Известия АН АрмССР, Науки о Земле, XLII, 1969, № 6, 59—63
УДК 550.344.094:517

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

М. В. ЗАКРАДЗЕ, М. Х. МКОЯН

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ СЕЙСМОЛОГИИ МЕТОДОМ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Метод фундаментальных решений приобретает особое изящество и простоту, если фундаментальные решения построены в явном виде (в элементарных функциях) [1, 3, 5]. Другим обстоятельством, подчеркивающим значение явных выражений фундаментальных решений, является их применение для получения численных решений. Кроме того, при решении частных задач, фундаментальным решениям можно дать определенный физический смысл, что дает возможность из физических соображений конструировать искомое решение.

Рассмотрим однородное изотропное упругое тело, которое в эвклидовом пространстве E_3 занимает выпуклую область G, ограниченную кусочно-гладкой поверхностью S $(S=\bigcup_{k=1}^{n} S_k \in \Lambda_1(0))$. Предположим, что поверхность S свободна и в некоторой точке $x_0(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \in G$ (в „сейсмическом очаге"), начиная с момента времени t_0 действует известная простая сосредоточенная сила $\Phi(x_0, t)=\Phi(x_0)f(t)$, где функция $f(t)$ (закон изменения силы во времени) и вектор $\Phi(x_0)=(c_1, c_2, c_3)$ заданы. Кроме этого будем считать, что величина деформации, вызванная действием силы $\Phi(x_0, t)$, находится в рамках теории бесконечно малых деформаций.

В этих условиях рассмотрим следующую задачу: определить в заданном интервале времени (a, b) характер движения упругого тела $\overline{G}$, вызванного действием сосредоточенной силы $\Phi(x_0, t)$.

Известно [3], что в указанных условиях характер движения тела $\overline{G}$ определяется решением прямой задачи динамики теории упругости для области G:

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}, t\right)U(x, t)+\Phi(x_0)f(t)\delta(x-x_0)=\Theta, \quad x\in G, \ t\in[0, \infty), \tag{1}$$

$$T\left(\frac{\partial}{\partial y}, n\right)U(y, t)=\Theta, \quad y\in S, \ t\in[a, b], \tag{2}$$

$$U(x, t)_{t=t_0}=\Theta, \quad \left.\frac{\partial U(x, t)}{\partial t}\right|_{t=t_0}=\Theta, \quad x\in\overline{G}, \tag{3}$$

где $A\left(\frac{\partial}{\partial x}, t\right)$ и $T\left(\frac{\partial}{\partial y}, n\right)$ матричные дифференциальные операторы:

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}, t\right)=\left\| A_{kj}\left(\frac{\partial}{\partial x}, t\right)\right\|_{3\times 3} \quad (k, j=1, 2, 3),$$

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}, t\right)=\delta_{kj}\left[\mu\Delta\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^j},$$

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x}, t\right)=\left\|T_{kj}\left(\frac{\partial}{\partial x}, n\right)\right\|_{3\times 3},$$

$$T_{kj}\left(\frac{\partial}{\partial x}, n\right)=\lambda n_k \frac{\partial}{\partial x^j}+\mu n_j \frac{\partial}{\partial x^k}+\mu\delta_{kj}\frac{\partial}{\partial n} \quad (k, j=1, 2, 3),$$

$U(x, t)$—вектор смещения точки $x(x^1, x^2, x^3)$ в момент времени t; $\delta(x-x_0)$—функция Дирака; Θ—нулевой вектор; $a=t_0+\frac{R}{v_p}$, где $R=\min\limits_{y\in s}|y-x_0|$, а v_p=скорость распространения продольной волны в среде G; $n(x)=(n_1, n_2, n_3)$—произвольный единичный вектор нормали, приложенный в точке x. Если учесть [1, 3], что j-й столбик (строка) $\Psi^j(x, x_0, t)=(\Psi_{1j}, \Psi_{2j}, \Psi_{3j})$. $(j=1, 2, 3)$ матрицы фундаментальных решений (для функции $f(t)$) оператора $A\left(\frac{\partial}{\partial x}, t\right)$ удовлетворяет уравнению.

