Известия АН Арм. ССР, Науки о Земле, XXXV, № 4, 36—42, 1982

УДК 550.348.098.42:681.3.06

С. Ц. АКОПЯН, Г. Ц. АКОПЯН

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЗЕМЛИ ПРИ МАЛЫХ n

Проделаны численные расчеты для крутильных колебаний Земли в диапазоне изменения номера колебания n от 2 до 5 и номера обертона l от 0 до 12.

В этом диапазоне вычислены частоты (периоды), таблицы «производных» в первом и во втором приближениях, для некоторых моделей распределения Q с глубиной рассчитана диссипативная функция Q_l крутильных колебаний. Исследовано влияние затухания на частоты крутильных колебаний во втором приближении. Для малых n вклад затухания в частоты во втором приближении оказался маленьким и им можно пренебречь, но при увеличении номера колебания этот вклад возрастет и при больших n оно может оказаться существенным.

1. Для вычисления периодов, таблиц «производных», диссипативной функции обертонов крутильных колебаний Земли при малых n была составлена АЛГОЛ-программа. Программа состояла из трех частей. В первой вычислялись частоты и периоды основных тонов и обертонов, во второй—вычислялись коэффициенты первого и второго приближения, а в третьей части программы вычислялись диссипативная функция крутильных колебаний. Исследован вклад затухания в частоты во втором приближении.

В отличие от предыдущих вычислений [7, 8], здесь все расчеты проводились с применением метода функционала [1]. Этот метод позволил обойти вычисление собственных функций U_l и V_l задачи, расчет которых приводил к большим погрешностям при возрастании одновременно номера колебания n и номера обертона l.

2. При расчетах в качестве исходной была взята модель Земли Гутенберга [7]. Согласно этой модели кора и оболочка разбивались на 34 слоя, в каждом из которых плотность ρ (x) и модуль сдвига μ (x) постоянны. Область $O \leqslant x \leqslant c$ (x—безразмерная глубина) подразделялась точками $O = x_0 < x_1 < \cdots < x_{34} = c$ на конечное число отрезков $[x_{i-1}, x_i]$. При фактическом получении периодов и коэффициентов $k_{\rho i}$, $k_{\mu i}$, $Q^{lk}_{\rho i}$, $Q^{lk}_{\mu i}$ на каждом интервале $[x_{i-1}, x_i]$ методом Рунге-Кутта интегрировались следующие уравнения [1]:

$$\dot{\theta}_l = -\left[\frac{1}{p}\sin^2\theta_l + g_l\cos^2\theta_l\right], \tag{1}$$

$$\dot{U}^l_{\rho l} = -A_{ll}U^l_{\rho l} - \frac{\text{æ}_{ol}}{2}(c_0+x)^4\cos^2\theta_l,$$

$$\dot{U}^l_{\mu l} = -A_{ll}U^l_{\mu l} + \frac{1}{2\text{æ}_{ol}}\left[(c_0+x)^2\bar{N}\cos^2\theta_l + \frac{\sin^2\theta_l}{\mu^2(c_0+x)^4}\right], \tag{2}$$

$$\dot{U}_{\rho l}^{lk} = - A_{lk} U_{\rho l}^{lk} - \frac{æ_{ol}^2}{æ_{ol}^2 - æ_{ok}^2} (c_0 + x)^2 \cos\theta_l \cos\theta_k , \qquad (3)$$

$$\dot{U}_{\mu l}^{lk} = - A_{lk} U_{\mu l}^{lk} - \frac{1}{æ_{ol}^2 - æ_{ok}^2} \left[(c_0 + x)^2 \overline{U} \cos\theta_l \cos\theta_k + \frac{\sin\theta_l \sin\theta_k}{\mu^2 (c_0 + x)^2} \right], \qquad (4)$$

$$\dot{V}_l = - A_{ll} V_l + (c_0 + x)^2 \rho_0 \cos\theta_l ,$$

где введено обозначение

$$A_{lk} = \left(\frac{1}{p} - g_l \right) \sin\theta_l \cos\theta_l + \left(\frac{1}{p} - g_k \right) \sin\theta_k \cos\theta_k \qquad (5)$$

(индексы l и k — номера обертонов).

