

ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ РЕНТГЕНОВСКИХ ЛУЧЕЙ С УЧЕТОМ ДЛИТЕЛЬНОСТИ КОГЕРЕНТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ (случай кристаллической пластинки)

П. А. БЕЗИРГАНЯН

Исследована дифракция рентгеновских лучей в идеальных кристаллических пластинках в рамках динамической теории интерференции с учетом длительности когерентного излучения. Показано, что когда длительность когерентного излучения велика, то ее конечностью можно пренебречь. Когда длительность когерентного излучения мала, конечностью этой длительности нельзя пренебречь. В последнем случае учет конечности длительности когерентного излучения дает новые результаты. Получено выражение для интенсивности рассеяния.

В работе (1) исследовано отражение рентгеновских лучей от толстого кристалла с учетом многократных отражений между отражающими плоскостями и длительности когерентного излучения источника.

Кристалл считаем толстым, если последние плоскости его не участвуют в отражении из-за экстинкции (односторонний случай, первичный пучок через кристалл не проходит). Кристалл считаем тонким, если все плоскости участвуют в отражении (часть энергии первичного пучка проходит через кристалл).

Рассмотрим отражение рентгеновских лучей от кристаллической пластинки с учетом многократных отражений (между плоскостями) и длительности когерентного излучения.

В рассматриваемом случае размеры отражающих плоскостей бесконечно велики, а их число конечно (длина и ширина кристалла бесконечны, а толщина ограничена — тонкая кристаллическая пластинка).

Допустим, плоская монохроматическая волна в направлении единичного вектора $\vec{S}_0$ падает на идеальный кристалл (кристаллическую пластинку). Пусть отражающие плоскости параллельны большой поверхности кристалла (см. рис. 1), а число их равно N .

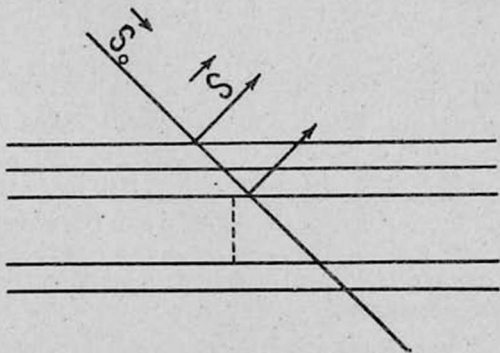


Рис. 1.

Без учета длительности когерентного излучения, но с учетом многократных отражений между отражающими плоскостями, для относительной амплитуды отраженной волны получим (см. (1))

$$\frac{S_0}{T_0} = qe^{-i\gamma} \frac{1 - x^N (1 + \sigma e^{-i\gamma})^N \exp \{-ikNd \sin \theta\}}{1 - x (1 + \sigma e^{-i\gamma}) \exp \{-ikd \sin \theta\}}, \quad (1)$$

где $qe^{-i\gamma}$ и $\sigma e^{-i\gamma}$ — амплитуды волн, отраженной и рассеянной в направлении первичного пучка, соответственно,

d — межплоскостное расстояние рассеивающих плоскостей,

x — определяется соотношением $T_{r+1} = xT_r$, где T_{r+1} и T_r амплитуды прямого пучка над $r+1$ -ой и r -ой плоскостями, соответственно,

θ — угол отражения.

Если длительность одного акта испускания обозначить через τ , то максимальное число отраженных волн (отражающих плоскостей), одновременно участвующих в интерференции, в рассматриваемом случае будет

$$n = \frac{\tau}{\tau_0},$$

где $\tau_0 = \frac{2d \sin \theta}{c}$ — время запаздывания между волнами, отраженными от соседних плоскостей;

c — скорость света.

Следовательно, для учета длительности когерентного излучения необходимо различать случаи:

1. Когда число отражающих плоскостей кристаллической пластинки меньше максимального числа отражающих плоскостей, одновременно участвующих в отражении ($N < n$), и 2. Когда больше ($N > n$).

