Известия АН Армении, Науки о Земле, 1992, XLV, №3, 74—79.
УДК 528.41

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

А. Г. АФРИКЯН

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ УРАВНИВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

Небывалое землетрясение в Армении еще раз доказало, что качество строительства, его надежность и сейсмостойкость в конечном итоге зависят не только от качества самих конструкций и их монтажа, но и от взаимного расположения элементов конструкций, их пространственной взаимосвязи, то есть прямо зависят от результата измерений различных параметров сооружений, а значит от уровня культуры геодезического обеспечения строительства.

Современные методы строительства, с все возрастающим уровнем производства, предъявляют существенные требования к точности определения координат пунктов опорных геодезических сетей, которая зачастую соизмерима с предельно возможной точностью измерений, к качеству геодезического обслуживания строительно-монтажных работ. В таких условиях проектирование и уравнивание опорных сетей должны вестись с применением тех методов расчета точности и уравнивания, которые гибки по отношению к изменению исходных данных, учитывают ошибки исходных данных при ступенчатом построении сети и т. д.

В данной статье рассматриваются некоторые вопросы уравнивания пространственной сети ответственного сооружения. На исходном монтажном горизонте предусмотрена сеть трилатерации (рис. 1), уравнивание которой выполняется параметрическим способом. Обратные веса координат пунктов 1,0—1,7 определяются уравниванием по методу наименьших квадратов. Предполагается измерение линий фазовыми дальномерами, поэтому стороны сети следует считать равноточными, вес стороны принимается равным 1.

