2, \cdots, N$ и предположим, что в момент $t=0$ первые $j=N_1$ атомов занимают верхний уровень, остальные N_2 атомов—нижний уровень, а фотонов нет. Тогда начальная функция имеет вид

$$\psi_{\vec{k}\lambda}(0)=\chi_1(1/2)\cdots\chi_{N_1}(1/2)\,\chi_{N_1+1}(-1/2)\cdots\chi_N(-1/2)\,\Phi_0, \tag{4}$$

где $\chi(\pm 1/2)$ двухкомпонентный спинор с проекцией спина $\pm 1/2$, Φ_0 — волновая функция фотонного вакуума. Совершая преобразование

$\psi \to \exp\left(\frac{i\vec{k}}{2}\sum_j \vec{x}_j \sigma_3^{(j)}\right)\psi$ над волновой функцией, приведем гамильтониан к виду

$$H = (\omega - \omega_0)\, c^+ c + \beta^* c J_+ + \beta c^+ J_-, \tag{5}$$

где $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$, $\vec{J}_{1,2}$ — операторы полного момента верхних и нижних атомов соответственно (в дальнейшем индексы $\vec{k}$, λ мы везде опускаем). При таком преобразовании волновая функция начального состояния, с учетом (4), получает некоторый фазовый сдвиг, что несущественно при вычислении среднего числа фотонов $n(t)$. Опуская указанный фазовый множитель, (4) можно записать в виде:

$$\psi(0) = \psi_1(j_1, j_1)\, \psi_2(j_2, -j_2)\, \Phi_0, \tag{6}$$

где $\psi(j, m)$ — волновая функция момента j с проекцией m, а $2j_{1,2} = N_{1,2}$. Гамильтониан (5) коммутирует с операторами J_1^2, J_2^2 и J^2, поэтому эти величины сохраняются. Поскольку гамильтониан зависит от операторов полного момента, то естественно в (6) переходить к представлению полного момента путем сложения моментов. Это дает

$$\psi(0) = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \left[\frac{(2j+1)\,(2j_1)!\,(2j_2)!}{(j_1+j_2+j+1)!\,(j_1+j_2-j)!}\right]^{1/2} \psi(j, j_1-j_2)\, \Phi_0. \tag{7}$$

Из того факта, что J^2 коммутирует с H, следует, что в любой момент времени $\psi(t)$ может содержать только указанный в (7) набор значений полного момента ($|j_1 - j_2| \leqslant j \leqslant j_1 + j_2$). В результате процессов излучения и поглощения меняется только проекция полного момента и, в частности, при излучении одного фотона проекция момента уменьшается, а при поглощении—увеличивается на единицу. Нетрудно видеть, что при данном j возможное число фотонов n меняется в пределах $0 \leqslant n \leqslant j + j_1 - j_2$.

Представим теперь волновую функцию в виде следующего разложения:

$$\psi(t) = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{n=0}^{j+j_1-j_2} (\beta/\beta^*)^{n/2} a_{j,n}(t)\, \psi(j, j_1-j_2-n)\, \Phi_n, \tag{8}$$

где Φ_n — волновая функция системы n одинаковых фотонов в представлении вторичного квантования $\left(\Phi_n = \frac{(c^+)^n}{\sqrt{n!}}\Phi_0\right)$. Из сравнения (7) и (8) мы находим, что

$$a_{j,n}(0) = \delta_{n0}\left[\frac{(2j+1)\,(2j_1)!\,(2j_2)!}{(j_1+j_2+j+1)!\,(j_1+j_2-j)!}\right]^{1/2}. \tag{9}$$

