М. Х. МКОЯН

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ПРЯМЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН

В настоящее время перед сейсмологией ставится задача количественной оценки характеристик сил, действующих в сейсмическом очаге по данным наблюдений. Отметим, что решение подобной задачи было реализовано для установившихся упругих колебаний в однородной изотропной среде [2, 3].

Алгоритм решения таких обратных задач существенно использует решение прямых задач сейсмологии—определение характера движения упругого тела по известным характеристикам сосредоточенной силы, действующей в очаге [1, 2]. Поэтому в первую очередь необходимо решать прямые задачи динамики сейсмических волн.

Рассмотрим однородное изотропное упругое тело, которое в евклидовом пространстве E_3 занимает выпуклую область G , ограниченную кусочно-гладкой поверхностью S . Пусть в некоторой точке $x_0(x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ (в „сейсмическом очаге“) области G , начиная с момента времени t_0 действует известная простая сосредоточенная сила $\Phi(x_0, t) = \Phi(x_0)/f(t)$, где $\Phi(x_0) = (c_1, c_2, c_3)$, $f(t)$ —закон изменения во времени. Будем считать, что поверхность свободна, то есть вектор напряжения на поверхности равен нулю в любой момент времени.

В этих условиях рассмотрим следующую прямую задачу: найти в заданном интервале времени $[t_1, \tau]$ смещение $u(x, t)$ в точках поверхности S , вызванное силой $\Phi(x_0, t)$, где t_1 момент времени, до которого смещение на поверхности равно нулю. Ясно, что t_1 выражается формулой: $t_1 = t_0 + R/v_p$, где $R = \min_{y \in S} |x_0 - y|$, v_p —скорость распространения продольной волны в среде G . В дальнейшем, для простоты возьмем $t_0 = 0$.

Запишем силу в виде:

$$\Phi(x_0, t) = \sum_{j=1}^3 c_j E^j(x_0, t), \quad (1)$$

где $E^j(x_0, t) = (\delta_{1j}, \delta_{2j}, \delta_{3j}) \cdot f(t)$, ($j=1, 2, 3$); δ_{ij} —символ Кронекера.

В силу равенства (1) смещение $u(x, t)$, $x \in G$ представляется с помощью следующей суммы:

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^3 c_j W^j(x, t), \quad (2)$$

где $W^j(x, t)$ есть смещение, вызванное сосредоточенной силой $E^j(x_0, t)$.

Таким образом для нахождения смещения на поверхности S , следует решать следующие граничные задачи [2, 3]:

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}, t\right)W^j(x, t) + E^j(x_0, t)\delta(x-x_0) = 0, \quad x \in G \quad (3)$$

$$T\left(\frac{\partial}{\partial y}, n\right)W^j(y, t) = 0, \quad y \in S, \quad t \in [t_1, \tau], \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} W^j(x, t)|_{t=0} &= 0, \\ \frac{\partial W^j(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= 0, \quad x \in \bar{G} \quad (j=1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где $A\left(\frac{\partial}{\partial x}, t\right)$ и $T\left(\frac{\partial}{\partial y}, n\right)$ —матричные дифференциальные операторы [3]; t —время;

0 —нуль вектор; $\delta(x-x_0)$ —дельта-функция Дирака.

Решение задачи (3), (4), (5) будем искать в виде:

$$W^j(x, t) = \Psi^j(x, x_0, t) + V_j(x, t) \quad (j=1, 2, 3), \quad (6)$$

где $\Psi^j(x, x_0, t)$ — j -й столбец матрицы фундаментальных решений оператора $A(\partial/\partial x, t)$ для силовой функции $f(t)$, а $V_j(x, t)$ есть решение следующей граничной задачи:

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}, t\right)V_j(x, t) = 0, \quad x \in \bar{G}, \quad (7)$$

$$T\left(\frac{\partial}{\partial y}, n\right)V_j(y, t) = g_1^j(y, t), \quad y \in S, \quad t \in [t_1, \tau], \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} V_j(x, t)|_{t=0} &= 0 \\ \frac{\partial V_j(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= 0, \quad x \in \bar{G}, \quad (j = 1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\text{где } g_1^j(y, t) = -T\left(\frac{\partial}{\partial y}, n\right)\Psi^j(y, x_0, t), \quad (10)$$

Ясно, что для такой функции $V_j(x, t)$, функция $W^j(x, t)$, заданная посредством (6), будет решением задачи (3), (4), (5).

Отметим, что для задачи (7), (8), (9) выполняются условия корректности и согласования [3].

Для приближенного решения задачи (7), (8), (9) воспользуемся методом фундаментальных решений [1, 3], тогда условия (7), (9) выполняются автоматически и остается аппроксимировать на множестве $Sx[t_1, \tau]$ граничные функции $g_1^j(y, t)$, ($j = 1, 2, 3$). Разделим интервал $[t_1, \tau]$ на $m-1$ равные части с помощью точек $t_n = t_1 + (n-1)\Delta t$, ($n = \overline{1, m}$), где $\Delta t = \frac{\tau - t_1}{m-1}$.

Рассмотрим в области E_3/G поверхность S^* , целиком охватывающую S , подобную ей и расположенную от неё на расстоянии R . Пусть S_n^* ($n = \overline{1, m}$) тот участок поверхности S^* , который лежит над участком поверхности S , куда достигла волна, вышедшая из точки в момент времени $t = t_n$ ($n = \overline{1, m}$).

