

УДК 550.837.3

В. Б. ГАМОЯН

ХАРАКТЕР ПОЛЯ БЛУЖДАЮЩИХ ТОКОВ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕЛА СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Широкое применение электрических машин и установок в горно-рудной промышленности привело к расширению области распространения и повышению интенсивности блуждающих токов на разведываемых и эксплуатируемых месторождениях. В связи с этим разработка геофизического метода разведки на основе изучения поведения блуждающих токов приобретает важное значение [1].

Настоящая статья посвящена изучению характера распределения поля блуждающих токов при наличии тела сферической формы.

Блуждающие электрические токи на рудниках возникают от электрофицированных узкоколейных железных дорог, представляющих из себя «линейно-двухполюсные» источники [2]. Распределение потенциала поля от такого источника в однородной изотропной среде определяется формулой:

$$U = \frac{J_0 \rho_1 \Delta K}{4\pi} \left[\sum_{i=0}^m \frac{(1 - \Delta K)^i}{R_i} - \sum_{j=m}^{2m} \frac{(1 - \Delta K)^{2m-j}}{R_j} \right],$$

где ρ_1 — удельное электрическое сопротивление среды;

J_0 — ток, подаваемый на рельс;

$$\Delta K = \frac{\Delta R_p}{\Delta R_p + \Delta R_k};$$

ΔR_p — электрическое сопротивление элементарного отрезка рельса Δl ;

ΔR_k — сопротивление заземления отрезка рельса Δl ;

$$\Delta l = \frac{l}{m};$$

l — полурасстояние между «полюсами»¹ «линейно-двухполюсного» источника;

R_i (R_j) — расстояние точки определения потенциала от i (j) — того элементарного отрезка рельса.

¹ Отрицательным «полюсом» «линейно-двухполюсного» источника принята точка соединения отрицательного полюса источника постоянного тока к рельсу, положительным «полюсом» — местоположение контактного электровоза.

Предположим, что на расстоянии d от центра шара радиуса a , помещенного в безграничную однородную среду, находится «линейно-двух-полюсный» источник, питаемый током J_0 .

Удельное сопротивление материала шара обозначим через ρ_2 , а удельное сопротивление вмещающей среды — ρ_1 . Требуется найти распределение потенциала и напряженности поля вне и внутри шара.

На основании свойства суперпозиции потенциальных полей решение задачи сводится к рассмотрению распределения поля от одного из «полюсов».

Потенциал поля положительного «полюса» заданного источника в однородной среде определяется формулой:

$$U_0^{(+)} = \frac{J_0 \rho_1}{4\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1 - \Delta K)}{R i}.$$

Обозначим искомые потенциальные функции для внешней и внутренней областей шара соответственно через $U_e^{(+)}$ и $U_i^{(+)}$, которые выражаются формулами:

$$U_e^{(+)} = U_0^{(+)} + U_1,$$

$$U_i^{(+)} = U_0^{(+)} + U_2, \quad (1)$$

где U_1 и U_2 — те добавочные функции, которые определяют влияние шара.

Функции $U_e^{(+)}$, $U_i^{(+)}$ и $U_0^{(+)}$, а, следовательно, и U_1 и U_2 , как потенциальные функции, удовлетворяют уравнению Лапласа. Их можно искать из решения этого уравнения.

Примем сферическую систему координат r, θ, φ с начальной точкой в центре шара и полярной осью, выбранной по направлению тока от i -го элементарного отрезка рельса. В решаемой задаче имеются таких $2m$ направлений. Учитывая осевую симметрию действия шара, можно считать функции U_1 и U_2 независимыми от азимутального угла.

