Известия АН Армянской ССР, Науки о Земле, 2, 55—62, 1972

УДК 550.3

Д. С. ГРИГОРЯН, А. М. ПОЛОНСКИЙ

О ВЫЧИСЛЕНИИ МАГНИТНОГО МОМЕНТА ПО АНОМАЛИИ ΔZ, НАБЛЮДЕННОЙ НА НЕГОРИЗОНТАЛЬНОМ РЕЛЬЕФЕ

Вычисление магнитного момента месторождения представляет теоретический и практический интерес, в связи с задачей оценки запасов железорудного месторождения по данным съемки аномалии ΔZ.

Запасы руды P связаны с величиной магнитного момента M возмущающей массы объема V уравнением [2]:

$$P = \frac{M}{J_э} \cdot d, \tag{1}$$

где $J_э$ —средняя эффективная интенсивность намагничения,

d—средний объемный вес руды.

Все известные способы вычисления магнитных моментов исходят из предположения о том, что поверхность наблюдений плоская и горизонтальная [1, 2, 4].

В настоящей работе впервые рассматривается вопрос о вычислении магнитного момента по аномалии ΔZ, наблюденной на негоризонтальном рельефе.

Рассмотрим произвольную неограниченную поверхность наблюдений S, ниже которой расположена возмущающая масса. Формула Гаусса дает:

$$m = -\frac{1}{2\pi f}\iint\limits_S \frac{dU}{dn}\,ds, \tag{2}$$

где $\frac{dU}{dn}$ — нормальная производная гравитационного потенциала U,

m — гравитационная масса,

f — гравитационная постоянная.

Направление нормали n взято внешнее.

В системе прямоугольных координат x, y, z с осью OZ, направленной вертикально вниз и с началом координат в произвольной фиксированной точке, уравнение (2) запишется в виде:

$$m = -\frac{1}{2\pi f}\iint\limits_S \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dn}\,ds - \frac{1}{2\pi f}\iint\limits_S \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dn}\,ds - \frac{1}{2\pi f}\iint\limits_S \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dn}\,ds \tag{3}$$

Сведя интегрирование по поверхности S к интегрированию по проекциям S_{xoy}, S_{yoz}, S_{xoz} поверхности S на координатные плоскости XOY, YOZ, XOZ, получим:

$$m = -\frac{1}{2\pi f}\iint\limits_{S_{yoz}} \frac{\partial U}{\partial x}\, dydz - \frac{1}{2\pi f}\iint\limits_{S_{xoz}} \frac{\partial U}{\partial y}\, dxdz + \frac{1}{2\pi f}\iint\limits_{S_{xoy}} \frac{\partial U}{\partial z}\, dxdy. \qquad (4)$$

Рассмотрим гармоническую функцию $\frac{\partial U}{\partial z}$, входящую под знак третьего интеграла в равенстве (4). Согласно основной теории гармонических функций, функцию $\frac{\partial U}{\partial z}$ вне возмущающих масс, над поверхностью S можно представить в виде суммы потенциалов простого и двойного слоев, распределенных на поверхности S [6]:

$$\frac{\partial U}{dz}(x,\ y,\ z) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S} \frac{\partial U}{\partial z}\, \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\, ds - \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S} \frac{1}{r}\, \frac{d\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)}{dn}\, ds, \qquad (5)$$

где $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$,
где ξ, η, ζ — координаты точек поверхности S.

Когда точка $(x,\ y,\ z)$ совпадает с какой-либо точкой $(\bar{\xi},\ \bar{\eta},\ \bar{\zeta})$ поверхности S, формула (5) переходит в следующую:

$$\frac{\partial U}{\partial z}(\bar{\xi},\ \bar{\eta},\ \bar{\zeta}) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S} \frac{\partial U}{\partial z}\, \frac{d\left(\frac{1}{r_s}\right)}{dn}\, ds - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S} \frac{1}{r_s}\, \frac{d\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)}{dn}\, ds, \qquad (6)$$

где $r_s = \sqrt{(\xi - \bar{\xi})^2 + (\eta - \bar{\eta})^2 + (\zeta - \bar{\zeta})^2}$.

Если поверхность S задана в виде уравнения $\zeta = f(\xi,\ \eta)$, то равенство (6) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial z}(\bar{\xi},\ \bar{\eta},\ \bar{\zeta}) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_{xoy}} \frac{\partial U}{\partial z}\, \frac{(\xi - \bar{\xi})\, p + (\eta - \bar{\eta})\, q - (\zeta - \bar{\zeta})}{r_s^3}\, d\xi d\eta -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_{yoz}} \frac{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)}{\partial x} \cdot \frac{1}{r_s}\, d\eta d\zeta - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_{xoz}} \frac{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)}{\partial y} \cdot \frac{1}{r_s}\, d\xi d\zeta +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_{xoy}} \frac{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)}{\partial z} \cdot \frac{1}{r_s}\, d\xi d\eta, \qquad (7)$$

где $p = \frac{\partial f}{\partial \xi}$,

$q = \frac{\partial f}{\partial \eta}$.

