

УДК: 550.837.3

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

С. С. КАЗАРЯН

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ПОСТОЯННОГО ТОКА ДЛЯ УЧЕТА ГОРНОЙ ВЫРАБОТКИ

При интерпретации электроразведочных наблюдений, проведенных в горных выработках, большие сложности связаны с учетом размеров выработки. Это затрудняет прямое использование наземных методов в горных выработках.

Впервые учет искажающего влияния выработки путем вычисления поправочного коэффициента в наземный коэффициент установки с помощью моделирования для методов сопротивлений был сделан в лаборатории электроразведки МГУ [4].

Однако при проведении модельных работ из-за технических сложностей допускается ряд упрощений, в связи с чем точность поправочного коэффициента трудно оценить, поэтому весьма желательно учет искажающего влияния выработки проводить на основе теоретических исследований.

В статье с помощью теоретических расчетов оценен поправочный коэффициент в наземный коэффициент установки.

Задача о распределении поля точечного источника постоянного тока в двухслойной цилиндрической среде была решена Б. П. Дьяконовым [2]. Используя расчет электрического поля в  $n$ -слойной цилиндрической среде, получим это поле.

Пусть точечный источник постоянного тока находится в точке  $(r_0, 0, 0)$ , где  $r_0$  больше радиуса  $r_1$  первого цилиндрического слоя.

Как известно из [3]:

$$Y_m(r_1 + 0) = |\lambda| r_1 \frac{\sigma_1 I_m(|\lambda| r_1)}{\sigma_2 I_m(|\lambda| r_1)}, \quad (1)$$

$$u_0(\lambda, r, \varphi) = \frac{1}{4\pi^2 \sigma_2} \iint_{S_0} K_0(|\lambda| R_{mm_0}) ds \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(r_0, \varphi_0, z_0) e^{-i\lambda z_0} dz_0, \quad (2)$$

где  $\sigma_i$  — электрическая проводимость  $i$  — того цилиндрического слоя,  $\gamma$  — плотность источника тока, а  $R_{mm_0} =$

$$= \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

Так как у нас точечный источник, то (2) принимает следующий вид:

$$u_0(\lambda, r, \varphi) = \frac{I}{4\pi^2 \sigma_2} K_0(|\lambda| R_{mm_0}), \quad (3)$$

причем  $I = \gamma V_0$ .

Используя известное соотношение

$$K_0(|\lambda| R_{MM_0}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m(|\lambda| r) K_m(|\lambda| r_0) e^{im\varphi} \quad (4)$$

для коэффициентов ряда Фурье функции  $u_0(\lambda, r, \varphi)$ , получим:

$$u_{0m}(\lambda, r) = \frac{I}{4\pi^2 \sigma_2} I_m(|\lambda| r) K_m(|\lambda| r_0). \quad (5)$$

Подставив (1) и (5) в выражение потенциала  $U_2(r, \varphi, z)$  [3]:

$$U_2(r, \varphi, z) = \frac{I}{4\pi\sigma_2} \left[ \frac{1}{\sqrt{R_{MM_0}^2 + z^2}} - \frac{2}{I} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \times \right. \\ \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r_1 u'_{0m}(\lambda, r_1) - Y_m(r_1 + 0) u_{0m}(\lambda, r_1)}{Y_m(r_1 + 0) K_m(|\lambda| r_1) - |\lambda| r_1 K'_m(|\lambda| r_1)} K_m(|\lambda| r) e^{i\lambda z} d\lambda \right]. \quad (6)$$

найдем, что потенциал во второй среде имеет вид:

$$U_2(r, \varphi, z) = \frac{I}{4\pi\sigma_2} \left[ \frac{1}{\sqrt{R_{MM_0}^2 + z^2}} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \times \right. \\ \left. \times \int_0^{\infty} \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) K_m(\lambda r_0) I'_m(\lambda r_1) I_m(\lambda r_1)}{\sigma_2 I_m(\lambda r_1) K'_m(\lambda r_1) - \sigma_1 I'_m(\lambda r_1) K_m(\lambda r_1)} K_m(\lambda r) \cos \lambda z d\lambda \right]. \quad (7)$$