Уравнения (1)—(4) интегрировались с нулевыми начальными условиями, при этом использовался метод пересчета [1], что позволило существенно сократить время счета.

Собственные значения (частоты) находились «стрельбой» по параметру æ: при данном æ граничное условие, заданное на одном конце интервала, изменения, с помощью уравнения (1) переносим на другой конец, проверяем выполнение там граничного условия и затем æ изменяем, с учетом монотонной зависимости θ от æ на правом конце интервала.

Коэффициенты $k_{\rho l}^l$, $k_{\mu l}^l$, $a_{\rho l}^{lk}$, $a_{\mu l}^{lk}$ на каждом из интервалов находились по следующим формулам [1, 4]:

$$k_{\rho l}^l = \frac{U_{\rho l}^l(x_0) - U_{\rho, l-1}^l(x_0)}{V_l(x_0)} ; \quad k_{\mu l}^l = \frac{U_{\mu l}^l(x_0) - U_{\mu, l-1}^l(x_0)}{V_l(x_0)} \qquad (6)$$

$$a_{\rho l}^{lk} = \frac{U_{\rho l}^{lk}(x_0) - U_{\rho, l-1}^{lk}(x_0)}{[V_l(x_0) V_k(x_0)]^{1/2}} \left[\frac{V_l(x_0)}{V_k(x_0)} \right]^{1/2} \qquad (7)$$

$$a_{\mu l}^{lk} = \frac{U_{\mu l}^{lk}(x_0) - U_{\mu, l-1}^{lk}(x_0)}{[V_l(x_0) V_k(x_0)]^{1/2}} \left[\frac{V_l(x_0)}{V_k(x_0)} \right]^{1/2} .$$

Зная коэффициенты (6), (7), по известным формулам [4] вычислялись коэффициенты второго приближения $k_{\rho\rho, lj}$, $\mathring{k}_{\mu\mu, lj}$, $\mathring{k}_{\mu\rho, lj}$.

3. В табл. 1 приведены рассчитанные безразмерные частоты $æ_l$ и периоды ($T_м$ — в *мин*, $T_с$ — в *сек*) для $n = 2 \div 5$ и $l = 0 \div 12$. Ввиду громоздкости результатов в табл. 2 приведены укрупненные значения коэффициентов $k_{\rho l}$, $k_{\mu l}$, $\mathring{k}_{\mu\mu, lj}$ соответственно. При этом, следуя [8], 34 слоя коры и оболочки объединялись следующим образом: 1—2 (0—38 *км*), 3—15 (38—300 *км*), 16—24 (300—1000 *км*), 25—34 (1000—2898), т. е. производилось четырехслойное укрупнение.

4. Одним из важнейших результатов, который был получен методом собственных колебаний, является распределение диссипативной функции Q_μ в оболочке Земли [9, 10]. Последние модели по распределению Q_μ характеризуются зоной пониженной добротности ($Q \sim 100$) у кровли и подошвы мантии [9, 10].

Диссипативная функция для крутильных колебаний определяется по формуле [8].

$$Q_l^{-1} = \frac{2}{\text{æ}_{0l}} \sum_i k_{il}^l Q_i^{-1}, \tag{8}$$

где Q_i — диссипативная функция i-го слоя Земли.