Граничные функции (8) аппроксимируем по методу фундаментальных решений, используя систему функций

$$\left\{ T\left(\frac{\partial}{\partial y}, n\right)\Psi^l(y, z_k, t) \right\}_{k=1}^{\infty} \equiv \{ \Psi^l(y, z_k, n, t) \}_{k=1}^{\infty} \quad (l = 1, 2, 3),$$

где $y \in S$, а точки $\{z_k\}$ расположены всюду плотно на вспомогательной поверхности S^* .

Приближенное решение задачи (7), (8), (9) построим последовательно следующим образом.

В момент времени $t = t_1$ граничную функцию (10) (j — фиксирована) можно аппроксимировать суммой:

$$\sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^{n_1} a_{ik}^{lj} \Psi^l(y, z_k, n, t_1),$$

где точки $\{z_k\}_{k=1}^{n_1}$ расположены равномерно на участке S_1^* . Коэффициенты a_{ik}^{lj} можно найти методом коллокации или методом наименьших квадратов [1].

Таким образом, если Δt достаточно мала, то в интервале $[t_1, t_2]$ за приближенное решение задачи (7), (8), (9) с определенной точностью можно считать сумму:

$$V_j^1(x, t) = \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^{n_1} a_{ik}^{lj} \Psi^l(x, z_k, t). \quad (11)$$

Для интервала $[t_1, t_2]$ приближенное решение задачи (7), (8), (9) будем искать в виде:

$$V_j^2(x, t) = V_j^1(x, t) + \varphi_j^2(x, t), \quad (12)$$

где $\varphi_j^2(x, t_2)$ есть решение задачи (7), (8), (9) в момент времени t_2 , с граничной функцией

$$g_2^j(y, t_2) = g_1^j(y, t_2) - T\left(\frac{\partial}{\partial y}, n\right)V_1^j(y, t_2). \quad (13)$$

Аналогичным образом для функции $\varphi_j^2(x, t)$ из аппроксимации получаем выражение в виде

$$\varphi_j^2(x, t) = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^{n_2} a_{ik}^{2j} \Psi^i(y, z_k, t - \Delta t), \quad (14)$$

где $\{z_k\}_{k=1}^{n_2}$ расположены равномерно на S_2^* , а аргумент $t - \Delta t$ правой части (14) показывает, что вспомогательные источники силы в точках z_k начинают действовать на Δt , позже, чем $\Phi(x_0, t)$ в точке x_0 .

Из (11), (12), (13), (14) следует:

$$T\left(\frac{\partial}{\partial y}, n\right)V_j^2(y, t_1) = g_1^j(y, t_1), \quad T\left(\frac{\partial}{\partial y}, n\right)V_j^2(y, t_2) = g_1^j(y, t_2), \quad y \in S.$$

Отсюда ясно, что для функции $V_j^2(x, t)$ с определенной точностью выполняется граничное условие (8) в интервале времени $[t_1, t_3[$. Следовательно, функция $V_j^2(x, t)$ является приближенным решением задачи (7), (8), (9) в интервале $[t_1, t_3[$.

Продолжая последовательно строить приближенное решение задачи тем же методом, для интервала $[t_1, t_m[$, решение запишем в виде:

$$V_j^m(x, t) = V_j^{m-1}(x, t) + \varphi_j^m(x, t) = V_j^1(x, t) + \sum_{l=2}^m \varphi_j^l(x, t), \quad (15)$$

где $\varphi_j^l(x, t_l)$ есть решение задачи (7), (8), (9) в момент времени t_l с граничной функцией

$$g_1^l(y, t_l) = g_1^j(y, t_l) - T\left(\frac{\partial}{\partial y}, n\right)V_j^{l-1}(y, t_l), \quad (l = \overline{2, m}), \quad (16)$$

Для функции $\varphi_j^l(x, t)$ из аппроксимации получаем следующее приближенное выражение:

$$\varphi_j^l(x, t) = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^{n_l} a_{ik}^{lj} \Psi^i(x, z_k, t - (l-1)\Delta t) \quad (l = \overline{2, m}), \quad \{z_k\}_{k=1}^{n_l} \in S_l^*. \quad (17)$$

Из (15), (16), (17) следует, что

$$T\left(\frac{\partial}{\partial y}, n\right)V_j^m(y, t_l) = g_1^j(y, t_l) \quad (l = \overline{1, m}), \quad y \in S \quad (18)$$

т. к. $T\left(\frac{\partial}{\partial y}, n\right)\varphi_j^l(y, t_n) = 0$ при $n < l$.

Таким образом, построенная нами функция $V_j^m(x, t)$ удовлетворяет условиям (7), (8), (18). Следовательно, если Δt достаточно мала, тогда функция $V_j^m(x, t)$ с определенной точностью является приближенным решением задачи (7), (8), (9). Отсюда, в силу равенств (2), (6), (15), (17) получаем приближенное выражение для вычисления искомого смещения:

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^3 c_j \Psi^j(x, x_0, t) + \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^{n_l} c_j a_{ik}^{lj} \Psi^i(x, z_k, t - (l-1)\Delta t)$$

Институт геофизики и
инженерной сейсмологии
АН Армянской ССР

Поступила 22.X.1986.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексидзе М. А. Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. М.: Наука, 1978. 351 с.
2. Алексидзе М. А., Закрадзе М. В. Об изучении сил в сейсмологическом очаге—Сообщ. АН ГрузССР, 1980, т. 99, № 1, с. 81—84.
3. Купрадзе В. Д., Гегелия Т. Г., Башелейшвили М. О., Бургуладзе Т. В. Трехмерные задачи математической упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 415 с.