Если намагничение вертикальное и однородное, то составляющие магнитного поля H_x, H_y, ΔZ связаны с производными гравитационного потенциала уравнениями [5]:

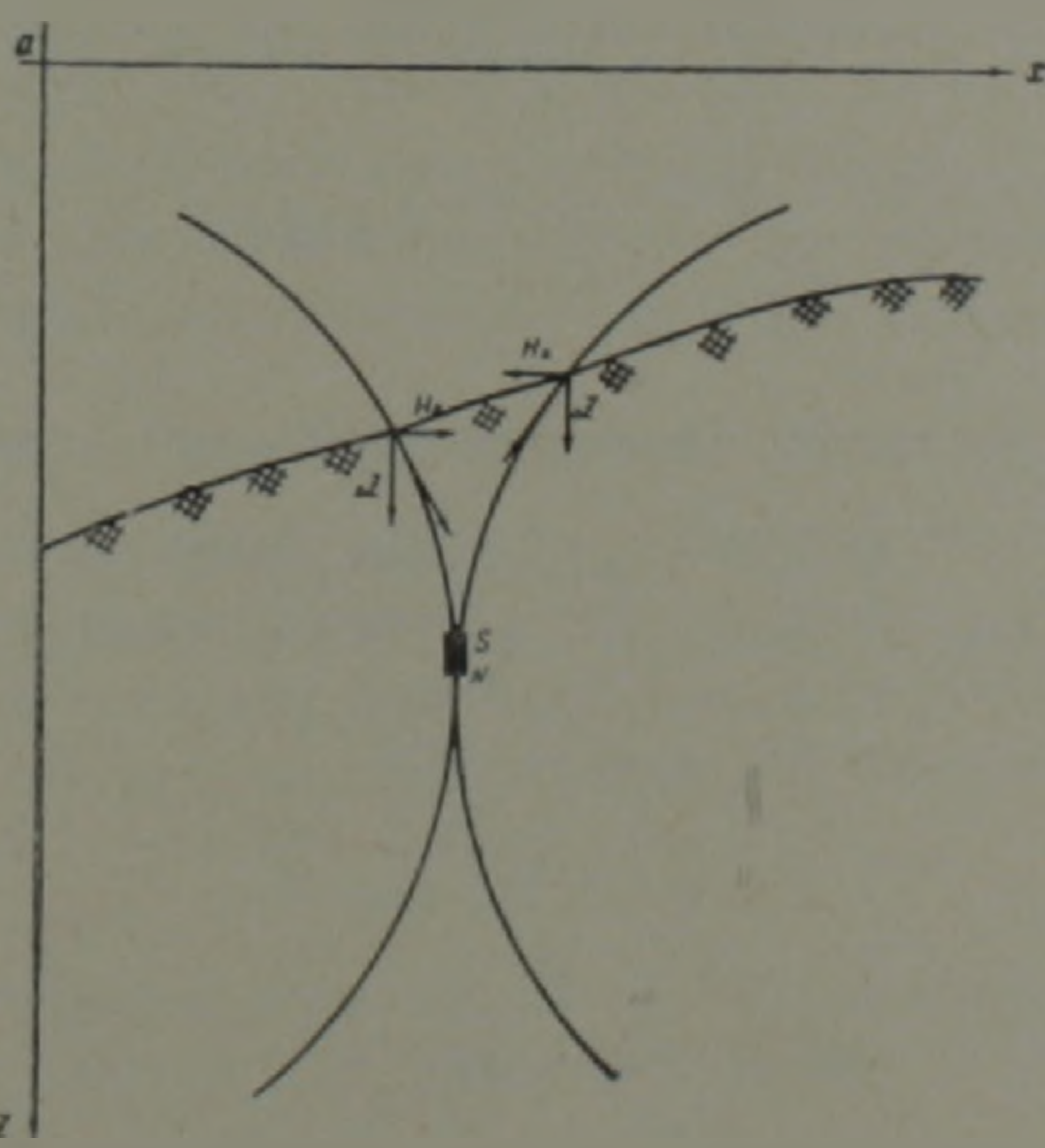
$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)}{\partial z} &= \frac{f\cdot\sigma}{I}\cdot\Delta Z, \\ \frac{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)}{\partial x} &= \frac{f\cdot\sigma}{I}\cdot H_x, \\ \frac{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)}{\partial y} &= \frac{f\cdot\sigma}{I}\cdot H_y; \end{aligned}\right. \tag{8}$$