Чтобы получить уравнение для амплитуды $a_{j,n}(t)$, подставим (8) в (3) и воспользуемся гамильтонианом (5). Тогда легко показать, что $a_{j,n}(t)$ удовлетворяют следующей системе уравнений

$$i\frac{d}{dx} a_{j,n} = n\varepsilon a_{j,n} + \sqrt{n\,(j+j_1-j_2-n+1)\,(j-j_1+j_2+n)}\, a_{j,n-1} +$$

$$+\sqrt{(n+1)(j+j_1-j_2-n)(j-j_1+j_2+n+1)}\,a_{j,\,n+1}, \qquad (10)$$

где $x=t|\beta|$, $\varepsilon=(\omega-\omega_0)\big/|\beta|$. Зная амплитуды $a_{j,\,n}$, среднее число фотонов можно вычислить по формуле

$$n(t)=\sum_j n_j(t);\ n_j(t)=\sum_n n\,|a_{j,\,n}(t)|^2. \qquad (11)$$

Из условия сохранения нормы волновой функции

$$\sum_{n=0}^{j+j_1-j_2}|a_{j,\,n}(t)|^2=\frac{(2j+1)(2j_1)!\,(2j_2)!}{(j_1+j_2+j+1)!\,(j_1+j_2-j)!} \qquad (12)$$

и из определения (11) получается следующее полезное ограничение на величину $n_j(t)$:

$$n_j(t)\leqslant(j+j_1-j_2)\frac{(2j+1)(2j_1)!\,(2j_2)!}{(j_1+j_2+j+1)!\,(j_1+j_2-j)!}. \qquad (13)$$

Преимущество системы (10) заключается в том, что это не операторное уравнение и различные компоненты по j не перепутываются. Если не переходить к представлению суммарного момента, а вводить, кроме квантового числа n, проекцию момента нижних атомов m, то тогда также можно получить аналогичную систему, однако она будет перепутывать, наряду с n, различные компоненты и по m. Особенно простой вид имеют уравнения (10), когда в среде возбуждено либо очень мало, либо очень много атомов. В этих случаях j принимает относительно небольшое число значений. Например, когда вначале возбуждены все атомы, то $j_2=0$, $2j_1=2j=N_1=N$, и тогда

$$i\frac{d}{dx}a_n=n\varepsilon a_n+n\sqrt{N+1-n}\,a_{n-1}+(n+1)\sqrt{N-n}\,a_{n+1}. \qquad (14)$$

Полезно также иметь уравнение для матричных элементов оператора числа фотонов. С этой целью запишем (10) в матричной форме

$$i\frac{d}{dx}a_j(x)=H_ja_j(x);\quad H_j=\varepsilon l+A_j+B_j,$$

$$l_{nk}=n\delta_{nk};\quad (A_j)_{nk}=\sqrt{n(j+j_1-j_2-n+1)(j-j_1+j_2+n)}\,\delta_{n-1,\,k};$$

$$B=A^+ \qquad (15)$$

и введем гейзенберговскую матрицу

$$L_j(x)=e^{ixH_j}\,le^{-ixH_j}, \qquad (16)$$

$(L_j)_{00}$ элемент которой связан с числом фотонов с помощью соотношения

$$n_j(t)=\frac{(2j+1)(2j_1)!\,(2j_2)!}{(j_1+j_2+j+1)!\,(j_1+j_2-j)!}(L_j)_{00}. \qquad (17)$$

Непосредственное дифференцирование показывает, что матрица $L_j(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2} L_j = -6 L_j^2 + [-\varepsilon^2 + 2(4j_1 - 4j_2 - 1)] L_j + \\ + 2(j + j_1 - j_2)(j - j_1 + j_2 + 1) + \varepsilon H, \tag{18}$$

или в интегральной форме

$$L_j(x) = \frac{2(j + j_1 - j_2)(j - j_1 + j_2 + 1)}{\lambda^2} (\operatorname{ch} \lambda x - 1) + \\ + l \left[\frac{\varepsilon^2}{\lambda^2} (\operatorname{ch} \lambda x - 1) + \operatorname{ch} \lambda x \right] + A_j \left[\frac{\varepsilon}{\lambda^2} (\operatorname{ch} \lambda x - 1) - \frac{i}{\lambda} \operatorname{sh} \lambda x \right] + \\ + B_j \left[\frac{\varepsilon}{\lambda^2} (\operatorname{ch} \lambda x - 1) + \frac{i}{\lambda} \operatorname{sh} \lambda x \right] - \frac{6}{\lambda} \int_0^x \operatorname{sh} \lambda (x - y) L_j^2(y) dy, \tag{19}$$

