Известия АН Армянской ССР, Науки о Земле, 2, 77—82, 1980

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 550.837

С. С. КАЗАРЯН

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ИСТОЧНИКОВ ПОСТОЯННОГО ТОКА В n-СЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

При изучении скважин в методе кажущегося сопротивления существуют много модификаций, которые отличаются друг от друга в основном различными расположениями источников тока. Как показала практика каротажных работ, на результаты интерпретации большое влияние оказывают зоны проникновения фильтрата бурового раствора. При этом часто для более точной интерпретации представляет интерес рассмотрение нескольких зон проникновения, которые имеют разные удельные электрические сопротивления. Поэтому возникает задача расчета электрического поля произвольных источников постоянного тока в n-слойной цилиндрической среде. Правда, эта модель прямой задачи явно недостаточна для количественной интерпретации, но она будет весьма полезной при построении основ теории разных модификаций метода кажущегося сопротивления.

Такая постановка прямой задачи представляет интерес также и для интерпретации результатов работ, проведенных методами постоянного тока в подземных выработках.

Предположим, что пространство разделено бесконечно длинными коаксиальными цилиндрическими поверхностями, имеющими радиусы $r_1, r_2, \cdots, r_{n-1}$, на n областей. Каждая область i характеризуется проводимостью σ_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

Выберем цилиндрическую систему координат с осью Z, совпадающей с осью системы цилиндров. Будем сначала считать, что все σ_i равны. Тогда потенциал электрического поля постоянного тока удовлетворяет следующему уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U_0}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U_0}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2}=-\frac{1}{\sigma}\gamma, \qquad (1)$$

где $\gamma(r, \varphi, z)$ $(r \leqslant r_1)$ плотность локально распределенных, произвольных источников тока.

Представим функции U_0 (r, φ, z) и $\gamma(r, \varphi, z)$ через преобразование Фурье по координате z:

$$U_0(r,\varphi,z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}u_0(\lambda,r,\varphi)\,e^{i\lambda z}d\lambda;\qquad -\gamma(r,\varphi,z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(\lambda,r,\varphi)\,e^{i\lambda z}d\lambda. \quad (2)$$

Мы из уравнения (1) получаем

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_0}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial\varphi^2}-\lambda^2 u_0=\frac{1}{\sigma}\psi. \quad (3)$$

Учитывая, что потенциал $U_0(r,\varphi,z)$ при $r\to\infty$ стремится к нулю, решение этого уравнения можно записать в виде

$$u_0(\lambda,r,\varphi)=-\frac{1}{2\pi\sigma}\iint\limits_{S_0}\psi(\lambda,r_0,\varphi_0)\,K_0\left(|\lambda|\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)}\right)ds, \quad (4)$$

где S_0 — область задания преобразования Фурье от плотности источников тока, а $K_0\left(|\lambda|\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)}\right)$ функция Макдональда.

Подставив (4) в (2), найдем выражение потенциала электрического поля произвольных источников постоянного тока в однородном пространстве в цилиндрической системе координат.

$$U_0(r,\varphi,z)=$$

$$=-\frac{1}{2\pi\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\iint\limits_{S_0}\psi(\lambda,r_0,\varphi_0)K_0\left(|\lambda|\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)}\right)ds\right]l^{i\lambda z}d\lambda. \quad (5)$$

Потенциал, обусловленный влиянием цилиндрических неоднородностей, разложим в ряд Фурье

$$U'(r,\varphi,z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\varphi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}U_m(\lambda,r)\,e^{i\lambda z}d\lambda. \quad (6)$$

Так как $U(r,\varphi,z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, то отсюда вытекает, что

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_m}{dr}\right)-(m^2+\lambda^2 r^2)\,u_m=0. \quad (7)$$

Введем вместо функции $u_m(\lambda,r)$ новую функцию

$$Y_m(r)=\frac{r}{u_m(\lambda,r)}u_m'(\lambda,r), \quad (8)$$

которая согласно (7) будет удовлетворять уравнению Риккати

$$Y_m'(r)+\frac{1}{r^2}Y_m^2(r)=\frac{m^2+\lambda^2r^2}{r}. \quad (9)$$

Такой способ решения впервые был предложен в работе [1].