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}, t\right)\Psi^j(x, x_0, t)+(\delta_{j1}\delta_{j2}\delta_{j3})f(t)\delta(x-x_0)=\Theta, \quad x\in E_3$$

(δ_{jk}—символ Кронекера). ($\Psi^j(x, x_0, t)$ имеет определенный физический смысл- оно является вектором смещения точки $x\in E_3$, в момент времени t, вызванное в упругой среде E_3, сосредоточенной единичной силой $(\delta_{1j}, \delta_{2j}, \delta_{3j})f(t)$, приложенной в точке $x\in E_3$) и начальным условием (3), то решение задачи (1), (2), (3) можно искать в виде:

$$u(x, t)=\sum_{j=1}^{3} c_j\Psi^j(x, x_0, t)+V(x, t),$$

где $V(x, t)$ есть решение следующей граничной задачи:

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}, t\right)V(x, t)=\Theta, \quad x\in G, \quad t\in[0, \infty), \tag{4}$$

$$T\left(\frac{\partial}{\partial y}, n\right)V(y, t)=g(y, t), \quad y\in s, \quad t\in[a, b], \tag{5}$$

$$U(x, t)|_{t=t_0}=\Theta, \quad \left.\frac{\partial V(x, t)}{\partial t}\right|_{t=t_0}=\Theta, \quad x\in\bar{G}, \tag{6}$$

$$g(y, t)=-T\left(\frac{\partial}{\partial y}, n\right)\sum_{j=1}^{3} c_j\Psi^j(y, x_0, t)=-\sum_{j=1}^{3} c_j\Psi^j(y, x_0, n, t).$$

Следует отметить, что для задачи (4), (5), (6) выполняются условия корректности [3], в частности, в силу (6) имеют место условия согласования.

Если приближенное решение задачи (4), (5), (6) искать методом фундаментальных решений [1], то условия (4) и (6) будут выполняться автоматически и остается с помощью этого метода на множестве $S\times[a, b]$ аппроксимировать граничную функцию $g(y, t)$.

В работе [4] приведен общий процесс аппроксимации граничной функции $g(y, t)$. Сущность этого процесса заключается в том, что граничная функция $g(y, t)$ аппроксимируется последовательно в дискретных моментах времени $t_l(l=1, 2, \ldots, m)$, $(a=t_1<t_2<\ldots<t_m=b)$, с помощью систем функций:

$$\left\{T\left(\frac{\partial}{\partial y}, n\right)\Psi^i(y, z_{lk}, t-t_{lk})\right\}_{k=1}^{n_l}=\{\Psi^i(y, z_{lk}, n, t-t_{lk})\}_{k=1}^{n_l}, \quad (i=1, 2, 3),$$

где $y \in S$; $\{z_{lk}\}$—точки вспомогательной поверхности S_l ($S_l \cap S = \varnothing$) [1, 4], где приложены „фиктивные" источники сил в моментах времени $\{t_{lk}\}$: $t_{lk} = t_l - \frac{r_{lk}}{v_p}$, где $r_{lk} = \min_{y \in S} |z_{lk} - y|$; n_l—количество вспомогательных источников на S_l.

Получено приближенное решение задачи (1), (2), (3) в виде:

$$U(x, t) = \sum_{j=1}^{3} c_j \Psi^j(x, x_0, t) + \sum_{l=1}^{m} \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{n_l} a^l_{ik} \Psi^i(x, z_{lk}, t - t_{lk}),$$

$$x \in \bar{G}, \quad t \in (t_0, b].$$

Коэффициенты $\{a^l_{ik}\}$ можно найти в процессе аппроксимации методом коллокации или методом наименьших квадратов (a^l_{ik}, $i=1, 2, 3$—величины составляющих фиктивной силы $p_{lk}(z_{lk}, t) = (a^l_{1k}, a^l_{2k}, a^l_{3k}) f(t)$, которая действует в точке z_{lk}, начиная с момента времени t_{lk}). Здесь же надо отметить, что при нахождении коэффициентов $\{a^l_{ik}\}$, для момента t_l с помощью метода коллокации приходится решать систему алгебраических уравнений порядка $3n_l$, следующего вида:

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{n_l} a^l_{ik} \Psi_{ri}(y_j, z_{lk}, n, t_l - t_{lk}) = g^l_r(y_j, t_l), \quad r = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, \ldots, n_l), \tag{7}$$

где $y_j \in S$ точки коллокации, а выражение функции g^l_r определяется в ходе аппроксимации. Поэтому при реализации этого алгоритма на ЭВМ (когда n_l увеличивается) мы встретились с вычислительными „трудностями".

Физический смысл вектор-функции $\Psi^i(x, z, t)$, $i=1, 2, 3$ и выбор вспомогательных точек z_{lk} дает возможность избежать эти трудности и найти коэффициенты a^l_{ik} отдельно для каждой точки z_{lk}. Действительно, если расположим вспомогательные точки $\{z_{lk}\}_{k=1}^{n_l}$ на нормали поверхности S, проходящей через точки коллокации y_k, то расстояние $|y_j - z_{lk}|$ будет равно r_{lk} при $k=j$ и больше r_{lk} при $k \neq j$, поэтому $\Psi_{ri}(y_j, z_{lk}, n, t - t_{lk}) = 0$ при $k = j$ (следует из определения Ψ^i)