В первом случае относительная интенсивность отраженной волны может быть выражена как сумма трех слагаемых

$$\left| \frac{S_0}{T_0} \right|^2 = \frac{1}{\tau} [J_1 + J_2 + J_3], \quad (2)$$

где

$$J_1 = \tau_0 \sum_{m=2}^{N-1} \left| qe^{-i\gamma} \frac{1 - x^m (1 + \sigma e^{-i\gamma}) \exp \{-ikmd \sin \theta\}}{1 - x (1 + \sigma e^{-i\gamma}) \exp \{-ikd \sin \theta\}} \right|^2,$$

$$J_2 = [n - 2(N-1)] \tau_0 \left| qe^{-i\gamma} \frac{1 - x^N (1 + \sigma e^{-i\gamma})^N \exp \{-ikNd \sin \theta\}}{1 - x (1 + \sigma e^{-i\gamma}) \exp \{-ikd \sin \theta\}} \right|^2,$$

$$J_3 = \tau_0 \sum_{r=1}^{N-1} \left| qe^{-i\gamma} x^{2r} \frac{1 - x^{N-r} (1 + \sigma e^{-i\gamma})^{N-r} \exp \{-ik(N-r)d \sin \theta\}}{1 - x (1 + \sigma e^{-i\gamma}) \exp \{-ikd \sin \theta\}} \right|^2.$$

Во втором случае ($N > n$) относительная интенсивность выражается следующим образом

$$\left| \frac{S_0}{T_0} \right|^2 = \frac{1}{\tau} [J_4 + J_5 + J_6], \quad (3)$$

где

$$J_3 = \tau_0 \sum_{m=1}^{n-1} \left| q e^{-i\gamma} \frac{1 - x^m (1 + \sigma e^{-i\gamma})^m \exp \{-ikmd \sin \theta\}}{1 - x(1 + \sigma e^{-i\gamma}) \exp \{-ikd \sin \theta\}} \right|^2,$$

$$J_5 = \tau_0 \sum_{r=n}^{N-n+1} \left| x^{2(r-1)} q e^{-i\gamma} \frac{1 - x^n (1 + \sigma e^{-i\gamma})^n \exp \{-iknd \sin \theta\}}{1 - x(1 + \sigma e^{-i\gamma}) \exp \{-ikd \sin \theta\}} \right|^2,$$

$$J_6 = \tau_0 \sum_{r=n}^{n-1} \left| x^{2[N-(n-r)]} q e^{-i\gamma} \frac{1 - x^{n-r} (1 + \sigma e^{-i\gamma})^{n-r} \exp \{-ik(n-r)d \sin \theta\}}{1 - x(1 + \sigma e^{-i\gamma}) \exp \{-ikd \sin \theta\}} \right|^2.$$

Детально рассмотрим следующие частные случаи:

1. Случай, когда в интерференции одновременно могут участвовать много больше отражающих плоскостей, чем имеет облучаемый кристалл ($n \gg N$). Это может случиться тогда, когда кристаллическая пластинка достаточно тонкая (меньше N) и длительность когерентного излучения достаточно велика (больше τ).

В этом частном случае относительная интенсивность выражается формулой (2) и притом, имея ввиду условие $n \gg N$, мы можем, не совершая большой ошибки, пренебречь членами J_1 и J_3 относительно J_2 .

Таким образом, для относительной интенсивности отраженных волн, вернее, для отраженной части энергии падающего одного дуга, получим

$$\left| \frac{S_0}{T_0} \right|^2 = \frac{\tau_0}{\tau} [n - 2(N-1)] \left| q e^{-i\gamma} \frac{1 - x^N (1 + \sigma e^{-i\gamma})^N \exp \{-ikNd \sin \theta\}}{1 - x(1 + \sigma e^{-i\gamma}) \exp \{-ikd \sin \theta\}} \right|^2,$$

Это выражение можно, как это сделано в [1], привести к виду

$$\left| \frac{S_0}{T_0} \right|^2 = \frac{\tau_0}{\tau} [n - 2(N-1)] q^2 \frac{1 + A_4^{2N} - 2A_4^N \cos N\varphi_4}{1 + A_4^2 - 2A_4 \cos \varphi_4}, \quad (4)$$

где

$$A_1 = \{(1 - q^2) [(1 - A_1 \cos \varphi_4)^2 + A_1^2 \sin^2 \varphi_4]\}^{1/2},$$

$\operatorname{tg} \varphi_4 = \frac{\gamma_1''}{\gamma_1'}$. Здесь γ_1' и γ_1'' — вещественная и мнимая части величины γ_1 соответственно, т. е. $\gamma_1 = \gamma_1' + i\gamma_1''$, а γ_1 определяется соотношением

$$x = (1 - \gamma_1) e^{-i\gamma} \quad (\gamma \text{ целое число}).$$

γ_1 — малая величина, так как T_{r+1} и T_r по величине мало отличаются друг от друга;

$$A_1 = \sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_1''^2},$$

γ_1' и γ_1'' определяются из следующих соотношений

$$\gamma_1'^2 - \gamma_1''^2 = (\sigma^2 - q^2) \cos 2\gamma - 2\sigma q \sin \gamma - v^2,$$

$$2\gamma_1' \gamma_1'' = (q^2 - \sigma^2) \sin 2\gamma - 2\sigma q \cos \gamma.$$

