

УДК 550.831

С. М. ОГАНЕСЯН

РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ ИТЕРАЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ

В статье приведены основные результаты по постановке и решению обратных задач гравиметрии и их применения при построении гравитационных моделей земной коры, разработанных в вычислительном центре ИГИС АН Арм. ССР.

1. Построение плотностных (гравитационных) моделей имеет важное значение при изучении строения земной коры и верхней мантии геофизическими методами. Плотностная модель строится по наблюдаемому гравитационному полю с учетом имеющихся геолого-геофизических данных. Основным способом построения плотностной модели служит метод математического моделирования.

Применение метода математического моделирования при интерпретации гравитационных аномалий опирается на теорию обратной задачи гравиметрии (ОЗГ).

Решение ОЗГ является исключительно сложной математической задачей, так как в общем случае она некорректно поставлена [21].

Основы теории некорректно поставленных задач и методов их приближенного решения разработаны А. Н. Тихоновым [21], М. М. Лаврентьевым [7] и В. К. Ивановым [3]. Важные результаты в области теории некорректных задач и практике их применения при решении ОЗГ принадлежат В. Б. Гласко, В. Н. Страхову [19], В. И. Старостенко [17] и другим авторам. Создание новых и совершенствование известных методов приближенного решения некорректно поставленных задач во многом определяет эффективность решения ОЗГ.

Математическая сложность задачи и необходимость переработки огромных массивов различной информации делают практически невозможным решение ОЗГ без использования современных ЭВМ.

2. В зависимости от степени геолого-геофизической изученности исследуемой территории в рамках метода математического моделирования возможны различные постановки ОЗГ:

- а) в классе конечномерных параметрических моделей [17];
- б) в классе распределения плотностей в некотором функциональном пространстве [4, 10, 20].

Постановка ОЗГ в классе конечномерных параметрических моделей заключается в следующем.

Пусть по имеющимся геолого-геофизическим данным возможно построение достаточно информативной исходной плотностной модели, с

помощью которой аппроксимируется геологическое строение исследуемой территории. Пусть исходная плотностная модель представлена совокупностью N тел достаточно простой геометрической формы. Координаты (параметры) j -ого элементарного тела в трехмерном евклидовом пространстве R_3 обозначим через $\xi_{1j}, \dots, \xi_{nj}, \eta_{1j}, \dots, \eta_{mj}, \zeta_{1j}, \dots, \zeta_{kj}, j = \overline{1, N}$. Гравитационное влияние модели на i -тую точку наблюдения (x_i, y_i, z_i) определяется выражением:

$$V_{zi} = \sum_{j=1}^N \zeta_j \psi_{ij}(x_i, y_i, z_i, \xi_{1j}, \xi_{nj}, \dots, \eta_{1j}, \dots, \eta_{mj}, \dots, \zeta_{1j}, \dots, \zeta_{kj}), \quad (1)$$

где параметр ζ_j — плотность j -го тела; ψ_{ij} — эффект j -ого тела единичной плотности в i -ой точке.

Обозначим через M общее количество точек наблюдения.

В зависимости от полноты сведений часть параметров закрепляется, а оставшиеся подлежат определению по наблюдаемому гравитационному полю.

$$V_{zi}, i = \overline{1, M}.$$

Необходимо подобрать такие значения незакрепленных параметров, чтобы имело место совпадение теоретического и наблюдаемого гравитационных полей, т. е.

$$\sum_{j=1}^N \zeta_j \psi_{ij}(x_i, y_i, z_i, \xi_{1j}, \dots, \xi_{nj}, \eta_{1j}, \dots, \eta_{mj}, \zeta_{1j}, \dots, \zeta_{kj}) = V_{zi}, i = \overline{1, M}. \quad (2)$$

Равенства (2) образуют систему уравнений относительно неизвестных параметров.

Таким образом в первой постановке незакрепленные параметры модели исследуемой территории определяются из решения системы (2).

В зависимости от определяемых параметров модели система (2) может быть линейной или нелинейной. Система (2) линейная, если определяются плотности элементарных тел. Во всех остальных случаях система (2) нелинейная.