Следовательно, из (7) для фиксированного k и l получим систему алгебраических уравнений третьего порядка:

$$\sum_{i=1}^{3} a^l_{ik} \Psi_{ri}(y_k, z_{lk}, n, t_l - t_{lk}) = g^l_r(y_k, t_l), \tag{8}$$

$$(r = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \ldots, n_l, \quad l = 1, 2, \ldots, m).$$

Для численной реализации решения задачи (1), (2), (3) с помощью приведенного способа нахождения коэффициентов $\{a^l_{ik}\}$ проводился ряд численных экспериментов. В численных экспериментах за тело G и поверхность S соответственно были взяты шар и его поверхность радиусом $R = 6400$ *км* с центром в начале координат, в роли сейсмического очага была принята точка $x_0 = (0, 0, 6390$ *км*$)$. Параметры Ламе—λ, μ и плотность среды соответственно были равны: $\lambda = 29 \cdot 10^9$ *н/м*^{2}, $\mu = 34 \cdot 10^9$ *н/м*^{2}, $\rho = 2.72$ *г/см*^{3}.

В роли $\Phi(x_0)$ и $f(t)$ были взяты:

$$\Phi(x_0)=(1,\ 0,\ 0),\ f(t)=\begin{cases}\dfrac{\alpha^2 h}{\alpha^2+(t-\beta)^2} & \text{при} \quad t>t_0,\\ 0 & \text{при} \quad t<t_0,\end{cases} \tag{9}$$

где $\beta\geqslant 0$, $h>0$, $\alpha>0$ – действительные числа.

Закон действия силы (9) интересен тем, что на практике часто встречаются поля перемещений (сейсмические данные), которые соответствуют сосредоточенной силе, действующей во времени по закону (9)

Отметим, что неотрицательная функция $f(t)$ имеет максимум („пик") при $t=\beta(\max f(t)=h)$ и остроту „пика" можно регулировать с помощью α.

Компоненты матрицы $\Psi(x,\ z,\ t)=(\Psi^1,\ \Psi^2,\ \Psi^3)=\|\Psi_{kj}\|_{3\times 3}$, фундаментальных решений оператора $A\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\ t\right)$, для силовой функции (9) построены (в элементарных функциях) в следующем виде:

$$\Psi_{kj}(x,\ z,\ t)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad t\leqslant\dfrac{r}{v_p}\\ A_{kj}(x,z,t) & \text{при} \quad \dfrac{r}{v_p}<t\leqslant\dfrac{r}{v_s},\\ B_{kj}(x,z,t) & \text{при} \quad t>\dfrac{r}{v_s},\end{cases} \tag{10}$$

где $v_p^2=\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}$, $v_s^2=\dfrac{\mu}{\rho}$, $r=\left|\sum\limits_{k=1}^{3}(x^k-z^k)\right|$ – расстояние между точками x и z,

$$A_{kj}(x,\ z,\ t)=\frac{\alpha^2 h}{4\pi\rho}\left\{\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(\alpha^2+\beta^2)v_p^2}{(\alpha v_p)^2+(tv_p-r-\beta v_p)^2}+\right.\right.$$

$$+\frac{t-\beta}{\alpha}\left(\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}+\operatorname{arctg}\frac{tv_p-r-\beta v_p}{\alpha v_p}\right)\right]\cdot\left[\frac{3(x^j-z^j)(x^k-z^k)}{r^5}-\frac{\delta_{kj}}{r^3}\right]+$$

$$\left.+\frac{(x^j-z^j)(x^k-z^k)}{r^3}\cdot\frac{1}{(\alpha v_p)^2+(tv_p-r-\beta v_p)^2}\right\},$$

$$B_{kj}(x,\ z,\ t)=\frac{\alpha^2 h}{4\pi\rho}\left\{\frac{\delta_{kj}}{r}\cdot\frac{1}{(\alpha v_s)^2+(tv_s-r-\beta v_s)^2}+\right.$$

$$+\left[\frac{3(x^j-z^j)(x^k-z^k)}{r^5}-\frac{\delta_{kj}}{r^3}\right]\cdot\left[\frac{1}{2}\ln\frac{v_p^2((\alpha v_s)^2+(tv_s-r-\beta v_s)^2)}{v_s^2((\alpha v_p)^2+(tv_p-r-\beta v_p)^2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{t-\beta}{\alpha}\left(\operatorname{arctg}\frac{tv_p-r-\beta v_p}{\alpha v_p}-\operatorname{arctg}\frac{tv_s-r-\beta v_s}{\alpha v_s}\right)\right]+\frac{(x^j-z^j)(x^k-z^k)}{r^3}\times$$

$$\left.\times\left[\frac{1}{(\alpha v_p)^2+(tv_p-r-\beta v_p)^2}-\frac{1}{(\alpha v_s)^2+(tv_s-r-\beta v_s)^2}\right]\right\}.$$

Соответственное выражение (в элементарных функциях) для напряжения получается с помощью формулы Коши-Бине:

$$\Psi_{kj}(x,\ z,\ n,\ t)=\sum_{l=1}^{3}T_{kl}\left(\frac{\partial}{\partial x},\ n\right)\Psi_{lj}(x,\ z,\ t). \tag{11}$$

Свойства функций (10) и (11) изучены в работе [5].