Таблица 1

l	æ	$T_м$	$T_с$	æ	$T_м$	$T_с$	æ	$T_м$	$T_с$	æ	$T_м$	$T_с$
	$n=2$			$n=3$			$n=4$			$n=5$		
0	2,125	43,61	2616	3,282	28,23	1694	4,286	21,62	1297	5,194	17,84	1070
1	7,375	12,56	753.9	8,042	11,52	691,3	8,862	10,46	627,4	9.756	9,498	569,9
2	12,50	7,413	444,8	12,86	7,205	432,3	13,33	6,951	417,1	13,92	6,657	399,4
3	18,06	5,131	307,8	18,32	5,058	303,5	18,65	4.968	298,1	19,07	4,859	291,5
4	24,06	3,851	231,1	24,24	3,823	229,4	24,49	3,784	227	24,79	3,738	224,3
5	29,95	3,094	185,6	30,09	3,080	184,8	30,29	3,059	183,6	30,53	3,035	182,1
6	35,87	2,583	155	35,99	2.575	154,5	36,15	2.563	153,8	36,36	2,548	152,9
7	41,78	2,218	133,1	41,88	2,213	132,8	42,02	2,205	132,3	42,19	2,196	131,8
8	47,66	1,944	116,7	47,75	1,941	116,4	48,88	1,896	113,7	48,93	1,894	113,6
9	53,59	1,729	103,7	53,67	1,727	103,6	53,78	1,723	103,4	53,92	1,719	103,1
10	59,57	1,556	93,33	59,64	1,554	93.22	59,74	1,551	93,07	59,86	1,548	92,88
11	65,53	1,414	84,84	65,60	1,413	84,75	65,69	1,411	84,64	65.80	1,408	84,49
12	71,38	1,298	77,89	71,41	1,297	77,82	71,52	1,296	77,74	71,62	1,294	77,63

По формуле (8), для вариантов 6, 3, 15, 2 распределения Q_i с глубиной [9], были вычислены диссипативная функция Q_l в диапазоне $n=2\div5$, $l=0\div12$. Результаты приведены в табл. 3. При этом производилось десятислойное укрупнение: 1—2 (0—38 *км*), 3—15 (38—300 *км*), 16—24 (300—1000 *км*), 25 (1000—1200 *км*), 26 (1200—1400 *км*), 27—29 (1400—2000 *км*), 30 (2000—2200 *км*), 31 (2200—2400 *км*), 32 (2400—2600 *км*), 33—34 (2600—2898 *км*).

В настоящее время наибольшее число экспериментальных определений Q относится к основным тонам крутильных и сфероидальных колебаний [6, 11]. Привлечение теоретических и экспериментальных данных по затуханию обертонов крутильных колебаний позволит изучить более тонкие особенности распределения неупругих свойств мантии Земли, поскольку они определяются параметрами значительно более узких глубинных интервалов. Но данных по обертонам немного и они имеют большой разброс. Сильная зависимость удельных диссипативных факторов обертонов от узких глубинных интервалов при малой достоверности полученных в настоящее время экспериментальных значений, соответствующих полученным теоретическим, может привести к получению ошибочных особенностей моделей [6].

5. В работе [5] было показано, что учет слабого затухания с точностью до членов второго порядка малости и выше осуществляется введением обобщенного комплексного модуля сдвига. Например, для получившего широкое распространение в геофизике, реологического те-