где $\lambda^2 = 2(4j_1 - 4j_2 - 1) - \varepsilon^2$. Уравнение (18) при $j_2 = 0$ и при пренебрежении недиагональными элементами матрицы L_j совпадает с аналогичным уравнением из работ [1, 2] для среднего числа фотонов $n(t)$. В остальных случаях (18) имеет лишь внешнее сходство с указанным уравнением. До сих пор мы рассматривали случай, когда в начальный момент поле излучения отсутствует. Иногда бывает необходимым учесть также начальное поле квантов. Такая задача возникает при прохождении квантов через резонансную среду, при вычислении диэлектрической проницаемости среды и т. д. Учесть начальное поле излучения можно легко, если в (8) суммирование по n начинать со значения $n = n_0$, где n_0 — число начальных квантов данной моды. Мы не будем приводить здесь общих уравнений, а рассмотрим только случай равновесной среды ($j_1 = 0$). Тогда соответствующие амплитуды удовлетворяют системе уравнений

$$i \frac{d}{dx} a_n = n\varepsilon a_n + \sqrt{(n+1)(n_0 - n)(N + 1 + n - n_0)}\, a_{n+1} + \\ + \sqrt{n(n_0 + 1 - n)(N - n_0 + n)}\, a_{n-1}, \tag{20}$$

что справедливо для поля $n_0 < N$. В случае сильного поля ($n_0 > N$) имеет место аналогичное уравнение.

3. Некоторые частные случаи

Система (10) имеет при данном j $j + j_1 - j_2 + 1$ чисто мнимых характеристических корней, нахождение которых в общем случае весьма затруднительно. Однако в некоторых частных случаях можно найти либо точные, либо приближенные решения. Рассмотрим сначала несколько случаев слабого возбуждения.

Если из всех атомов среды возбужден только один атом, то полный момент j может принимать два значения: $j = j_2 \pm {}^1/_2$. В случае $j = j_2 - {}^1/_2$ $n = 0$, поэтому достаточно ограничиться значением $j = j_2 + {}^1/_2$. В этом случае имеются две амплитуды — a_0 и a_1, которые удовлетворяют системе уравнений

$$ia_0' = \sqrt{N_2 + 1}\, a_1; \qquad a_0(0) = \frac{1}{\sqrt{N_2 + 1}}; \\ ia_1' = \varepsilon a_1 + \sqrt{N_2 + 1}\, a_0; \qquad a_1(0) = 0. \tag{21}$$

Для среднего числа фотонов получается значение

$$n(t) = \frac{4\sin^2\frac{x}{2}\sqrt{\varepsilon^2 + 4(N_2+1)}}{\varepsilon^2 + 4(N_2+1)}. \tag{22}$$

Формула отличается от излучения одного изолированного атома ($N_2 = 1$) не только тем, что меняется амплитуда колебаний, но отличается также спектром и периодом.

Рассмотрим теперь излучение двух возбужденных атомов в резонансе ($\omega = \omega_0$, $\varepsilon = 0$). В этом случае система (10) опять расщепляется на несколько простых уравнений, решение которых дает

$$n(t) = \frac{2}{N_2+2}\sin^2 x\sqrt{N_2} + \frac{2}{2N_2+3}\left[\frac{\sin^2 x\sqrt{4N_2+6}}{N_2+2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2(1-\cos x\sqrt{4N_2+6})^2}{2N_2+3}\right]. \tag{23}$$