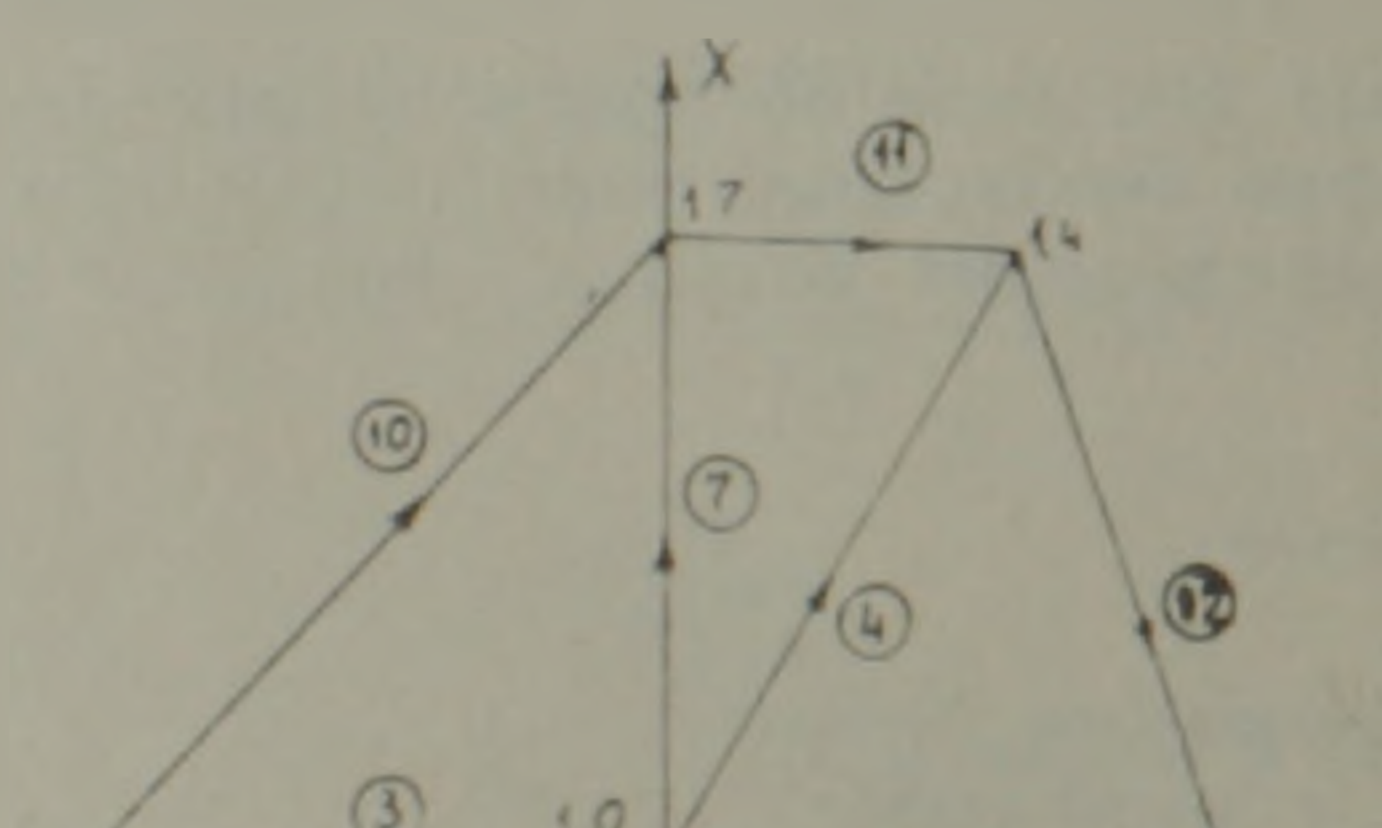

Рис. 1. Сеть трилатерации на исходном монтажном горизонте

Для удобства матричного расчета принимается условная нумерация пунктов. На схеме (рис. 1) показаны направления измерения сторон. Приняв за ошибку единицы веса с. к. о. (стандарт) измерения стороны $\sigma = 0{,}5$ *мм*, уравниваем свободную сеть трилатерации. Для устранения дефекта ранга $d=3$ неизвестные подчиняются условию

$$C^T\Delta x = 0 \tag{1}$$

Матрица $C^{d\times 3}$ имеет линейно-независимые столбцы. Получаемую g-образную матрицу R^g коэффициентов вычисляем по способу временной фиксации d неизвестных с весами $P_ф$ [1]. Тогда, выполнив уравнивание с учетом ошибок исходных данных по рекуррентной формуле, учитывая условие (1), рассматриваем их как уравнения поправок с весами $1/p=0$, и после этого удаляем фиксацию неизвестных с обратными весами $-1/P_ф$. Так, для нашей сети трилатерации на исходном монтажном горизонте матрицу $Q_ф=R_ф^{-1}$ будем вычислять по рекуррентной формуле.

$$Q_i = Q_{i-1} - \frac{1}{q} Z_i^T Z_i \quad (i=1,\ 2 \ldots,\ n) \tag{2}$$

$$q_i = 1/P_i + a_i Z_i^T,$$

где вектор $Z_i^T = Q_{i-1}\cdot a_i^T$; a_i — строка матрицы A.

„Измерив" координаты x_0, y_0 и y_7 с весами $P_ф=1$, составим диагональную исходную матрицу

$$Q_0 = \begin{pmatrix} \underset{d\times d}{P_ф^{-1}} & 0 \\ 0 & 10^5 E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{3\times 3}{E} & 0 \\ 0 & 10^5 E^{13\times 13} \end{pmatrix}$$

и после учета всех строк матрицы A с весами $P_{ii}=1$ и затем строк матрицы

$$C^T = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

с весами $1/P_i=0$, получаемую также по рекуррентной формуле, полагая, что $a_i=C_i^T$ $(i=1,\ 2 \ldots,\ d)$, находим матрицу

0 0 0 |
0 0 0 | $\underset{3\times 7}{O}$
0 0 0 |

$\underset{13\times 3}{O}$	1.094	0.604	−0.100	0.173	−0.110	0.062	0.210	−0.079	0.504
		3.750	−1.522	2.521	−1.879	0.779	0.725	−0.197	1.806 →
			1.828	1.159	1.629	−0.638	−0.248	0.016	−0.660
				2.505	−1.655	0.668	0.452	−0.097	1.149
					2.562	−0.630	−0.264	−0.053	−0.770
						0.915	0.173	−0.087	0.394
							1.157	−0.096	1.056
								0.888	−0.389
									2.318