Если устремить  $\sigma_1$  к нулю, то мы получим искомый потенциал, соответствующий тому случаю, когда точечный источник постоянного тока находится на некотором расстоянии от горной выработки

$$U_2(r, \varphi, z) = \frac{I}{4\pi\sigma_2} \left[ \frac{1}{\sqrt{R_{MM_0}^2 + z^2}} - \right. \\ \left. - \frac{2}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{I'_m(\lambda r_1) K_m(\lambda r_0)}{K'_m(\lambda r_1)} K_m(\lambda r) \cos \lambda z d\lambda \right]. \quad (8)$$

Используя формулу потенциала электрического поля точечного источника тока, находящегося в начале цилиндрической системы координат в однородном пространстве,

$$U(r, z) = \frac{I\rho}{4\pi V \sqrt{r^2 + z^2}}, \quad (9)$$

мы с помощью (8) для кажущегося сопротивления получаем следующее соотношение:

$$\rho_k = \rho_2 \frac{\sqrt{\bar{r}^2 + \bar{z}^2}}{\sqrt{R_{MM_0}^2 + \bar{z}^2}} \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{R_{MM_0}^2 + \bar{z}^2}{R_{MM_0}^2 + \bar{z}^2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \times \right. \\ \left. \times \int_0^{\infty} \frac{I'_m(t) K_m(r_0 t)}{K'_m(t)} K_m(\bar{r}t) \cos \bar{z}t dt \right], \quad (10)$$

где

$$\bar{r}_0 = \frac{r_0}{r_1}; \quad \bar{r} = \frac{r}{r_1}; \quad \bar{z} = \frac{z}{r_1}; \quad t = \bar{r} r_1;$$

$$\bar{R}_{н.м.} = \sqrt{\bar{r}^2 + \bar{r}_0^2 - 2\bar{r}\bar{r}_0 \cos \varphi}.$$

Подынтегральную функцию  $f_m(t)$  формулы (10) в окрестности точки  $t=0$  можно представить в виде

$$f_m(t) = W_m(t) + \varphi_m(t) \ln t + \psi_m(t) \ln^2 t, \quad (11)$$

где  $W_m(t)$  и  $\varphi_m(t)$  — четные и аналитические функции, а  $\psi_m(t)$  тоже четная, но при  $m=0$  эта функция имеет непрерывную производную третьего порядка. Отметим также, что  $f_m(t)$  и ее производные стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Эти свойства функции  $f_m(t)$  удовлетворяют условиям теоремы 3 из работы [1] об асимптотическом разложении. Следовательно, при больших значениях  $\bar{z}$  имеем:

$$\int_0^{\infty} f_m(t) \cos \bar{z} t dt \approx P_{0m} I_0^{(0)}(\bar{z}) + P_{1m} I_1^{(0)}(\bar{z}) + S_{0m} I_1^{(1)}(\bar{z}) + S_{1m} I_2^{(1)}(\bar{z}), \quad (12)$$

где

$$I_0^{(0)}(\bar{z}) = -\frac{\pi}{2} \frac{\ln 2 + \gamma + \ln(\bar{z}^2 + 1)}{\sqrt{\bar{z}^2 + 1}};$$

$$I_1^{(0)}(\bar{z}) = \pi \left[ \frac{\ln(\bar{z}^2 + 1)}{(\bar{z}^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{3 - \gamma - \ln 2}{(\bar{z}^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right];$$

$$I_1^{(1)}(\bar{z}) = \frac{\pi}{2} \left[ -\frac{1}{\sqrt{\bar{z}^2 + 1}} + \frac{2}{(\bar{z}^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\ln 2 + \gamma + \ln(\bar{z}^2 + 1)}{(\bar{z}^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right];$$

$$I_2^{(1)}(\bar{z}) = \frac{\pi}{(\bar{z}^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Причем,

$$P_{0m} = -\psi_m(0); \quad S_{0m} = \varphi_m(0);$$

$$P_{1m} = 0,5 [-\psi_m'(0) + \varphi_m(0)];$$

$$S_{1m} = 0,5 [\varphi_m'(0) + (\ln 2 - \gamma) \psi_m''(0) + 0,5 \varphi_m(0)].$$