Величина v определяется соотношением

$$kd \sin \theta = v\pi + v,$$

при $v = 0$, $kd \sin \theta_0 = v\pi$, где θ_0 угол, удовлетворяющий уравнению Вульфа-Брэгга, следовательно, v тоже малая величина.

$$\varphi_1 = \varphi_2 + \varphi_3 + v,$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{A_1 \sin \varphi_1}{1 - A_1 \cos \varphi_1}, \quad \operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{\sigma \sin \gamma}{1 + \sigma \cos \gamma}.$$

Без учета длительности когерентного излучения, вернее, предполагая, как обычно это делается, что длительность когерентного излучения бесконечно велика (см. [2]), для относительной интенсивности отраженной волны получим

$$\left| \frac{S_0}{T_0} \right|^2 = q^2 \frac{1 + A_1^{2N} - 2A_1^N \cos N\varphi_1}{1 + A_1^2 - 2A_1 \cos \varphi_1}. \quad (5)$$

Можно заметить, что выражения (4) и (5) отличаются только множителем

$$\frac{\tau_0}{\tau} [n - 2(N-1)]. \quad (6)$$

Последняя величина, при больших τ , следовательно и больших n , мало отличается от единицы. Действительно, так как $n = \frac{\tau}{\tau_0}$, то можно

(6) переписать в виде $1 - \frac{2(N-1)}{n}$, а это выражение при $n \gg N$ мало отличается от единицы.

Таким образом приходим к следующему выводу:

При больших длительностях когерентного излучения, когда число плоскостей, от которых отраженные волны одновременно могут участвовать в интерференции в точке наблюдения, намного больше числа отражающих плоскостей кристалла, конечность когерентного излучения можно не учитывать.

2. Случай, когда в интерференции одновременно могут участвовать много меньше плоскостей, чем имеет кристалл.

Теперь рассмотрим другой крайний случай, когда $N \gg n$.

В этом частном случае относительная интенсивность выражается формулой (3) и, имея ввиду условие $N \gg n$, мы можем пренебречь членами J_4 и J_6 относительно J_5 , тогда получим

$$\left| \frac{S_0}{T_0} \right|^2 = \frac{\tau_0}{\tau} \sum_{r=n}^{N-n+1} \left| x^{2(r-1)} q e^{-i\gamma} \frac{1 - x^n (1 + \sigma e^{-i\gamma})^n \exp \{-iknd \sin \theta\}}{1 - x (1 + \sigma e^{-i\gamma}) \exp \{-ikd \sin \theta\}} \right|^2,$$

которое можно привести к виду

$$\left| \frac{S_0}{T_0} \right|^2 = \frac{\tau_0}{\tau} q^2 \frac{1 + A_1^{2n} - 2A_1^n \cos n\varphi_1}{1 + A_1^2 - 2A_1 \cos \varphi_1} \cdot A_2^{2(n-1)} \cdot \frac{1 - A_2^{2(N-2n+2)}}{1 - A_2^2}, \quad (7)$$

где

$$A_2 = \sqrt{(1 - A_1 \cos \varphi_1) + A_1^2 \sin^2 \varphi_1},$$

Выражения (5) и (7) отличаются друг от друга множителем

$$\frac{\tau_0}{\tau} A_2^{2(n-1)} \cdot \frac{1 - A_2^{2(N-2n+2)}}{1 - A_2^2},$$

который значительно отличается от единицы.

3. Случай, когда число плоскостей кристалла равно величине $n = \frac{\tau_0}{\tau}$.

Когда число плоскостей кристалла равно максимальному числу возможных плоскостей, одновременно участвующих в интерференции в точке наблюдения, для относительной интенсивности получим