$\underset{3\times 4}{Q}$

0.185	0.385	0.759	0.022
0.701	1.406	2.807	−0.245
−0.282	−0.532	−1.087	0.296
0.457	0.902	1.813	−0.257
0.358	−0.637	−1.331	0.604
→ 0.134	0.294	0.569	0.106
0.106	0.556	0.692	0.10
0.023	−0.193	−0.212	−0.247
0.417	1.348	1.702	0.166
1.008	0.503	0.649	0.079
	1.526	1.105	0.015
		3.030	0.134
			0.872

(4)

Удаление „измерений" координат с весами $P_ф=-1$ приводит к искомой матрице R^g, совпадающей с (4). Как видно, если матрица C фиксирует d неизвестных, то процесс удаления „измеренных" неизвестных не нужен.

Матрица R^g при данной C соответствует уравниванию нуль-свободной сети с безошибочными координатами x_0, y_0 и y_7.

При вычислении псевдообратной матрицы R^+, матрица $C=B$, где B—так называемая матрица конформного преобразования Гельмерта, которая состоит из полос B_i

$$B_i=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{k} & 0 & \bar{\eta}_i \\ 0 & 1/\sqrt{k} & -\bar{\xi}_i \end{pmatrix} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ k), \tag{5}$$

где k—число пунктов; $\bar{\eta}_i$ и $\bar{\xi}_i$—нормированные по столбцам центральные координаты пунктов, вычисленные по приближенным координатам.

В нашем примере матрица B имеет вид

$$B^T=\left(\begin{array}{ccccccccc} 0.354 & 0 & 0 & 0.354 & 0 & 0.354 & 0 & 0.354 & 0 \\ 0 & 0.354 & 0.354 & & 0.354 & & 0.354 & & 0.354 \\ -0.035 & -0.048 & -0.461 & 0.037 & 0.358 & -0.208 & -0.256 & -0.365 & -0.032 \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{cccccccc} 0 & 0.354 & 0 & 0.354 & 0 & 0.354 & 0 & 0.354 \\ 0.354 & 0 & 0.354 & 0 & 0.354 & 0 & 0.354 & 0 \\ -0.032 & 0.205 & 0.352 & 0.349 & -0.013 & 0.192 & 0.291 & 0.035 \end{array}\right)$$

При $C^T=B^T$, выполнив те же действия, получим псевдообратную матрицу

$$R^+=\left|\begin{array}{ccccccccc} 0.036 & -0.006 & -0.003 & -0.041 & 0.019 & -0.098 & 0.062 & -0.139 & 0.024 \\ & 0.053 & 0.094 & 0.082 & 0.402 & 0.195 & 0.292 & 0.267 & 0.068 \\ & & 0.227 & -0.174 & 0.862 & 0.489 & -0.610 & 0.664 & -0.112 \\ & & & 0.993 & 0.727 & -0.361 & 0.283 & -0.462 & 0.023 \\ & & & & 3.790 & -1.716 & 2.419 & -2.303 & 0.356 \\ & & & & & 1.855 & -1.186 & 1.750 & -0.467 \\ & & & & & & 2.358 & -1.887 & 0.333 \\ & & & & & & & 2.831 & -0.416 \\ & & & & & & & & 0.732 \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{ccccccc} -0.064 & 0.043 & -0.101 & -0.006 & -0.055 & -0.027 & -0.056 \\ -0.110 & 0.077 & -0.253 & -0.066 & -0.189 & -0.328 & 0.021 \\ -0.337 & 0.339 & -0.699 & -0.072 & -0.475 & -0.699 & 0.037 \\ 0.160 & -0.222 & 0.490 & 0.116 & 0.348 & 0.799 & -0.992 \\ 1.117 & -1.141 & 2.436 & 0.260 & 1.746 & 2.778 & -0.144 \\ -0.684 & 0.553 & -1.314 & -0.126 & -0.963 & -1.266 & 0.077 \\ 0.755 & -0.772 & 1.582 & 0.105 & 1.146 & 1.680 & -0.131 \\ -0.880 & 0.701 & -1.721 & -0.161 & -1.271 & -1.682 & 0.330 \\ 0.151 & -0.207 & 0.270 & -0.044 & 0.190 & 0.205 & 0.170 \\ 1.227 & -0.457 & 1.296 & -0.061 & 0.676 & 0.957 & -0.031 \\ & 1.320 & -1.124 & -0.080 & -0.663 & -0.988 & -0.186 \\ & & 2.885 & 0.250 & 1.654 & 2.142 & -0.084 \\ & & & 0.787 & 0.358 & 0.266 & -0.050 \\ & & & & 1.682 & 1.306 & -0.130 \\ & & & & & 2.957 & -0.090 \\ & & & & & & 0.716 \end{array}\right|$$