Из свойств функций  $\varphi_m(t)$  и  $\psi_m(t)$  следует, что главный член асимптотического разложения (12) является бесконечно малой величиной порядка выше  $O\left(\frac{1}{z^1}\right)$ , когда  $m \geq 2$ . Поэтому мы рассмотрим только случай  $m=0$  и  $m=1$ . В нашем случае

$$\varphi_m(0) = \psi_m(0) = 0; \quad \varphi_0'(0) = \ln 4 - 2; \quad -\ln(\bar{r}\bar{r}_0);$$

$$\psi_1'(0) = -1; \quad \psi_1''(0) = 0; \quad \varphi_1'(0) = -0,5 \left( \frac{\bar{r}_0}{\bar{r}} + \frac{\bar{r}}{\bar{r}_0} + \frac{1}{\bar{r}\bar{r}_0} \right). \quad (13)$$

Определив с помощью (13) постоянные коэффициенты асимптотического разложения (12), мы из этого разложения получаем следующие формулы при  $\bar{z} \gg 1$ :

$$\int_0^{\infty} f_0(t) \cos \bar{z} t dt \approx \frac{\pi}{2} \frac{\ln [4(\bar{z}^2 + 1)] - 3 - \ln(\bar{r} \bar{r}_0)}{(\bar{z}^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int_0^{\infty} f_1(t) \cos \bar{z} t dt \approx -\frac{\pi}{4} \frac{\frac{\bar{r}}{\bar{r}_0} + \frac{1}{\bar{r} \bar{r}_0} + \frac{\bar{r}_0}{\bar{r}}}{(\bar{z}^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$
(14)

Подставив (14) в (8) и (10) для потенциала и кажущегося сопротивления при больших значениях  $\bar{z}$ , найдем следующие приближенные выражения:

$$U_2(r, \varphi, \bar{z}) = \frac{I}{4\pi\sigma_2 r_1} \left[ \frac{1}{V \sqrt{\bar{R}_{MM_0}^2 + \bar{z}^2}} - \frac{\ln [4(\bar{z}^2 + 1)] - 3 - \ln(\bar{r} \bar{r}_0)}{(\bar{z}^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{\bar{r}}{\bar{r}_0} + \frac{1}{\bar{r} \bar{r}_0} + \frac{\bar{r}_0}{\bar{r}}}{(\bar{z}^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \cos \varphi \right];$$
(15)

$$\rho_k = \rho_2 \frac{V \sqrt{\bar{r}^2 + \bar{z}^2}}{V \sqrt{\bar{R}_{MM_0}^2 + \bar{z}^2}} \left\{ 1 - V \sqrt{\bar{R}_{MM_0}^2 + \bar{z}^2} \times \left[ \frac{\ln [4(\bar{z}^2 + 1)] - 3 - \ln(\bar{r} \bar{r}_0)}{(\bar{z}^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\frac{\bar{r}}{\bar{r}_0} + \frac{1}{\bar{r} \bar{r}_0} + \frac{\bar{r}_0}{\bar{r}}}{(\bar{z}^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \cos \varphi \right] \right\};$$
(16)

На измерения, проведенные методами постоянного тока, существенное влияние оказывают помехи от энергетических установок, а также искажения электрического поля рельсами, металлическими трубами. В связи с этим важное значение приобретает получение теоретических кривых потенциала и кажущегося сопротивления с учетом размеров горной выработки. Такие кривые могут служить эталонами при извлечении полезной информации от полевых кривых.