Колебания числа фотонов в этом случае становятся, вообще говоря, нерегулярными. Первое слагаемое здесь соответствует вкладу $j = j_2$, второе слагаемое — $j = j_2 + 1$. При больших N_2 вклад от момента $j = j_2 + 1$ ничтожно мал, а вклад от момента $j = j_2$ дает значение два раза большее, чем $n(t)$, определяемое из формулы (22) при $\varepsilon = 0$. Это есть результат более общего утверждения, а именно, при $N_2 \gg N_1$ число фотонов определяется формулой

$$n(t) = \frac{4N_1}{\varepsilon^2 + 4N_2}\sin^2\frac{x}{2}\sqrt{\varepsilon^2 + 4N_2}. \tag{24}$$

Это следует из следующих простых рассуждений. При $j_2 \gg j_1$, согласно (13), вклад высоких моментов j ничтожно мал. Поэтому при вычислении $n(t)$ мы можем ограничиться значением $j = j_2 - j_1 + 1$ (значению $j = j_2 - j_1$ соответствует $n = 0$, поэтому это значение j мы не рассматриваем). При $j = j_2 - j_1 + 1$ система (10) расщепляется на два уравнения ($n = 0, 1$), решение которых приводит к (24).

Формула (13) приводит также к существенному ограничению и в случае $j_1 \gg j_2$. При вычислении $n(t)$ можно ограничиться только значением $j = j_1 - j_2$. Тогда получается уравнение (14) со значением $N = N_1 - N_2$.

Относительно простое решение можно получить также для уравнения (20), если начальное поле слабое ($n_0 \ll N$), либо сильное ($n_0 \gg N$). Полагая в случае $n_0 \ll N$

$$a_n = \left[\frac{(n_0)!}{n!\,(n_0-n)!}\right]^{1/2} A_n \tag{25}$$

и пренебрегая в (20) n_0 и n по сравнению с N, мы придем к уравнению

$$i\frac{d}{dx}A_n = n\varepsilon A_n + (n_0 - n)A_{n+1} + nA_{n-1}, \tag{26}$$

коэффициенты которого—линейные функции от n. Такие системы имеют точное решение:

$$A_n(x) = e^{\frac{i}{2}n_0 p_2 x}\left(\frac{p_1 e^{-\frac{i}{2}(p_1-p_2)x} - p_2}{p_1 - p_2}\right)^{n_0}\left(2\sqrt{N}\frac{e^{\frac{i}{2}(p_1-p_2)x} - 1}{p_2 - p_1 e^{\frac{i}{2}(p_1-p_2)x}}\right)^{n_0-n},$$

$$p_{1,2} = -\varepsilon \pm \sqrt{4N+\varepsilon^2}. \tag{27}$$

Вычисление $n(t)$ с помощью (27) дает [2]

$$n = n_0\left(1 - \frac{4N}{4N+\varepsilon^2}\sin^2\frac{x}{2}\sqrt{4N+\varepsilon^2}\right). \tag{28}$$

Точно так же можно рассмотреть случай сильного поля.

4. Линейная по числу фотонов область

Некоторые результаты можно получить, если линеаризировать уравнения (18) и (19) (пренебречь членами L_j^2). Нетрудно убедиться, что из (18) следует такое же линейное уравнение для $n = \sum n_j$, какое приводится в [1]. Чтобы выяснить границы применимости линеаризированного уравнения, мы вычислим также первую итерацию в точном интегральном уравнении (19), учитывая также вклад недиагональных элементов матрицы L_j. При вычислении числа фотонов мы воспользуемся следующим соотношением:

$$\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2}[(j+j_1-j_2)(j-j_1+j_2+1)]^m\frac{(2j+1)(2j_1)!(2j_2)!}{(j_1+j_2+j+1)!(j_1+j_2-j)!} = \begin{cases} N_1 & \text{при} \quad m=1 \\ N_1 N & \text{при} \quad m=2 \end{cases} \tag{29}$$