Следовательно, дифференциальное уравнение для рассматриваемого случая принимает следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) = 0,$$

общим решением которого является функция

$$U(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n B_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta). \quad (2)$$

Постоянные A_n и B_n , входящие в формулу (2), должны быть выбраны таким образом, чтобы удовлетворяли следующим условиям решаемой задачи:

1. Функции $U_1(r, \theta)$ и $U_2(r, \theta)$ должны быть всюду конечны;
2. Функция $U_1(r, \theta)$ при $r \rightarrow \infty$ должна обращаться в нуль при всех значениях угла θ ;
3. На границе шара выполняются требования:

$$U_1(a, b) = U_2(a, b),$$

$$\left(\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial U_1}{\partial r} \right)_{r=a} = \left(\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial U_2}{\partial r} \right)_{r=a}. \quad (3)$$

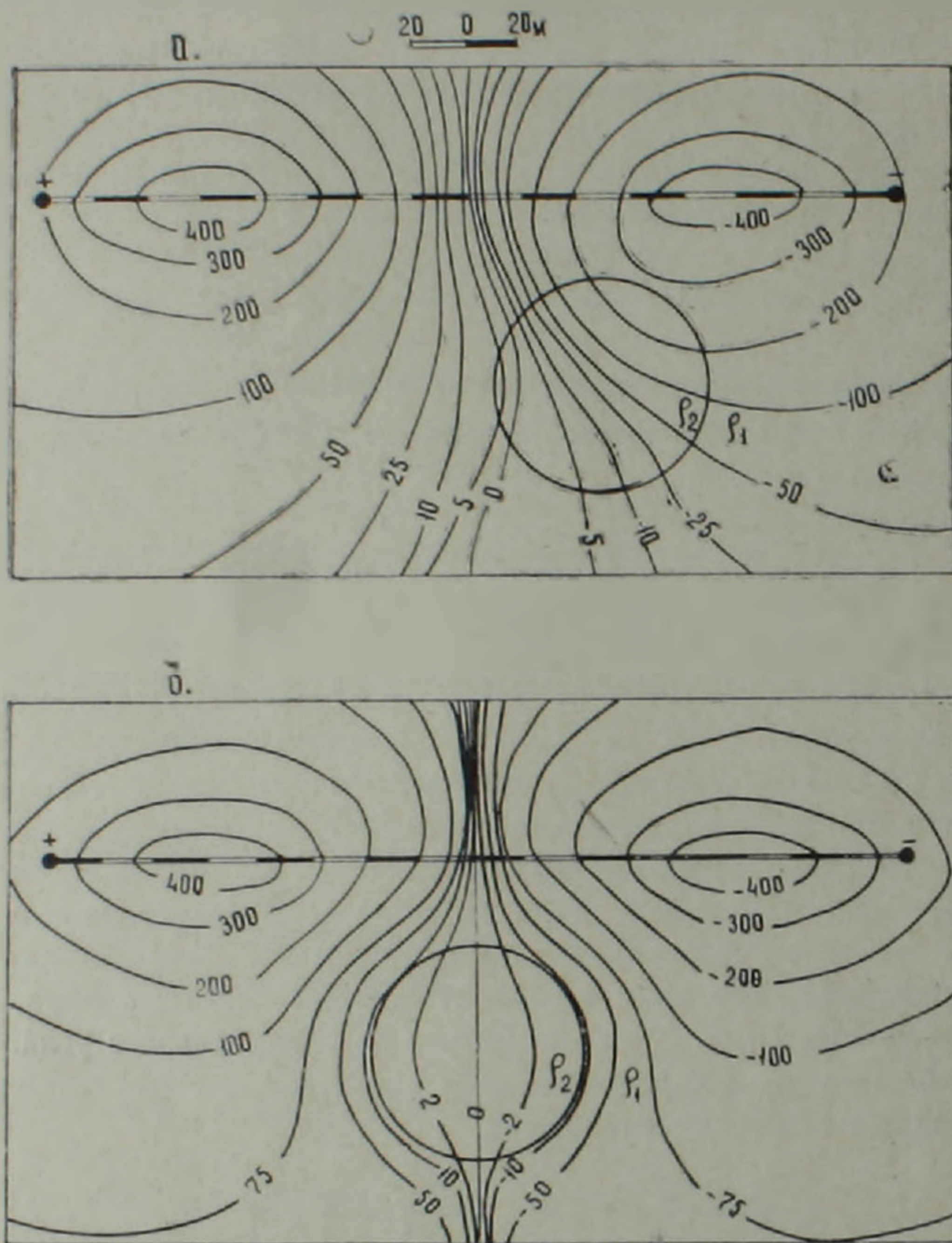


Рис. 1. Изопотенциальные карты поля «линейно-двухполюсного» источника при наличии хорошопроводящего—а и высокоомного—б тел сферической формы.