На рис. 1 приведены кривые потенциала, рассчитанные с помощью формул (8) и (15). Причем  $r_1 = 1$  м и точечный источник постоянного тока находится в точке, для которого  $r = 1,1$  м,  $\varphi = 0$  и  $z = 0$ .

Как видно из рисунка, после шести метров кривые потенциала сближаются. Из этого следует, что после определенного расстояния изменение координаты  $\varphi$  существенно не влияет на величину потенциала.

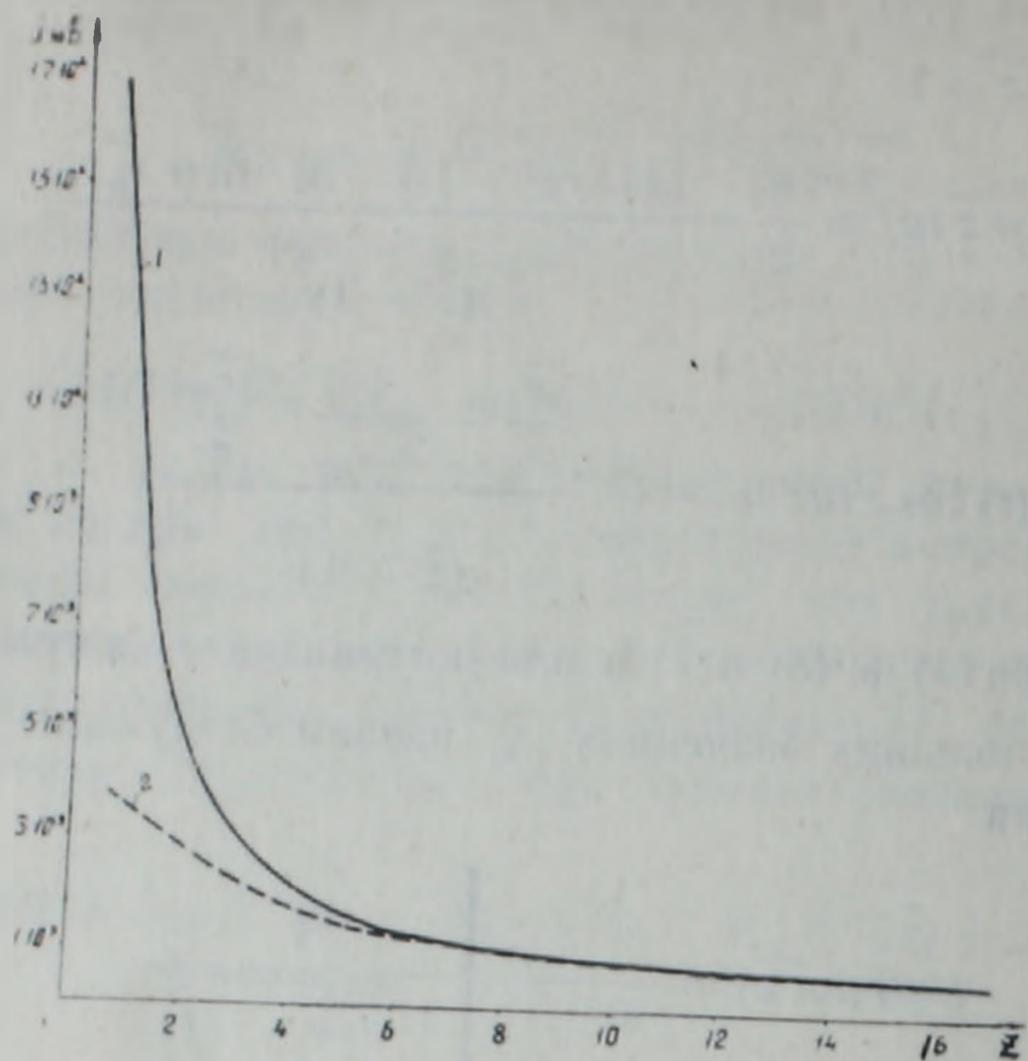


Рис. 1. Влияние горной выработки на распределение потенциала точечного источника постоянного тока. 1—кривая потенциала по профилю  $(r, 0, z)$ , 2—кривая потенциала по профилю  $(r, \frac{\pi}{2}, z)$ .