которое легко получить, если вычислить среднее значение оператора $(J^2 - J_3^2 + J_3)^m$ в состоянии $\psi(0)$. Опуская в остальном очевидные выкладки, дадим окончательный результат:

$$n(t) = \frac{2N_1}{\lambda^2}(\operatorname{ch}\lambda x - 1) - \frac{6N_1}{\lambda^4}(\operatorname{ch}\lambda x - 1)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3\varepsilon^2}{\lambda^2} - 1\right) + \frac{6N}{\lambda^2}\right] +$$

$$+ \frac{N_1}{\lambda^4}(\operatorname{ch}2\lambda x - \operatorname{ch}\lambda x)\left[\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\lambda^2}\right) + \frac{4N}{\lambda^2}\right] + \frac{6N_1}{\lambda^3}x\operatorname{sh}\lambda x\left(\frac{\varepsilon^2}{\lambda^2} + \frac{4N}{\lambda^2}\right).$$

Здесь первый член соответствует приближению линеаризированного уравнения, все члены, пропорциональные N, получаются от диагональных элементов оператора L_j, а все первые слагаемые в квадратных скобках соответствуют вкладу недиагональных элементов. Если N порядка λ^2 или ε^2, то недиагональные элементы также оказываются существенными. Рассмотрим сначала область вблизи резонанса ($\varepsilon \sim 0$) и большие начальные перенаселенности ($N_1 - N_2 = N_- \gg 1$). Как это следует из (30), при $N \gtrsim |N_-|^2$ поправка всегда порядка и больше линейного по n члена. В квантовых генераторах, как правило, $N_-^2 \gg N$. Тогда, оставляя экспоненциально большие члены, мы найдем

$$n(t) \simeq \frac{N_1}{4N_-} \exp(\lambda x) \left[1 + \frac{1}{8N_-}\left(1 + \frac{N}{N_-}\right) \exp(\lambda x)\right], \qquad (31)$$

так что линейный режим колебаний существует до значений $x \ll \ll \frac{1}{\lambda} \ln 8N_-$.

В случае отрицательной перенаселенности, когда возбуждено мало атомов, из (30) получается уже известный результат (24).

5. Полностью возбужденная система

Если написать уравнение (18) для числа фотонов n_j и отбросить недиагональные элементы матрицы L_j, то полученное нелинейное уравнение решается, как и в [1], в эллиптических функциях. Однако здесь необходимо произвести дополнительное суммирование $\sum n_j$, что невозможно делать для произвольных j_1 и j_2. Если же, однако, выполняется условие $(4N_- - \varepsilon^2)^2 \gg N_1(N_2+1)$, то $(L_j)_{00}$ от j не зависит и наши результаты совпадают с результатами [1, 2].

В одном частном случае, когда все атомы возбуждены, уравнение (18) совпадает с аналогичным уравнением Галицкого и др. Как показано ими, $n(t)$ выражается через эллиптические интегралы и является периодической функцией с минимальным и максимальным значениями ноль и N соответственно.

Математически более простое решение можно получить следующим методом. Заменим при $\varepsilon = 0$ разностно-дифференциальное уравнение (14) дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка для функции $a(x, n)$, считая, что n пробегает непрерывный ряд значений (это фактически соответствует полуклассическому рассмотрению поля излучения). Нетрудно убедиться, что такая замена справедлива для больших N и при значениях n не очень близких к N. Если же, однако, распространить указанную процедуру на всевозможные значения n и учесть δ-образность функции $a(x, n)$ в точке $x = 0$, то можно показать, что $n(t)$—периодическая функция с периодом $T = 2\tau_0 \ln 8N$ $(\tau_0^{-1} = 2|\beta|\sqrt{N})$, а значения $n(t)$ для моментов времени $0 \leqslant t \leqslant T/2$ определяются из уравнения

$$\frac{t}{\tau_0} - \ln \frac{\sqrt{N + 1/2} - \sqrt{N - n}}{\sqrt{N + 1/2} + \sqrt{N - n}} = \frac{T}{2\tau_0}, \qquad \varepsilon = 0. \qquad (32)$$

Число фотонов, как это следует из формулы, сначала по экспоненте растет, достигая максимального значения $n_{\max} = N$ при $t = T/2$ и затем экспоненциально падает до значения $n = 0$ при $t = T$.