l	i	$k_{\rho l}^{l}$ ($n=2$)	$k_{\mu l}^{l}$ ($n=2$)	$k_{\rho l}^{l}$ ($n=3$)	$k_{\mu l}^{l}$ ($n=3$)	$k_{\rho l}^{l}$ ($n=4$)	$k_{\mu l}^{l}$ ($n=4$)	$k_{\rho l}^{l}$ ($n=5$)	$k_{\mu l}^{l}$ ($n=5$)
0	1	0.0248	0,00577	0.446	0,0109	0,0681	0,0176	0,0953	0,0261
	2	0.185	0,0669	0,33	0,127	0.499	0,205	0,690	0,305
	3	0,408	0,290	0.676	0,521	0,339	0,788	1,19	1,08
	4	0,446	0,700	0,59	0,982	0,637	1,13	0,622	1,18
1	1	0,102	0,0022	0,107	0,00459	0,113	0,0071	0,122	0,00976
	2	0,687	0.103	0,703	0,139	0,725	0,181	0,76	0,23
	3	0,503	1,08	0,436	1,16	0,365	1,24	0,315	1,35
	4	0,239	2,50	2.78	2,72	3.23	3	3,7	3,31
2	1	0.239	0,00309	0,238	0,00528	0.236	0,00792	0,233	0,0105
	2	1,30	0,527	1,28	0,553	1,24	0,586	1,19	0,614
	3	0,829	2,59	0,891	2,52	0,978	2,42	1,09	2,3
	4	1,88	3,13	4,02	3,35	4,21	3,65	4,45	4,03
3	1	0.293	0,00506	0,292	0,00615	0,29	0,00806	0,288	0,0098
	2	1,15	1,11	1,14	1,11	1,11	1,13	1.08	1,14
	3	2,51	1,99	2,53	2,01	2,56	2,02	2,58	2,04
	4	5,08	5,93	5,2	6,03	5,37	6,17	5,59	6,34
4	1	0,364	0,00903	0,364	0,0105	0,365	0,0116	0,366	0,0137
	2	1,02	1,82	1,01	1,83	1	1,83	0,992	1,85
	3	2,94	3,36	2,95	3,37	2,97	3.39	2,99	3,4
	4	7,71	6,84	7,8	6.91	7,91	7.01	8.02	7,13
5	1	0,464	0,0177	0,464	0,0193	0,465	0,0199	0,466	0,0216
	2	1,15	2,51	1,15	2.51	1.16	2,51	1,16	2,51
	3	4,68	3,45	4,71	3,44	4,74	3,44	4,77	3,44
	4	8,68	9,00	8,72	9,07	8,79	9,17	8,87	9,3
6	1	0,55	0,0299	0,55	0,0311	0,551	0,0326	0,552	0,0328
	2	1.60	2,80	1,6	2,8	1,61	2,79	1,62	2,78
	3	5,12	4,30	5,1	4,33	5,09	4,37	5,07	4,41
	4	10,7	10,8	10,7	10,8	10,8	10,9	10,9	10,9
7	1	0.66	0,0483	0,66	0,05	0,66	0,0505	0.661	0,0523
	2	2,38	2,94	2,39	2,94	2,4	2,93	2,41	2,93
	3	5,22	5,97	5.23	5,97	5,24	5,38	5,26	5,98
	4	12,6	11,9	12,7	12	12.7	12	12,8	12,1
8	1	0,742	0,0734	0.742	0,0743	0,644	0,172	0,743	0,0741
	2	3,08	2,97	3,08	2,97	3.24	2,97	3,09	2,97
	3	6,41	6,31	6,4	6,32	6,8	6,04	6,41	6,36
	4	13,6	14,5	13,7	14,5	13,7	14,6	13,8	14,6
9	1	0,792	0,0996	0,803	0,102	0,804	0,102	0,79	0,1
	2	3,33	3,14	3,38	3,19	3,38	3,19	3,32	3,14
	3	6,16	7,98	6,25	8,1	6,26	8,11	6,15	7,97
	4	16,5	15,6	16,4	15,5	16,4	15,5	16,7	15,8
10	1	0,866	0,135	0,879	0,139	0,897	0,142	0,881	0,141
	2	3,36	3,72	3,4	3,78	3,47	3,86	3,4	3,8
	3	7,81	7,67	7.93	7,78	8,12	7,93	7,99	7,77
	4	17,8	18,3	17,6	18,1	17,4	18	17,7	18,2
11	1	1,1	0,218	1,06	0,208	0,965	0,189	0,984	0,195
	2	3,79	5,18	3,65	4,99	3,32	4,54	3,38	4,63
	3	9,61	9,23	9,27	8,91	8,48	8,17	8,62	8,32
	4	18,3	18,2	18,8	18,7	20,1	20	19,9	19,8
12	1	1,1	0,268	1,29	0,314	1,47	0,351	,01	0,242
	2	3,57	5,37	4,18	6,28	4,74	7,13	3,28	4,92
	3	9,45	8,97	11,2	10,7	12,9	12,3	9	8,56
	4	21,6	21,1	19	18,5	16,6	16	22,5	22,1

ла Кнопова—Ломнитца этот модуль (с точностью до членов второго порядка) для j—го слоя Земли, запишется в виде [5]:

$$
\begin{aligned}
\mu^* &= \mu_j(1 + M_{1j} + M_{2j}), \\
M_{1j} &= -a_j + iQ_j^{-1}, \qquad (9)\\
M_{2j} &= a_j^2 - Q_j^{-2} - ia_j Q_j^{-1} + \frac{i\lambda_0}{\omega_0}\left[\frac{\omega_0}{\alpha} a_j + i\left(\frac{2}{\pi} - \frac{\omega_0}{\alpha}\right) Q_j^{-1}\right].
\end{aligned}
$$