Таким образом, весь вычислительный процесс может быть выполнен по одной и той же рекуррентной формуле. Фиксация неизвестных позволяет все измерения разделить на необходимые и избыточные, значительно снижая этим трудоемкость вычислений, и выполнить отбраковку грубых ошибок.

При учете по формуле (2) избыточного измерения отбраковка грубых ошибок выполняется вычислением допустимого свободного члена этого уравнения [2], например, по формуле

$$(l_i)_{доп} = t\sigma_0 \sqrt{q_i}, \tag{6}$$

где q_i — знаменатель второго слагаемого в рекуррентной формуле.

С исходного монтажного горизонта на второй монтажный горизонт проектируются точки 1, 2, 3, 4, 5 (рис. 2). На втором монтаж-

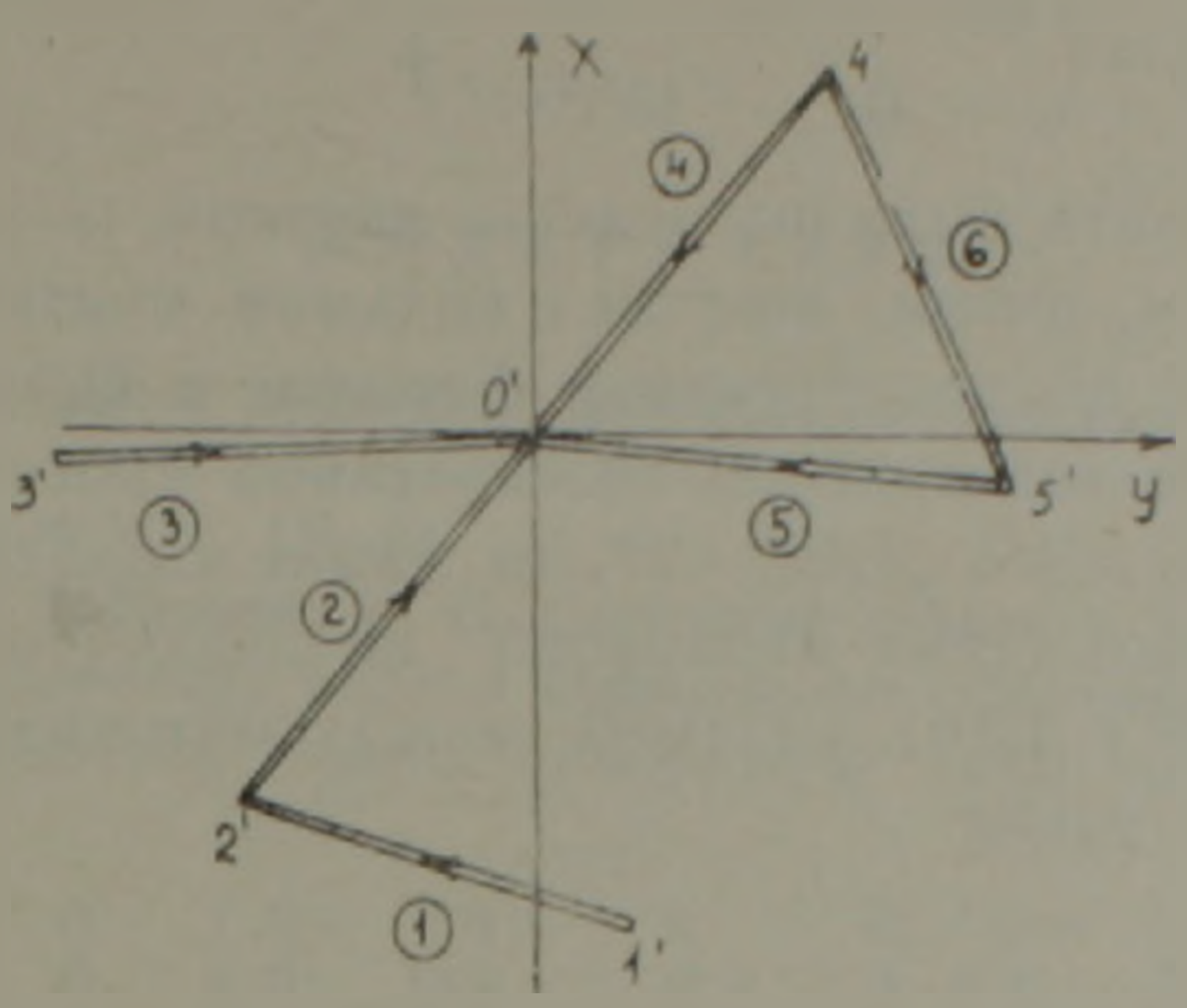

Рис. 2. Сеть трилатерации на первом монтажном горизонте.

ном горизонте трилатерационные измерения выполняются с той же точностью, что и на исходном монтажном горизонте. Как показано в [2], проекции 1′, 2′, 3′, 4′, 5′ можно считать исходными данными с известной корреляционной матрицей $Q_{н.д}$ выбирается из матрицы $R^к$ для пунктов 1′, 2′, 3′, 4′, 5′ и равна

$Q_{н.д} =$

x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4	x_5	y_5
1.094	0.604	−0.098	0.174	−0.110	0.062	0.210	−0.079	0.504	0.185