Постановка ОЗГ в классе распределения плотностей в функциональном гильбертовом пространстве $L_2(S)$ сводится к следующему. Для простоты рассмотрим двумерный случай, что не ограничивает общности постановки задачи.

Пусть S — область двумерного евклидова пространства R_2 , точки которого определяются прямоугольными координатами (x, z) .

Гравитационное влияние масс, распределенных в области S с плотностью $\zeta(x, z)$, на точку наблюдения $(x_0, z_0) \in R_2$ определяется при помощи выражения [17].

$$V_{zT}(x_0, z_0) = 2\gamma \iint_S \frac{(z - z_0) \zeta(x, z)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} dx dz, \quad (3)$$

где γ — гравитационная постоянная.

Пусть по имеющимся геолого-геофизическим данным можно выделить область S , которой принадлежит носитель аномальных масс, и задано наблюдаемое поле V_{zH} на некотором множестве единственности $Q \subset R_2$. Требуется определить такое распределение масс $\zeta(x, z) \in L_2(S)$, чтобы для любой точки $(x_0, z_0) \in Q$ имело место равенство

$$2\gamma \iint_S \frac{(z - z_0)\zeta(x, z)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} dx dz = V_{zH}(x_0, z_0), \quad (4)$$

где V_{zH} принадлежит функциональному пространству $L_2(Q)$ [6].

Равенство (4) является линейным интегральным уравнением 1 рода относительно неизвестного распределения масс $\zeta(x, z)$.

3. Перейдем к исследованию математических сложностей решения уравнений (2) и (4).

В начале рассмотрим линейное уравнение (4). Пусть S — ограниченная область, множество единственности Q является некоторой линией, которая расположена над областью S . Линейный оператор $A[S, \zeta]$, левая часть равенства (4), действует из пространства $L_2(S)$ в пространство $L_2(Q)$.

Тогда справедлива

Теорема 1. Область значений линейного оператора A всюду плотна в функциональном пространстве $L_2(Q)$.

Доказательство теоремы 1 следует из факта положительной определенности оператора AA^* [10]. Оператор A^* , сопряженный с A , действует из $L_2(Q)$ в $L_2(S)$ и равен:

$$A^* \varphi = 2\gamma \int_Q \frac{(z - z_0) \varphi(x_0, z_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} dq, \quad \varphi(x_0, z_0) \in L_2(Q), \quad (x, z) \in S. \quad (5)$$

Из теоремы 1 следует, что уравнение (4) разрешено не при всех значениях правой части. Если при некотором $V_{zH} \in L_2(Q)$ уравнение (4) разрешено, то в силу леммы Новикова [9] оно имеет неединственное решение. Из теорем вложения Соболева [8, стр. 49] следует, что уравнение (4) неустойчиво к ошибкам задания V_{zH} . Следовательно, решение уравнения (4) является типично некорректной задачей [21].

Некоторые вопросы корректности и некорректности решения системы уравнений (2) рассмотрены в работе [15]. Там же указаны причины, по которым постановка ОЗГ, сформулированная в виде системы уравнений (2), является условно корректной.

4. Математическая трактовка ОЗГ в обеих постановках заключается в нахождении искомого неизвестного элемента x (незакрепленных параметров модели, распределение масс $\zeta(x, z)$ по заданному наблюдаемому гравитационному полю $b(V_{zH}, i = \overline{1, M}, V_{zH} \in L_2(Q))$. Связь между элементом x и наблюдаемой величиной b устанавливается при помощи оператора F решения прямой задачи гравиметрии.

Для удобства дальнейшего изложения равенства (2) и (4) запишем в виде операторного уравнения первого рода

$$Fx = b, \quad (6)$$

где F — оператор прямого отображения из H_1 в H_2 ; $x \in H_1$ — искомый элемент; $b \in H_2$ — заданная величина; H_1 и H_2 — некоторые гильбертовы пространства [7].