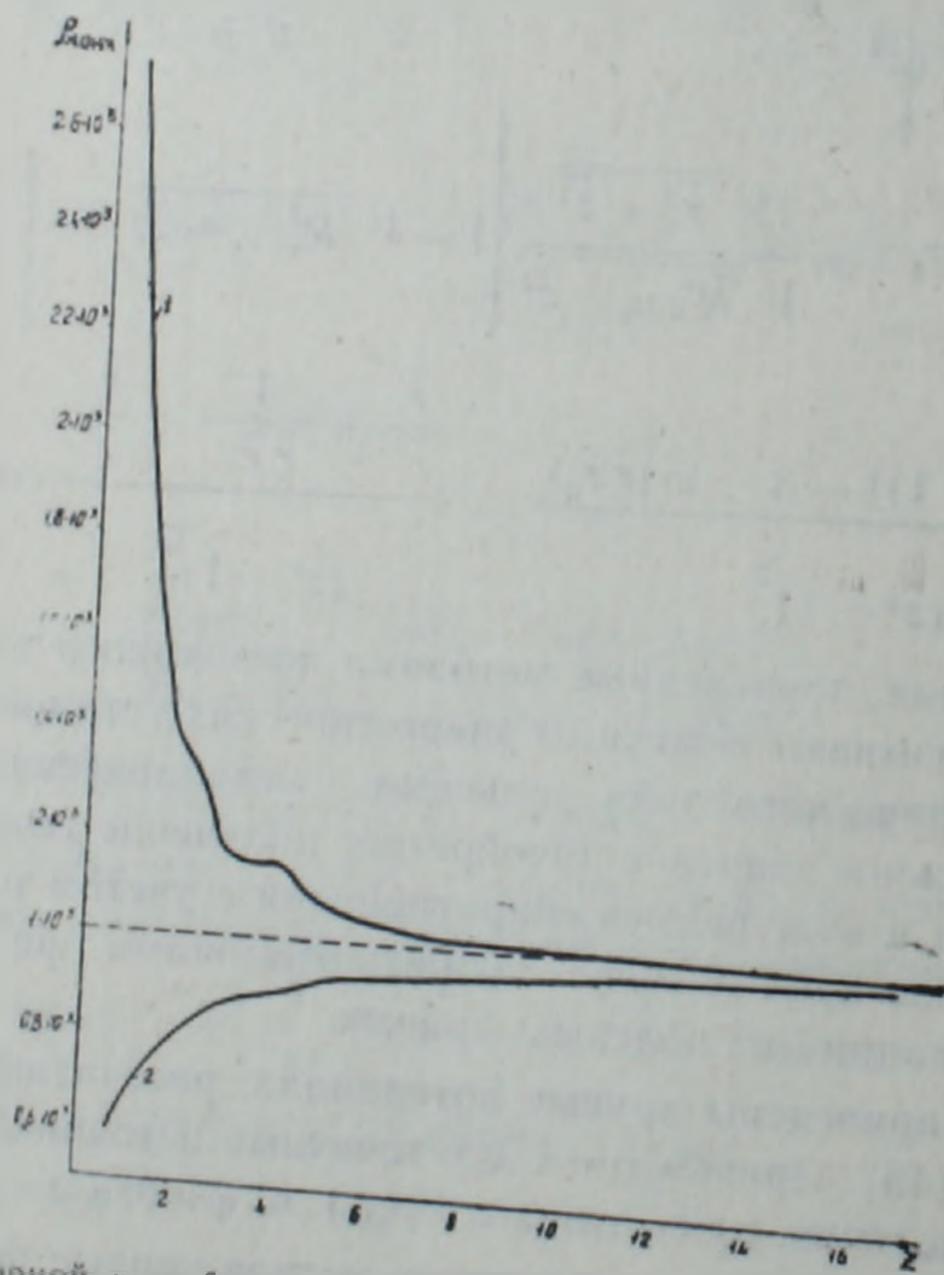


Рис. 2. Влияние горной выработки на значения кажущегося сопротивления. 1—кривая  $\rho_k$  по профилю  $(r, 0, z)$ , 2—кривая  $\rho_k$  по профилю  $(r, \frac{\pi}{2}, z)$ .

На рис. 2 приведены кривые кажущегося сопротивления, вычисленные на основе формул (10) и (16) по тем же профилям, что и потенциал.

Кривая 1 кажущегося сопротивления заметно изменяется, когда  $2 \leq z \leq 4$ , но при  $z > 4$  быстро стремится к пределу  $\rho_2$ , а кривая 2 относительно медленно стремится к пределу  $\rho_2$ .

Чтобы выполнить электрическое зондирование в горной выработке, необходимо учесть влияние выработки путем введения поправок в наземный коэффициент установки.

Определим коэффициент четырехэлектродной симметричной установки в горной выработке следующим образом:

$$K = 2\pi \frac{\bar{R}_{AM_1} \bar{R}_{AN}}{\bar{R}_{AN} - \bar{R}_{AM_1}}, \quad (17)$$

где

$$\frac{1}{\tilde{R}_{AN}} = \frac{1}{V \sqrt{\bar{R}_{MM_0}^2 + (\bar{z}_N - \bar{z}_A)^2}} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} e^{im\varphi} \times \\ \times \int_0^{\infty} \frac{I_m(t)}{K_m(t)} K_m^2(\bar{r}t) \cos(\bar{z}_N - \bar{z}_A) t dt$$

при малых значениях  $(\bar{z}_N - \bar{z}_A)$ ;

$$\frac{1}{\bar{R}_{AN}} = \frac{1}{V \sqrt{\bar{R}_{MM_0}^2 + (\bar{z}_N - \bar{z}_A)^2}} \frac{\ln [(\bar{z}_N - \bar{z}_A)^2 + 1] + 2 \ln \frac{2}{\bar{r}} - 3 - \left( \frac{1}{\bar{r}^2} + 2 \right) \cos \varphi}{[(\bar{z}_N - \bar{z}_A)^2 + 1]^{\frac{3}{2}}}$$