Таблица 3

Q_c

l	$n=2$				$n=3$				$n=4$				$n=5$			
	6	3	15	2	6	3	15	2	6	3	15	2	6	3	15	2
0	452	288	266	234	410	297	258	234	369	299	247	232	331	293	235	226
1	516	375	294	268	506	314	278	245	498	280	270	231	484	266	269	227
2	368	276	323	276	371	267	310	266	381	256	296	252	391	244	282	239
3	381	248	247	202	386	247	244	201	388	244	240	199	389	241	236	197
4	332	214	248	196	335	214	248	197	335	214	248	198	336	214	248	199
5	327	212	229	188	330	212	228	188	331	212	227	188	322	213	226	187
6	337	218	215	187	338	218	215	188	338	218	217	188	331	218	218	189
7	341	229	236	215	342	229	234	215	344	229	235	214	344	229	235	213
8	367	245	214	202	366	245	215	203	377	252	221	208	367	245	216	203
9	383	242	243	226	362	241	242	226	338	241	242	225	366	242	243	226
0	366	237	221	201	379	237	220	200	359	236	213	199	366	237	220	200
1	323	221	227	200	333	222	230	202	354	226	238	206	350	226	236	206
2	341	223	224	193	304	215	214	189	280	208	208	186	358	223	230	196

Тогда изменение частоты за счет затухания с точностью до членов второго порядка малости для этого реологического тела можно записать в виде [5]:

$$\Delta\omega_l = \frac{c_s}{r_a}\,(\Delta æ'_{1l} + \Delta æ'_{2l}) \qquad (10)$$

$$\Delta æ'_{1l} = -\sum_j k^l_{\mu j}\, a_j \qquad (11)$$

$$
\begin{aligned}
\Delta æ'_{2l} = {} & \sum_j k^l_{\mu j}\,(a_j^2 - Q_j^{-2}) + \sum_{i,j} k_{\mu\mu,ij}(a_i a_j - Q_i^{-1}Q_j^{-1}) + \\
& + \left(\frac{\bar{c}_s}{\alpha r_a} - \frac{2}{\pi æ_0}\right)\sum_{i,j} k^l_{\mu i}\, k^l_{\mu j}\, Q_i^{-1}\, Q_j^{-1}. \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Влияние затухания на частоты крутильных колебаний в первом приближении (это фактически поправки за динамический модуль сдвига) было подробно изучено и рассчитано в [2, 3].

Вклад динамического модуля и диссипативного фактора во втором приближении в частоты вычисляли по формуле (12) для $n=2\div5$. Приведем безразмерные частоты и поправки к ним в первом и втором приближениях, возникающих из-за затухания:

$$
{}_{2}æ_{0} = 2{,}125, \quad \Delta({}_{2}æ_{1}) = -0{,}0118, \quad \Delta({}_{2}æ_{2}) = 0{,}00017;
$$
$$
{}_{3}æ_{0} = 3{,}282, \quad \Delta({}_{3}æ_{1}) = -0{,}0149, \quad \Delta({}_{3}æ_{2}) = 0{,}00022;
$$
$$
{}_{4}æ_{0} = 4{,}286, \quad \Delta({}_{4}æ_{1}) = -0{,}0219, \quad \Delta({}_{4}æ_{2}) = 0{,}00034;
$$
$$
{}_{5}æ_{0} = 5.194, \quad \Delta({}_{5}æ_{1}) = -0{,}0351, \quad \Delta({}_{5}æ_{2}) = 0{,}00047.
$$

При расчетах, как и в [3], поправки за динамический модуль сдвига отсчитывались от значения μ_s при $T \sim 1$ *сек*. Вклад затухания во втором приближении в частоты оказался маленьким и его можно не учитывать при современной точности определения частот (периодов), но этот вклад может оказаться существенным при больших n. По-видимому, в будущем для больших n, при сравнении экспериментальных и расчетных значений периодов следует вводить небольшую поправку к периодам из-за диссипации.