Одной из фундаментальных проблем ОЗГ является проблема их разрешимости. При интерпретации гравиметрических данных методом математического моделирования существование решения уравнения (6) при точной величине b можно считать априорно известным, так как аномальные гравитационные поля обусловлены реальными геологическими структурами. Однако при решении практических задач наблюдаемая величина b обычно задана с погрешностью δ (обусловленной инструментальными измерениями, геологическим «шумом» и иными причинами). При наличии помех в наблюдаемой величине b , в силу некорректности задач (2) и (4), уравнение (6) может быть неразрешимо, в случае его разрешимости бесконечно малой погрешности δ величины b может соответствовать большое изменение решения x . Поэтому для нахождения приближенных решений уравнений (2) и (4) необходимо применять специальные регуляризующие методы [21, 17, 19].

В работах [12, 18] приближенное решение x ОЗГ, т. е. уравнения (6), находится из параметрического уравнения

$$\|Fx - b\|^2 = \rho(x_0, \delta), \quad (7)$$

где $\|\cdot\|$ — норма в гильбертовом пространстве H_2 [6]; параметризованный элемент $x_0 \in H_1$; δ — погрешность задания b ; $\rho(x_0, \delta)$ — функционал, удовлетворяющий некоторым условиям [15].

Пусть $f(x) = \|Fx - b\|^2$ — выпуклый дифференцируемый функционал [7]. Рассмотрим следующий итерационный процесс

$$x_{n+1} = x_n - \beta_n (P(x_n) + \lambda_n B)^{-1} F'^*(x_n) (Fx_n - b), \quad (8)$$

где $P(x)$ — линейный самосопряженный неотрицательный оператор в H_1 [7]; B — линейный самосопряженный положительно определенный оператор в H_1 ; λ_n и $\beta_n > 0$ — параметры процесса; F' — производная Фреше оператора F [6].

В работах [12—15, 18] при различных предположениях относительно гильбертовых пространств H_1 и H_2 доказано, что если начальный элемент процесса (8) совпадает с элементом x_0 уравнения (7), $\lambda_n = 1$ и элемент x , удовлетворяющий уравнению (7), определять при помощи итерационного процесса (8), то процесс (8) является регуляризующим оператором по Тихонову [21].

Таким образом, задача приближенного решения уравнения (6) из условия (7) при помощи процесса (8) поставлена корректно.

В случае, когда уравнение (6) линейное, даны оценки скорости сходимости итерационного процесса (8) и установлена связь между одной реализацией процесса (8) и фундаментальным вариационным методом А. Н. Тихонова [11].

6. На основе обобщенного модифицированного метода Гаусса—Ньютона, который следует из итерационного процесса (8) при $\beta_n = 1$, $P(x_n) = F^*(x_n)$, B — соответствует оператору регуляризации второго порядка [21], построены вычислительные схемы и составлены программы для решения на ЭВМ «Минск—22» ОЗГ. Построенные алгоритмы удобны для изучения по гравиметрическим данным геологических объектов с вертикально-слоистым и горизонтально-слоистым строением.

Разработанные программы применены, совместно с отделом структурной геофизики ИГИС АН Арм. ССР, при интерпретации гравиметрических данных вдоль профилей Маркара—Пойлы и Кабахлу—Джанахмед для решения следующих задач [1, 2, 16]:

а) определение контактной поверхности между осадочным чехлом и кристаллическим фундаментом;

б) выявление вероятных плотностных горизонтальных границ в верхней части земной коры;

в) выделение вертикальных границ в земной коре.

Комплексный анализ полученных результатов позволяет уточнить местоположения и количественно охарактеризовать зоны глубинных разломов, выделенных по данным станций «Земля» и геологической съемки. Выделены системы блоков, прослеживаемые на различные глубины земной коры.

В работе [5] программа устойчивого определения положения нижней границы геологического объекта применялась для изучения природы Лохвицкого гравитационного максимума.

Полученные практические результаты свидетельствуют о больших возможностях устойчивых алгоритмов при изучении строения земной коры и верхней мантии гравиметрическим методом.

Ордена Трудового Красного
Знамени Институт геофизики
и инженерной сейсмологии
АН Армянской ССР

Поступила 25.V 1981.