Для выполнения условий 1 и 2 необходимо, чтобы добавочные функции, определяющие действие шара на распределении потенциала поля положительного «полюса» источника имели вид:

$$U_1 = \sum_{l=0}^m \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta),$$

$$U_2 = \sum_{l=0}^m \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta). \quad (4)$$

Обозначая координаты точки определения потенциала через r, θ , а координаты Δl элементарного отрезка источника через $r=di$ и $\theta=0$ (рис. 2б), получим:

$$Ri = \sqrt{di^2 + r^2 - 2rdi\cos\theta i}.$$

По условию задачи «линейно-двухполюсный» источник находится вне шара, поэтому для внутренних точек можно написать:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{di} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{di}\right)^n P_n(\cos\theta i).$$

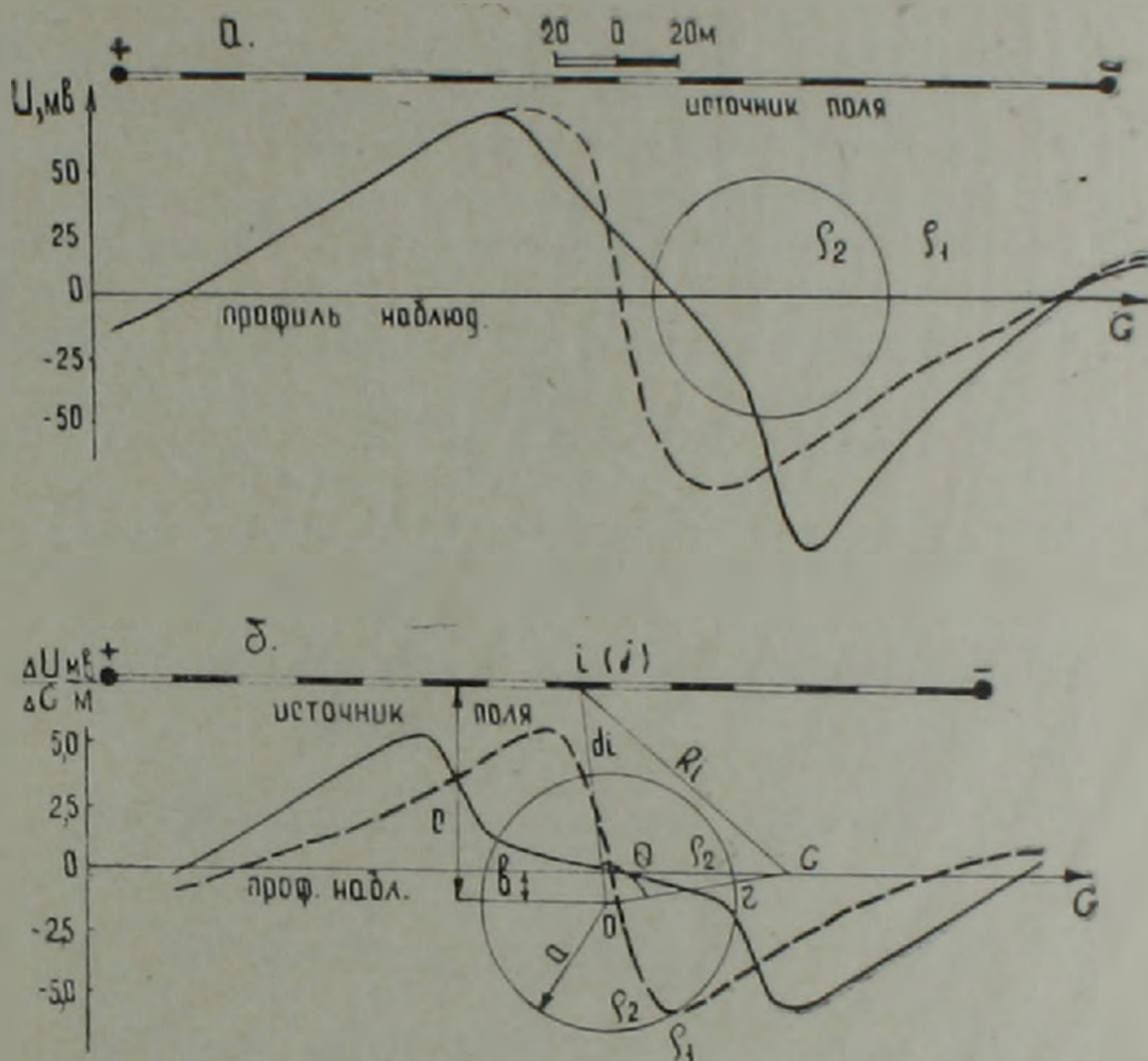


Рис. 2. Кривые градиента потенциала поля «линейно-двухполюсного» источника при наличии хорошопроводящего—а и высокоомного—б тел сферической формы.

Учитывая условия (1), (3) и (4) для функции $U_e^{(+)}$ и $U_i^{(+)}$, запишем формулы:

$$U_e^{(+)} = q \sum_{i=0}^m (1 - \Delta K)^i \frac{1}{di} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{di}\right)^n P_n(\cos\theta i) + \\ + \sum_{i=0}^m \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta i), \quad (5)$$

$$U_i^{(+)} = q \sum_{i=0}^m (1 - \Delta K)^i \frac{1}{di} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{di}\right)^n P_n(\cos\theta i) +$$

$$+ \sum_{l=0}^m \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta_l), \quad (6)$$