	3.750	−1.522	2.521	−1.879	0.779	0.725	−0.197	1.806	−0.701
		1.828	−1.160	1.628	−0.638	−0.248	0.016	−0.664	−0.282
			2.505	−1.655	0.668	0.453	−0.098	1.149	0.458
				2.562	−0.630	−0.264	−0.053	−0.770	−0.358
					0.915	0.173	−0.087	0.394	0.134
						1.157	−0.096	1.056	−0.110
							0.888	−0.388	0.022
								2.318	0.417
									1.008

Матрицу Q на втором монтажном горизонте, как доказано в [2], целесообразно вычислять по рекуррентной формуле (2), где a_i — строка матрицы коэффициентов уравнений поправок, соответствующая i-му измерению. В качестве начальной матрицы Q_0 можно принять диагональную матрицу

$$Q_0=\begin{pmatrix} Q_{\text{н.в.}} & 0 \\ 0 & 10^5 E^{2\times2} \end{pmatrix},$$

причем верхний ненулевой блок относится к пунктам $1'$—$5'$ и имеет размер 10×10, а нижний размера 2×2—к пункту $0'$. Если необходимо получить матрицу Q на втором, третьем, четвертом и т. д. монтажных горизонтах, не изменяя схемы измерений, то Q_0 следует принять равной

$$Q_0=\begin{pmatrix} Q_{j-1}+Q_n & 0 \\ 0 & 10^5 E^{2\times2} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Для нашего варианта были вычислены матрицы Q на первом, втором, третьем, четвертом, пятом, шестом и седьмом монтажных горизонтах. Все Q_j вычислены по рекуррентной формуле с Q_0 равной (7).