$$\left| \frac{S_0}{T_0} \right|^2 = \frac{1}{\tau} [I_1 + I_2],$$

которое после суммирования по n можно привести к виду

$$\begin{aligned} \left| \frac{S_0}{T_0} \right|^2 = & \frac{\tau_0}{\tau} \frac{q^2}{1 + A_4^2 - 2A_4 \cos \varphi_4} \left\{ (N-1) + A_4^2 \frac{1 - A_4^{2(n-1)}}{1 - A_4^2} + \right. \\ & + 2 \frac{A_4^N \cos \varphi_4 - A_4^{N+1} \cos (N-1) \varphi_4 - A_4 \cos \varphi_4 + A_4^2}{1 - 2A_4 \cos \varphi_4 + A_4^2} + \\ & + \frac{1 - A_4^{2N}}{1 - A_4^2} + \frac{A_4^{2N} (1 - A_4^{2N} A_4^{-2N})}{1 - A_4^2 A_4^{-2}} - \\ & \left. - 2A_4^N \frac{\cos n \varphi_4 - A_4^4 A_4^{-1} \cos (n+1) \varphi_4 - A_4^{4N} A_4^{-4} + A_4^{4(N+1)} A_4^{-(N+1)} \cos \varphi_4}{1 + A_4^8 A_4^{-2} - 2A_4^4 A_4^{-1} \cos \varphi_4} \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

Последнее также отличается от выражения (5). Действительно, это выражение исследовано в [1] и показано, что оно значительно отличается от (5).

Выражения интенсивностей (4), (7), и (8) можно сопоставить с экспериментом. Для этого необходимо исследовать интенсивность рассеяния монохроматического излучения с различными длительностями когерентного излучения (с различными длинами волн) при остальных одинаковых условиях опыта.

Из приведенных выше расчетов можно сделать следующие выводы:

1. В случае, когда длительность когерентного излучения достаточно велика, так что максимальное число возможных плоскостей, одновременно участвующих в интерференции в точке наблюдения много больше числа отражающих плоскостей кристалла, конечность длительности когерентного излучения можно не учитывать.

2. В случае, когда длительность когерентного излучения мала, так что максимальное число возможных плоскостей, одновременно участвующих в интерференции в точке наблюдения, меньше или равно числу отражающих плоскостей, конечностью длительности когерентного излучения нельзя пренебречь. Действительно, исследование показывает, что относительные интенсивности (7) и (8), полученные с

учетом длительности когерентного излучения в случае излучения $M_0K_{\alpha_1}$ и отражающих плоскостей (211) кристалла кальцита, соответственно 1,5 и 2 раза меньше, чем относительная интенсивность (5).

Ереванский государственный
университет

Поступила 7 VI—65

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. П. А. Безиргян, ЖТФ, 36, вып. 3 (1966).
2. А. Г. Акритов, Д. А. Бадалян, П. А. Безиргян, Известия АН Арм.ССР, физика, 1, 3 (1966).

ՌԵՏԵՆՏԱՆ ԶԱՌԱԳԱՅԹՆԵՐԻ ԻՆՏԵՐՖԵՐԵՆՑԻԱՅԻ ԴԻՆԱՄԻԿ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆՆԸ
ԿՈՂՆԵՐԵՆՏ ԶԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ՏԵՎՈՂՈՒԹՅԱՆ ՀԱՇՎԱՌՄԱՄԲ

(Բյուրեղային թիթեղի դեպք)

Պ. Ա. ԲԵԶԻՐԳՅԱՆ

Աշխատության մեջ հետազոտվում է ռենտգենյան ճառագայթների ինտերֆերենցիայի իդեալական բյուրեղներում կոհերենտ ճառագայթման տեղության հաշվառմամբ: Դիտարկվում է բարակ բյուրեղի (բյուրեղային թիթեղի) դեպքը:

Ապացուցվում է, որ երբ կոհերենտ ճառագայթման տեղությունը բավականաչափ մեծ է, այնքան, որ ինտերֆերենցիային միաժամանակ մասնակցող հարթությունների թիվը շատ մեծ է բյուրեղի անդրադարձնող հարթություններից, կոհերենտ ճառագայթման տեղության վերաբերյալ լինելը կարելի է հաշվի չառնել: Իսկ երբ բյուրեղի անդրադարձնող հարթությունների թիվը շատ փոքր է միաժամանակ ինտերֆերենցիային մասնակցող հնարավոր հարթություններից, ապա կոհերենտ ճառագայթման տեղության վերաբերյալ լինելը հաշվի չառնելու դեպքում, թույլ կտրվի սխալ:

DYNAMIC THEORY OF X-RAY INTERFERENCE WITH DUE REGARD FOR THE DURATION OF COHERENT RADIATION

(The crystal plate case)

by P. A. BEZIRGANIAN

A study of the diffraction of X-rays from ideal crystal plates is made within the framework of the dynamic theory of interference, taking account the duration of coherent radiation. It is shown that when the duration of coherent radiation is great, the finiteness of duration may be omitted. Otherwise it should be taken into account.