где $q = \frac{J_0 \rho_1 \Delta K}{4\pi}$.

Так как равенства (3) должны быть справедливыми при всех значениях θ , то коэффициенты у полиномов Лежандра одинаковых порядков в формулах (5) и (6) равны. С другой стороны, эти равенства должны быть справедливыми для всех элементарных источников поля. Следовательно, составляя равенства для условия 3, можно найти:

$$\begin{aligned} B_n a^{-(n+1)} &= A_n a^n, \\ \frac{q}{\rho_1} (1 - \Delta K)^l \frac{n a^{n-1}}{d i^{n+1}} - \frac{n+1}{\rho_1} B_n a^{-(n+2)} &= \\ &= \frac{q}{\rho_2} (1 - \Delta K)^l \frac{n \cdot a^{n-1}}{d^{n+1}} + \frac{n}{\rho_2} A_n a^{n-1}. \end{aligned}$$

Решая эту систему относительно неизвестных A_n и B_n , получим:

$$\begin{aligned} A_n &= q (1 - \Delta K)^l \frac{(\rho_1 - \rho_2)n}{n \cdot \rho_1 + (n+2)\rho_2} \cdot \frac{1}{d i^{n+1}}, \\ B_n &= q (1 - \Delta K)^l \frac{(\rho_1 - \rho_2)n}{n \cdot \rho_1 + (n+1)\rho_2} \cdot \frac{a^{2n+1}}{d i^{n+1}}. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения A_n и B_n в выражения (5) и (6) для потенциальных функций $U_e^{(+)}$ и $U_i^{(+)}$, получим:

$$U_e^{(+)} = q \sum_{l=0}^m (1 - \Delta K)^l \left[\frac{1}{R_l} + \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \frac{a^{2n+1}}{d_l^{n+1} r^{n+1}} P_n(\cos \theta_l) \right], \quad (7)$$

$$U_i^{(+)} = q \sum_{l=0}^m (1 - \Delta K)^l \left[\frac{1}{R_l} + \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \frac{r^n}{d_l^{n+1}} P_n(\cos \theta_l) \right], \quad (8)$$

где $\rho_n = \frac{n(\rho_1 - \rho_2)}{n\rho_1 + (n+1)\rho_2}$.