Результаты вычислений по составленной программе, реализующей алгоритм для ЭВМ „ДВК-2", на языке $BEISIK$, показали, что при одной и той же схеме измерений на различных монтажных горизонтах (начиная с 1-го), разность между матрицами Q_j и Q_{j-1} при $j\geqslant3$ постоянна и равна

$$\Delta Q=\begin{vmatrix}
3.8 & 0.6 & 0.3 & -0.5 & 0 & 0 & -0.1 & -0.1 & 0 & 0 & -0.2 & 0 \\
 & 2.2 & -0.9 & 1.6 & 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0.4 & 0 \\
 & & 2.2 & -0.3 & 0 & 0 & 1.0 & 1.3 & 0.4 & -0.2 & 2.1 & 0 \\
 & & & 1.7 & 0 & 0 & 0.6 & 0.7 & 0.2 & -0.1 & 1.1 & 0 \\
 & & & & 4.0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 1.7 & -0.3 & -0.4 & -0.3 & 1.8 & -2.3 & 1.7 \\
 & & & & & & 1.6 & -0.1 & 1.5 & -0.4 & 1.9 & -0.3 \\
 & & & & & & & 2.5 & -1.1 & 0.1 & 1.6 & 0.3 \\
 & & & & & & & & 2.1 & 1.5 & 0.3 & 0.3 \\
 & & & & & & & & & 2.2 & -1.8 & 2.0 \\
 & & & & & & & & & & 4.2 & -1.5 \\
 & & & & & & & & & & & 1.8
\end{vmatrix} \tag{8}$$

Таким образом, для любого монтажного горизонта при одной и той же схеме измерений при $j\geqslant3$ справедлива формула

$$Q_j=Q_2+(j-2)\cdot\Delta Q \tag{9}$$

Формула (9) имеет большое практическое применение при уравнивании пространственной сети ответственных сооружений, где необходимо проектировать на высшие монтажные горизонты пункты с исходного монтажного горизонта.

В статье Африкян А. Г. „К вопросу об уравнивании пространственной сети" описан пример уравнивания нашей свободной сети (рис. 1) как жесткой, с фиксированными координатами x_0, y_0, y_1. Получаемая при жестком уравнивании матрица обратных весов координат Q совпадает с матрицей R_{22}^{-1} в матрице R^g при уравнивании свободной сети.

Кроме того, получаемая при уравнивании свободной сети матрица R^+ играет большую роль при анализе деформаций инженерных сооружений; так, имея R^+, а затем, применяя соответствующие статистические критерии, выявляют стабильные пункты.

При проектировании на высшие монтажные горизонты при уравнивании несвободной сети получаются разности ΔQ такие же, как и при уравнивании свободной сети. Из этого следует, что приведенная без доказательств в [2] формула (9) справедлива как для свободной, так и для несвободной сети. В обоих случаях вычислены Q на седьмом монтажном горизонте и результат ΔQ (8) постоянен.

Следовательно, независимо от того, какая сеть свободная или несвободная, при одной и той же схеме измерений при проектировании на высшие монтажные горизонты пунктов с исходного монтажного горизонта справедлива вышедоказанная формула (9).

Ереванский политехнический институт

Поступила 16.I.1990

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маркузе Ю. И.* Способ временной фиксации неизвестных при уравнивании геодезических со свободными блоками.—Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1986, № 4, с. 13—24.
2. *Маркузе Ю. И., Рабинович И. Е.* Системный подход к проектированию и уравниванию геодезических сетей в строительстве. Системные исследования в геодезии. Межвузовский сборник. Новосибирск: НИИГАиК, 1984, с. 52—60.