при больших значениях  $(\bar{z}_N - \bar{z}_A)$ .

В таблице 1 в результате вычисления по формуле (17) приведены значения поправочного коэффициента в наземный коэффициент установки Венера, учитывающего искажающее влияние выработки в зависимости от расстояния источника постоянного тока от центра установки ( $z$  измеряется в метрах).

Таблица 1

$z$	1	2	3	3,4	4	5	6	8	10	12	20	30
$C_{11}$	1,30	1,39	1,49	1,50	1,59	1,71	1,74	1,84	1,93	1,97	2,01	2,01

Аналогичным образом можно вычислить поправочный коэффициент в наземный коэффициент для любой установки.

Ордена Трудового Красного Знамени  
Институт геофизики и инженерной  
сейсмологии АН Армянской ССР

Поступила 3. III. 1981.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И., Казарян С. С. Об асимптотическом поведении некоторых несобственных интегралов Фурье. Сб. «Численные методы в геофизических исследованиях». Изд. МГУ, 1979.
2. Дьяконов Б. П. Цилиндр в поле точечного источника электрического тока. Известия АН СССР, серия геофизическая, № 1, 1957.
3. Казарян С. С. Электрическое поле произвольных источников постоянного тока в слоистой цилиндрической среде. Известия АН Арм. ССР, Науки о Земле, № 1980.
4. Хмелевской В. К. Методы подземной электроразведки. Сб. «Геофизические исследования». Изд. МГУ, 1964.