Аналогично формулам (7) и (8) напишем выражения, определяющие потенциалы поля отрицательного «полюса» заданного источника вне ($U_e^{(-)}$) и внутри ($U_i^{(-)}$) шара:

$$U_e^{(-)} = -q \sum_{l=m}^{2m} (1 - \Delta K)^{2m-l} \left[\frac{1}{R_l} + \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \frac{a^{2n+1}}{d_l^{n+1} r^{n+1}} P_n(\cos \theta_l) \right],$$

$$U_i^{(-)} = -q \sum_{l=m}^{2m} (1 - \Delta K)^{2m-l} \left[\frac{1}{R_l} + \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \frac{r^n}{d_l^{n+1}} P_n(\cos \theta_l) \right].$$

На основании свойства суперпозиции потенциальных полей представим формулы, определяющие распределения потенциала общего поля вне и внутри шара:

$$U_e = q \left\{ \sum_{i=0}^m (1 - \Delta K)^i \left[\frac{1}{R_i} + \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \frac{a^{2n+1}}{d_i^{n+1} r^{n+1}} P_n(\cos \theta_i) \right] - \sum_{j=m}^{2m} (1 - \Delta K)^{2m-j} \left[\frac{1}{R_j} + \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \frac{a^{2n+1}}{d_j^{n+1} r^{n+1}} P_n(\cos \theta_j) \right] \right\}, \quad (9)$$

$$U_i = q \left\{ \sum_{i=0}^m (1 - \Delta K)^i \left[\frac{1}{R_i} + \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \frac{r^n}{d_i^{n+1}} P_n(\cos \theta_i) \right] - \sum_{j=m}^{2m} (1 - \Delta K)^{2m-j} \left[\frac{1}{R_j} + \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \frac{r^n}{d_j^{n+1}} P_n(\cos \theta_j) \right] \right\}. \quad (10)$$

Эти формулы можно применять при интерпретации аномалий, полученных трехэлектродными, потенциальной и градиентной установками.

При работе четырехэлектродными установками изучаемым параметром служит нормированный градиент потенциала. Ввиду этого получены выражения (11) и (12), определяющие напряженность поля по профилям наблюдений—G:

$$E_e = \frac{\partial U_e}{\partial G} = q \left\{ \sum_{i=0}^m (1 - \Delta K)^i \left[\frac{1}{R_i^2} \frac{\partial R_i}{\partial G} + \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \frac{a^{2n+1}}{d_i^{n+1}} \times \right. \right. \\ \times \left(\frac{n+1}{r^{n+2}} \frac{\partial r}{\partial G} P_n(\cos \theta_i) - \frac{1}{r^{n+1}} \frac{\partial P_n(\cos \theta_i)}{\partial \cos \theta_i} \cdot \frac{\partial \cos \theta_i}{\partial G} \right) \left. \right] - \\ - \sum_{j=m}^{2m} (1 - \Delta K)^{2m-j} \left[\frac{1}{R_j^2} \frac{\partial R_j}{\partial G} + \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \frac{a^{2n+1}}{d_j^{n+1}} \left(\frac{n+1}{r^{n+2}} \frac{\partial r}{\partial G} \times \right. \right. \\ \times P_n(\cos \theta_j) - \frac{1}{r^{n+1}} \frac{\partial P_n(\cos \theta_j)}{\partial \cos \theta_j} \cdot \frac{\partial \cos \theta_j}{\partial G} \right) \left. \right] \right\}, \quad (11)$$