Переход от дискретных к непрерывным n фактически эквивалентен пренебрежению недиагональными элементами матрицы $L(x)$. Действительно, поскольку $a(x, n)$ по x и n удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка, а начальное условие имеет вид δ-функции, то и в любой момент времени $|a(x, n)|^2 \sim \delta[\varphi(x, n)]$, причем нули функции $\varphi(x, n)$ определяются из уравнения (32). Поэтому $\langle nn \rangle = \sum n^2 |a(x, n)|^2 = \left(\sum n|a(x,n)|^2\right)^2 = \langle n \rangle^2$.

Для иллюстрации того факта, что недиагональные элементы могут оказаться весьма существенными, система (14) в случае точного резонанса при значениях $N = 10$, 50, 150 решалась на счетно-вычислительной машине. Численные результаты приведены на рисунке.

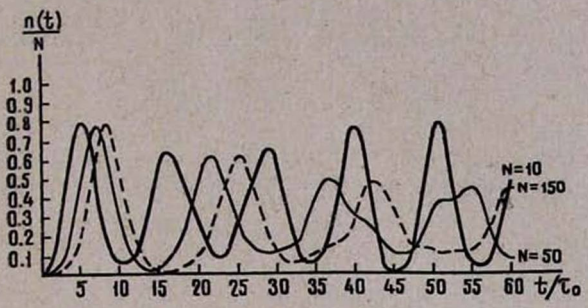

Рис. 1.

Как видно, колебания плотности фотонов носят нерегулярный характер, причем эти нерегулярности усиливаются с увеличением N. Значение $n_{max} = N$ не достигается никогда, а зачастую пички имеют высоту, равную лишь $N/2$. Можно, в принципе, предположить, что с увеличением N установится режим регулярных колебаний, соответствующий (32). Однако система (14) при $\varepsilon = 0$ содержит лишь один параметр N. Если имеется такой режим, то скорее всего он может наступить при значениях $N \gg 1$, так что асимптотические значения n_{max} и периода колебаний при значениях $N = 50$ и 150 должны были быть достигнуты. Это дает некие основания предположить, что регулярный режим колебаний при больших перенаселенностях отсутствует всегда и квантовый характер начальных условий запоминается системой во все последующие моменты времени.

Выражаю благодарность проф. М. Л. Тер-Микаеляну за многочисленные полезные обсуждения.

Физический институт ГКАЭ Поступила 4 ноября 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. И. Алексеев, Ю. А. Вдовин, В. М. Галицкий*, ЖЭТФ, 46, 320 (1964).
2. *А. И. Алексеев, В. М. Галицкий*, ЖЭТФ, 47, 1893 (1964).

ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐ ՌԵԶՈՆԱՆՍԱՅԻՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ

Վ. Մ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Դիտարկված են երկմակարդականի ատոմների էլեկտրամագնիսական տատանումներն առանց հաշվի առնելու ռելակսացիոն կորուստներն այն դեպքում, երբ ռեզոնատորում գոյություն ունի տատանումների մեկ ձև, իսկ ատոմների բաշխումը ըստ մակարդակների՝ սկզբնական մոմենտում տրված է։ Ամպլիտուդների համար ստացված են քվանտային էլեկտրադինամիկայի ճշգրիտ հավասարումները։ Դիտարկված են մի քանի մասնակի դեպքեր, որոնք ունեն կամ ճշգրիտ, կամ մոտավոր լուծումներ։ Դիտարկված է տատանումների գծային տիրույթը։ Ճշգրիտ հավասարումները

Բվային կերպով լուծված են այն դեպքերում, երբ ռեզոնատորը պարունակում է ընդամենը 10,50 և 150 ակտիվ ատոմներ։ Ցույց է տրված, որ այդ դեպքերում ֆոտոնների տատանումներն ունեն ոչ ռեգուլյար բնույթ։

ELECTROMAGNETIC OSCILLATIONS IN A RESONANCE MEDIUM

by V. M. HARUTYUNYAN

Electromagnetic oscillations are investigated for a resonance medium consisting of identical two-level molecules with no account of pumping and relaxation losses.