Проведенные численные эксперименты показали, что точность аппроксимации граничной функции (5) (точность решения задачи (1), (2), (3)) зависит: 1) от количества и расположения точек коллокации на поверхности S; 2) от количества и выбора дискретных моментов времени на интервале $[a, b]$.

Таблица 1

Таблица аппроксимации граничной функции

		$\bar{g}_1$	g_1	$\bar{g}_2$	g_2	$\bar{g}_3$	g_3
	y^1	−142,5514	−142,5514	0	0	0	0
$t^*_1=1,658403$	y^2	−141,5952	−141,5954	0,5549938	0,5549947	40,65319	40,65309
	y^3	0	0	0	0	0	0
	y^1	−147,1061	−147,1063	0	0	0	0
$t^*_3=1,659542$	y^2	−146,1065	−146,1067	0,5762093	0,5762202	42,23503	42,23507
	y^3	−140,7529	−140,7528	2,380855	2,380846	139,7760	139,7764
	y^1	−151,2278	−151,2282	0	0	0,00027	0
$t^*_3=1,660034$	y^2	−150,1962	−150,1967	0,5956822	0,5955726	43,68618	43,38620
	y^3	−144,6681	−144,6682	2,460748	2,460848	144,5555	144,5555
	y^1	−156,7342	−156,7361	0	0	−0,00049	0
$t^*_4=1,66251$	y^2	−155,6516	−155,6529	0,6218766	0,6210447	45,61742	45,64812
	y^3	−149,8801	−149,8803	2,568811	2,568840	151,0135	151,0143
	y^1	−163,7861	−163,786	0	0	0	0
$t^*_5=1,664861$	y^2	−162,6449	−162,6466	0,6563141	0,6561398	48,20595	48,20596
	y^3	−156,5589	−156,5587	2,709385	2,7009360	159,4287	159,4290

Использование метода наименьших квадратов на интервале (t_l, t_{l+1}) для нахождения коэффициентов $\{a^l_{ik}\}$ с помощью систем (8) улучшает степень аппроксимации.

В таблице 1 (для иллюстрации) даны результаты аппроксимации граничной функции (5) (в близкой зоне эпицентра). В этом эксперименте параметры t_0, β, α, h соответственно были равны: $t_0=0$; $\beta=0{,}2$; $\alpha=0{,}01$; $h=10$. Дискретные моменты $\{t_l\}^6_{l=1}-t_1=1{,}658303$; $t_2=1{,}658634$ $t_3=1{,}659629$; $t_4=1{,}661284$; $t_5=1{,}663601$; $t_6=1{,}666574$. $t^*_l\in(t_l, t_{l+1})$— произвольно выбранные моменты времени. $y_1=(0;\ 0;\ 6400)$—точка коллокации, $y_2=(0{,}1;\ 0{,}173205;\ 6400)$ и $y_3=(0{,}166;\ 0{,}364;\ 6400)$—произвольные точки поверхности S, не совпадающие с точками коллокации.

Для простоты в таблицу введены следующие обозначения:

$$g=(g_1, g_2, g_3)=-T\left(\frac{\partial}{\partial y}, n\right)\Psi^1(y, x_0, t)\cdot 10^{15}\ н/м^2.$$

$$\bar{g}=(\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3)=T\left(\frac{\partial}{\partial y}, n\right)V(y, t)\cdot 10^{15}\ н/м^2.$$

Вычислительный центр
АН Грузинской ССР.
Институт геофизики и
инженерной сейсмологии АН АрмССР

Поступила 19.VIII.1988.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексидзе М. А.* Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям М.: Наука, 1978. 351 с.
2. *Закрадзе М. В.* Об одной матрице фундаментальных решений уравнения динамики теории упругости.—Труды ИВМ АН ГССР, 1986, т. XXVI, с. 55—64.
3. *Купрадзе В. Д., Гегелия Т. Г., Башелейшвили М. О., Бургуладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости—М.: Мир, 1975, 872 с.
4. *Мкоян М. Х.* О приближенном решении прямых задач динамики сейсмических волн.—Изв. АН АрмССР, Науки о Земле, 1987, № 4, с. 70—72.
5. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Наука, 1976, 872 с.