И. С. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

ԳՐԱՎԻՄԵՏՐԻԱՅԻ ՀԱԿԱԴԱՐԶ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒՅՈՒՄԸ
ԻՏԵՐԱՑԻՈՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐՈՎ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Վ

Հոդվածում բերված են ՀՍՍՀ ԳԱ ԳԻՍԻ հաշվողական կենտրոնում մշակված գրավիմետրիայի հակադարձ խնդիրների դրվածքի և լուծման հիմնական

S. M. HOVHANNESIAN

THE SOLUTION OF GRAVIMETRIC INVERSE PROBLEMS BY ITERATIVE METHODS

Abstract

The main results of gravimetric inverse problems statement and solution worked out in the IGES Computing centre of the Armenian SSR Academy of Sciences and their use in the Earth crust gravimetric modelling are listed in the article.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бабаджанян А. Г., Оганесян С. М. Стрoение верхней части земной коры по профилю с. Кабахлу—с. Джанахмед по гравиметрическим данным. Известия АН Арм. ССР, Науки о Земле, № 4, 1979.
2. Бабаджанян А. Г., Оганесян С. М. Гравитационная модель верхней части земной коры по профилю Маркара—Пойлы. Известия АН Арм. ССР, Науки о Земле, № 6, 1980.
3. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. И. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. «Наука», М., 1978.
4. Кобрунов А. И. О методах оптимизации при решении обратной задачи гравиразведки. Известия АН СССР, Физика Земли, № 8, 1978.
5. Козленко В. Г., Шен Э. Л. Об истолковании гравитационного поля Днепровского грабена. В кн. «Гравитационная модель коры и верхней мантии Земли», «Наукова Думка», Киев, 1979.
6. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций функционального анализа. «Наука», М., 1976.
7. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1962.
8. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. «Высшая школа», М., 1977.
9. Новиков П. С. Об единственности решения обратной задачи потенциала. ДАН СССР, т. 18, № 3, 1938.
10. Оганесян С. М. Решение обратной задачи гравиметрии в классе $L_2(S)$ распределения плотностей. ДАН УССР, серия Б, № 6, 1981.
11. Оганесян С. М. Оценка скорости сходимости одного класса итерационных методов, применяемых при решении линейных некорректных задач геофизики. В кн. «Теория и методика интерпретации гравимагнитных полей». «Наукова Думка», Киев, 1981.
12. Оганесян С. М., Старостенко В. И. Итерационные методы решения некорректно поставленных задач. ДАН СССР, т. 234, № 2, 1977.
13. Оганесян С. М., Старостенко В. И. Регуляризирующий итерационный процесс, основанный на параметрическом функционале А. Н. Тихонова, ДАН СССР, т. 238, № 2, 1978.

14. Оганесян С. М., Старостенко В. И. Параметрический функционал А. Н. Тихонова и итерационные методы решения некорректных задач геофизики. Известия АН СССР, Физика Земли, № 1, 1978.
15. Оганесян С. М., Старостенко В. И. О корректности постановки задач геофизики, представленных в виде систем уравнений, и итерационных методах их решения. Известия АН СССР, Физика Земли, № 8, 1978.
16. Оганесян С. М., Бабаджанян А. Г., Манукян А. Г., Гелецян К. А. Устойчивые алгоритмы и их применение при интерпретации данных гравиметрии на территории Армянской ССР. В сб. «Тезисы докладов Республиканской научно-технической конференции молодых геофизиков, посвященной 60-летию установления Советской власти в Армении». Ереван, 1980.
17. Старостенко В. И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. «Наукова Думка», Киев, 1978.
18. Старостенко В. И., Оганесян С. М. Устойчивые операторные процессы и их применение в задачах геофизики. Известия АН СССР, Физика Земли, № 5, 1977.
19. Страхов В. Н. Теория приближенного решения линейных некорректных задач в гильбертовом пространстве и ее использование в разведочной геофизике. Известия АН СССР, Физика Земли, № 8, 1969.
20. Страхов В. Н. Об общих решениях обратных задач гравиметрии и магнитометрии. Известия Вузов, Геология и разведка, № 4, 1978.
21. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. «Наука», М., 1979.