Из уравнения (7) при $0<r<r_1$ следует, что

$$u_{1m}(\lambda, r) = u_{0m}(\lambda, r) + H_m I_m(|\lambda| r); \tag{10}$$

$I_m(|\lambda| r)$ — модифицированная функция Бесселя;
$U_{0m}(\lambda, r)$ — коэффициент ряда Фурье функции $u_0(\lambda, r, \varphi)$.
Допустим, что нам известно значение

$$Y_{1m}(r_1) = \frac{r_1}{u_{1m}(\lambda, r_1)} u'_{1m}(\lambda, r_1 - 0). \tag{11}$$

Тогда

$$H_m = \frac{r_1 u'_{0m}(\lambda, r_1 - 0) - u_{0m}(\lambda, r_1) Y_{1m}(r_1)}{I_m(|\lambda| r_1) Y_{1m}(r_1) - |\lambda| r_1 I'_m(|\lambda| r_1)} \tag{12}$$

и, следовательно,

$$u_{1m}(\lambda, r) = u_{0m}(\lambda, r) + \frac{r_1 u'_{0m}(\lambda, r_1 - 0) - u_{0m}(\lambda, r_1) Y_{1m}(r_1)}{I_m(|\lambda| r_1) Y_{1m}(r_1) - |\lambda| r_1 I'_m(|\lambda| r_1)} I_m(|\lambda| r). \tag{13}$$

Таким образом, для потенциала при $0<r<r_1$ получаем

$$U_1(r, \varphi, z) = -\frac{1}{2\pi\sigma_1} \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\iint_{s_0} \psi(\lambda_1, r_0, \varphi_0) \times$$

$$\times K_0\left(|\lambda| \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}\right) ds \Big] e^{i\lambda z} d\lambda +$$

$$+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r_1 u'_{0m}(\lambda, r_1 - 0)\, u_{0m}(\lambda, r_1) Y_{1m}(r_1)}{I_m(|\lambda| r_1) Y_{1m}(r_1) - |\lambda| r_1 I'_m(|\lambda| r_1)} I_m(|\lambda| r) e^{i\lambda z} d\lambda. \tag{14}$$

Если $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, то зная $Y_m(r)$, с помощью (8) легко определим

$$u_m(\lambda, r) = u_m(\lambda, r_1) \exp\left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} Y_m(r)\, dr \right) \tag{15}$$

и тем самым будет известно значение потенциала $U(r, \varphi, z)$ при $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$.

Пусть $r \geqslant r_{n-1}$, тогда из условия $U(r, \varphi, z) \to 0$ при $r \to \infty$ найдем

$$u_m(\lambda, r) = A_m K_m(|\lambda| r), \tag{16}$$

причем

$$A_m = \frac{u_m(\lambda, r_{n-1})}{K_m(|\lambda| r_{n-1})}.$$

Отсюда

$$u_m(\lambda, r) = u_m(\lambda, r_{n-1}) \frac{K_m(|\lambda| r)}{K_m(|\lambda| r_{n-1})}, \tag{17}$$

где $U_m(\lambda, r_{n-1})$ согласно (15) по индукции равна

$$u_m(\lambda, r_{n-1}) = u_m(\lambda, r_{n-2}) \exp\left(\int\limits_{r_{n-2}}^{r_{n-1}} \frac{1}{r} Y_m(r)\, dr \right). \tag{18}$$

Следовательно, все вычисление полей свелось к определению $Y_m(r)$, т. е. к решению уравнения Риккати. Чтобы решить это уравнение, определим начальные условия. Подставив (17) в (8), находим

$$Y_m(r_{n-1}+0) = \frac{|\lambda| r_{n-1} K'_m(|\lambda| r_{n-1})}{K_m(|\lambda| r_{n-1})}. \tag{19}$$

В нашем случае уравнение Риккати имеет следующее аналитическое решение:

$$Y_m(r) = |\lambda| r \frac{K'_m(|\lambda| r) + C_i(\lambda) I'_m(|\lambda| r)}{K_m(|\lambda| r) + C_i(\lambda) I_m(|\lambda| r)}, \tag{20}$$

если $r_{i-1} \leqslant r \leqslant r_i$. Из соотношения (20) для определения начальных условий легко находить рекуррентную формулу:

$$Y_m(r_{i-1}+0) = |\lambda| r_{i-1} \frac{K'_m(|\lambda| r_{i-1}) + C_i(\lambda) I'_m(|\lambda| r_{i-1})}{K_m(|\lambda| r_{i-1}) + C_i(|\lambda| r_{i-1})}, \tag{21}$$

где $C_i(\lambda)$ определяется через $Y_m(r_i - 0)$ по формуле:

$$C_i(\lambda) = \frac{|\lambda| r_i K'_m(|\lambda| r_i) - K_m(|\lambda| r_i) Y_m(r_i - 0)}{I_m(|\lambda| r_i) Y_m(r_i - 0) - |\lambda| r_i I'_m(|\lambda| r_i)}. \tag{22}$$