Тот факт, что вклад затухания во втором приближении оказался с положительным знаком не противоречит физической природе процесса, поскольку в целом частоты уменьшаются из-за поправок за счет динамического модуля сдвига и диссипативной функции в первом и втором приближениях. Учет только влияния диссипативной функции Q слоев на частоты приводит к их уменьшению во втором приближении, а в первом она не дает вклада в частоты.

Отметим, что все расчеты велись в предположении, что диссипация в оболочке Земли идет только за счет сдвиговых процессов, и в предположении частотной независимости Q.

Институт геофизики и инженерной
сейсмологии АН Арм. ССР,
Ереванский государственный университет

Поступила 29.IX 1981.

Ս. Յ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Հ. Յ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

ԵՐԿՐԻ ՈՂՈՐՄԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿՄԱՆ ԱՐԴՅՈՒՆՔՆԵՐԸ ՓՈՔՐ n-ԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հաշվարկված են Երկրի ոլորման տատանումների հաճախականությունները (պարբերությունները), առաջին և երկրորդ մոտավորության գործակիցները, Q դիսիպացիայի ֆունկցիան n=2÷5 և l=0÷12 օբերտոնների համար։ Ուսումնասիրված և հաշվարկված է մարման ազդեցությունը հաճախականությունների վրա երկրորդ մոտավորությամբ։ Հաշվարկումների ընթացքում կիրառված է ֆունկցիոնալի մեթոդը։

S. TZ. HAKOPIAN, H. TZ. HAKOPIAN

EARTH'S TOROIDAL OSCILLATION CALCULATION RESULTS FOR LOW n-VALUES

Abstract

The Earth's toroidal oscillations are calculated for variations of the oscillation number $n=2\div5$ as well as of the overtone number $l=0\div12$.

The frequencies (periods) and the tables of „derivatives" are calculated at first and second approximations; for some models of Q distribution with depth the toroidal oscillation dissipative function Q_l is calculated. The fading influence on the toroidal oscillations frequencies are investigated at second approximation. For low n values the fading contribution in frequencies at second approximation is insignificant and it can be neglected, but for high n values its contribution increases and it may be considerable.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Акопян С. Ц.* Вычисление крутильных колебаний Земли методом функционала. ДАН АрмССР, LXXIV, 4, 1982
2. *Акопян С. Ц., Жарков В. Н., Любимов В. М.* О динамическом модуле сдвига земных недр. ДАН СССР, 223, № 1, 1975.
3. *Акопян С. Ц., Жарков В. Н., Любимов В. М.* О поправках за динамический модуль сдвига для собственных частот Земли. Известия АН СССР, Физика Земли, № 10, 1976.
4. *Акопян С. Ц., Жарков В. Н., Любимов В. М.* Формулы для производных групповой скорости поверхностных волн по волновому числу и материальным параметрам Земли. Известия АН СССР, Физика Земли, № 3, 1977.
5. *Акопян С. Ц., Жарков В. Н., Любимов В. М.* Теория затухания крутильных колебаний Земли. Известия АН СССР, Физика Земли, № 8, 1977
6. *Дорофеев В. М., Жарков В. Н.* Об определении механической добротности мантии Земли. Известия АН СССР, Физика Земли, № 9, 1978.
7. *Жарков В. Н., Любимов В. М., Мовчан А. А., Мовчан А. И.* Таблицы производных для крутильных колебаний Земли. В кн.: «Земные приливы и внутреннее строение Земли». «Наука», М., 1967.
8. *Жарков В. Н., Любимов В. М., Мовчан А. А., Мовчан А. И.* Обертоны крутильных колебаний Земли. Известия АН СССР, Физика Земли, № 5, 1967.
9. *Жарков В. Н., Дорофеев Л. Н., Дорофеев В. М., Любимов В. М.* Пробные распределения диссипативной функции $Q(l)$ в оболочке Земли. Известия АН СССР, Физика Земли, № 12, 1974.
10. *Anderson D. L., Hart R. S.* Attenuation models of the Earth. Phys. Earth and Planet. Int., 16, 289—306, 1978.
11. *Sailor R. V., Dziewonski A. M.* Measurements ane interpretation of normal mode attenuation. Geophys. Jour. Roy. Astr. Soc., 53, p. 559, 1978.