$$E_i = \frac{\partial U_i}{\partial G} = q \left\{ \sum_{i=0}^m (1 - \Delta K)^i \left[\frac{1}{R_i^2} \frac{\partial R_i}{\partial G} + \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \frac{1}{d_i^{n+1}} \times \right. \right. \\ \times \left(nr^{n-1} \frac{\partial r}{\partial G} P_n(\cos \theta_i) - r^n \times \frac{\partial P_n(\cos \theta_i)}{\partial \cos \theta_i} \cdot \frac{\partial \cos \theta_i}{\partial G} \right) \left. \right] - \\ - \sum_{j=m}^{2m} (1 - \Delta K)^{2m-j} \left[\frac{1}{R_j^2} \frac{\partial R_j}{\partial G} + \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \frac{1}{d_j^{n+1}} \left(nr^{n-1} \frac{\partial R}{\partial G} P_n(\cos \theta_j) - r^n \times \right. \right. \\ \times \frac{\partial P_n(\cos \theta_j)}{\partial \cos \theta_j} \cdot \frac{\partial \cos \theta_j}{\partial G} \right) \left. \right] \right\}, \quad (12)$$

где

$$r = \sqrt{b^2 + G^2}; \quad R_i = \sqrt{(c-b)^2 + (G+m-i)^2};$$

$$R_j = \sqrt{(c-b)^2 + (G-m+j)^2}.$$

Для более наглядного представления характера распределения поля блуждающих токов, на ЭВМ «Минск-22» вычислены и построены изопотенциальные карты (рис. 1) и кривые напряженности поля (рис. 2), при $\rho_1/\rho_2 = 10^2$ и 10^{-2} , $a = 40$ м, $l = 200$ м, $d_0 = 60$ м, $J_0 = 100a$.

В случае высокой проводимости сферического тела (рис. 1а) изопотенциальные линии сгущаются внутри него, а при высокоомном теле (рис. 1б) — разряжаются. В соответствии с этим значения кривой напряженности поля (сплошная линия на рис. 2а) в районе хорошо проводящего тела превосходят значения нормального поля (пунктирная линия). При высокоомном теле (рис. 2б) наблюдается обратное соотношение. Исходя из полученных результатов, можно сделать заключение, что метод блуждающих токов применим для выявления и изучения тел сферической формы.

Ордена Трудового Красного Знамени
Институт геофизики и инженерной
сейсмологии Академии наук Армянской ССР

Поступила 15.VI.1979.

Վ. Բ. ԿԱՄՈՅԱՆ

ԹԱՓԱԽՈՂ ՀՈՍԱՆՔՆԵՐԻ ԿԱՇՏԻ ԲՆՈՒՅԹԸ ԿՆԴԱԶՆՎ ՄԱՐՈՄՆԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Հոդվածը նվիրված է էլեկտրահետախուզության թափառող հոսանքների մեթոդի հնարավորությունների ընդլայնմանը:

Տեսական ուսումնասիրությունների միջոցով ստացված են գնդաձև մարմնի առկայության դեպքում ուսումնասիրվող դաշտի բնույթը սրտահայտող բանաձևեր: Ներկայացված են դաշտի իզոպոտենցիալ քարտեզներ և պոտենցիալի գրադիենտի կորեր տարբեր դիմադրություն ունեցող գնդաձև մարմինների առկայության դեպքում:

Ի հայտ են բերված մեթոդի կիրառման հնարավորությունները:

V. B. GAMOYAN

THE STRAY CURRENTS FIELD CHARACTER IN THE PRESENCE OF A SPHERICAL BODY

Abstract

The article is dedicated to the possible expansion of the stray currents electroprospecting method.

Mathematical formulas are obtained by theoretical analyses which determine the character of the studied field in the presence of a spherical body. Isopotential maps and curves of isopotential gradients are represented for the cases of spherical bodies with different resistance magnitudes. Possibilities of the use of the method are revealed.

ЛИТЕРАТУРА

1. Березин Г. И., Семенов М. В. Об использовании полей блуждающих токов для электроразведки флангов разрабатываемых месторождений. В сб. «Методика и техника разведки», № 86, Л., 1973.
2. Гамоян В. Б., Лулечян Е. М. Характер поля блуждающих токов от «линейно-двух-полюсного» источника. Известия АН Арм. ССР, Науки о Земле, № 2, 1978.