При этом из граничных условий потенциала, а также из формулы (8) следует, что

$$\sigma_i Y_m(r_i - 0) = \sigma_{i+1} Y_m(r_i + 0), \tag{23}$$

причем

$$Y_m(r_1 - 0) = Y_{1m}(r_1).$$

Аналогично решается задача, когда источники постоянного тока находятся в последнем слое. В этом случае из уравнения (7) при $r > r_{n-1}$ найдем:

$$u_m(\lambda, r) = u_{0m}(\lambda, r) + B_m K_m(|\lambda| r). \tag{24}$$

Допустим, что нам известно значение функции

$$Y_m(r_{n-1}+0) = \frac{r_{n-1}}{u_m(\lambda, r_{n-1})} u'_m(\lambda, r_{n-1}+0), \tag{25}$$

тогда

$$B_m = \frac{r_{n-1} u'_{0m}(\lambda, r_{n-1}+0) - u_{0m}(\lambda, r_{n-1}) Y_m(r_{n-1}+0)}{K_m(|\lambda| r_{n-1}) Y_m(r_{n-1}+0) - |\lambda| r_{n-1} K'_m(|\lambda| r_{n-1})} \tag{26}$$

и

$$u_m(\lambda, r) = u_{0m}(\lambda, r) +$$

$$+\frac{r_{n-1}u_{0m}'(\lambda, r_{n-1}+0)-u_{0m}(\lambda, r_{n-1})Y_m(r_{n-1}+0)}{K_m(|\lambda|r_{n-1})Y_m(r_{n-1}+0)-|\lambda|r_{n-1}K_m'(|\lambda|r_{n-1})}K_m(|\lambda|r). \quad (27)$$

Следовательно, потенциал в n-ом слое принимает следующий вид:

$$U(r, \varphi, z)=-\frac{1}{2\pi\sigma_n}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\iint_{S_0}\psi(\lambda, r_0, \varphi_0)\times$$

$$\times K_0(|\lambda|\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)})\,ds\Big]e^{i\lambda z}d\lambda+$$

$$+\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\varphi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r_{n-1}u_{0m}'(\lambda, r_{n-1}+0)-u_{0m}(\lambda, r_{n-1})Y_m(r_{n-1}+0)}{K_m(|\lambda|r_{n-1})Y_m(r_{n-1}+0)-|\lambda|r_{n-1}K_m'(|\lambda|r_{n-1})}\times$$

$$\times K_m(|\lambda|r)e^{i\lambda z}d\lambda. \quad (28)$$

Если $r_{n-2}\leqslant r\leqslant r_{n-1}$, то, зная $Y_m(r)$, с помощью (8) определим

$$u_m(\lambda, r)=u_m(\lambda, r_{n-1})\exp\left(-\int_r^{r_{n-1}}\frac{1}{r}Y_m(r)\,dr\right). \quad (29)$$

При $r<r_{n-1}$ имеем

$$u_m(\lambda, r)=D_mI_m(|\lambda|r), \quad (30)$$

где

$$D_m=\frac{u_m(\lambda, r_1)}{I_m(|\lambda|r_1)}.$$

$u_m(\lambda, r_1)$ согласно (29) по индукции равно

$$u_m(\lambda, r_1)=u_m(\lambda, r_2)\exp\left(-\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r}Y_m(r)\,dr\right). \quad (31)$$

Для нахождения $Y_m(r)$ получим начальные условия. Из (8) и (30) найдем:

$$Y_m(r_1-0)=\frac{|\lambda|r_1I_m'(|\lambda|r_1)}{I_m(|\lambda|r_1)}. \quad (32)$$

Используя аналитическое решение (20) уравнения Риккати, а также граничное условие (23), мы получаем следующую рекуррентную формулу:

$$Y_m(r_{i+1}-0)=|\lambda|r_{i+1}\frac{I_m'(|\lambda|r_{i+1})+P_i(\lambda)K_m'(|\lambda|r_{i+1})}{I_m(|\lambda|r_{i+1})+P_i(\lambda)K_m(|\lambda|r_{i+1})}, \quad (33)$$

причем $P_i(\lambda)$ имеет вид:

$$P_i(\lambda)=\frac{|\lambda|r_iI_m'(|\lambda|r_i)-I_m(|\lambda|r_i)Y_m(r_i+0)}{Y_m(r_i+0)K_m(|\lambda|r_i)-|\lambda|r_iK_m'(|\lambda|r_i)}. \quad (34)$$

Из этих рекуррентных формул мы можем находить все начальные условия, которые дают возможность определить потенциал в произвольной точке пространства.

Ордена Трудового Красного Знамени
Институт геофизики и инженерной сейсмологии
Академии наук Армянской ССР Поступила 30.VII.1979.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дмитриев В. И.* Осесимметричное электромагнитное поле в цилиндрической слоистой среде. Известия АН СССР, серия «Физика Земли», № 11, 1972.