где σ и I — плотность и намагниченность возмущающей массы m. На основании (8) перепишем (7) в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial z}(\bar{\xi},\ \bar{\eta},\ \bar{\zeta}) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_{xoy}} \frac{\partial U}{\partial z}\,\frac{(\xi-\bar{\xi})\,p + (\eta-\bar{\eta})\,q - (\zeta-\bar{\zeta})}{r_s^3}\,d\xi d\eta -$$

$$-\frac{\mu}{2\pi}\iint\limits_{S_{yoz}} \frac{H_x}{r_s}\,d\eta d\zeta - \frac{\mu}{2\pi}\iint\limits_{S_{xoz}} \frac{H_y}{r_s}\,d\xi d\zeta + \frac{\mu}{2\pi}\iint\limits_{S_{xoy}} \frac{\Delta Z}{r_s}\,d\xi d\eta. \tag{9}$$

Горизонтальные составляющие H_x и H_y векторов напряженности аномального магнитного поля направлены из всех точек наблюдений в сторону возмущающей магнитной массы. Поэтому происходит значительная компенсация величин H_x и H_y соответственно во втором и третьем интегралах равенства (9). Фиг. 1 поясняет это для составляющей H_x



Фиг. 1. Схема магнитного поля от элементарной магнитной массы в плоскости XOZ.

от действия элементарной магнитной массы. Учитывая сказанное, равенство (9) заменим приближенным:

$$\frac{\partial U}{\partial z}(\bar{\xi},\ \bar{\eta},\ \bar{\zeta})=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_{xoy}}\frac{\partial U}{\partial z}\,\frac{(\xi-\bar{\xi})\,p+(\eta-\bar{\eta})\,q-(\zeta-\bar{\zeta})}{r_s^3}\,d\xi d\eta\,+$$

$$+\frac{\mu}{2\pi}\iint\limits_{S_{xoy}}\frac{\Delta Z}{r_s}\,d\xi d\eta. \tag{10}$$

Ограничивая область интегрирования S_{xoy} и беря конечное число точек наблюдений, получим интегральное уравнение для функции $\frac{\partial U}{\partial z}$:

$$\frac{\partial U}{\partial z}(\bar{\xi},\ \bar{\eta},\ \bar{\zeta})=\frac{1}{2\pi}\sum_i\sum_j\iint\limits_{\Delta\sigma_{i,\,j}}\frac{\partial U}{\partial z}(\xi,\ \eta,\ \zeta)\,\frac{(\xi-\bar{\xi})\,p+(\eta-\bar{\eta})q-(\zeta-\bar{\zeta})}{r_s^3}\,d\xi d\eta\,+$$

$$+\frac{\mu}{2\pi}\iint\limits_{\sigma}\frac{\Delta Z}{r_s}\,d\xi d\eta, \tag{11}$$

где $\Delta\sigma_{i,\,j}$ — элементарные прямоугольные площадки с размерами $\Delta\xi\cdot\Delta\eta$, на которое разбивается выбранная достаточно большая часть σ проекции S_{xoy}.

Заменяя средние значения аномалии $\frac{\partial U}{\partial z}$ на каждой элементарной площадке $\Delta\sigma_{i,\,j}$ значениями аномалии $\frac{\partial U}{\partial z}$ в центрах этих площадок, получим:

$$\frac{\partial U}{\partial z}(\bar{\xi},\ \bar{\eta},\ \bar{\zeta})=\frac{1}{2\pi}\sum_i\sum_j\frac{\partial U}{\partial z}(\xi_i,\ \eta_j;\ \zeta_{ij})\,\times$$

$$\times\iint\limits_{\Delta\sigma_{i,\,j}}\frac{(\xi-\bar{\xi})\,p+(\eta-\bar{\eta})\,q-(\zeta-\bar{\zeta})}{r_s^3}\,d\xi d\eta+\frac{\mu}{2\pi}\iint\limits_{\sigma}\frac{\Delta Z}{r_s}\,d\xi d\eta. \tag{12}$$

Величины интегралов, входящих под знак двойной суммы, представляют собой телесные углы, под которыми из точки $(\bar{\xi},\ \bar{\eta},\ \bar{\zeta})$ видны площадки $\Delta S_{i,\,j}$ поверхности S, проекции которых на координатную плоскость XOY есть $\Delta\sigma_{i,\,j}$. Это следует из того, что величина телесного угла определяется интегралом:

$$\iint\frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds.$$

Уравнение (12) запишем в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial z}(\bar{\xi},\ \bar{\eta},\ \bar{\zeta})=\sum_i\sum_j\Delta\omega_{i,\,j}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}(\xi_i,\ \eta_j;\ \zeta_{i,\,j})+\frac{\mu}{2\pi}\iint\limits_{\sigma}\frac{\Delta Z}{r_s} \tag{13}$$

где $\Delta\omega_{i,\,j}$ — отношения телесных углов, под которыми видны площадки $\Delta S_{i,\,j}$, к углу 2π.

Уравнение (13) можно записать для каждой точки $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$, а суммирование в правой части проводить по точкам, окружающим точку $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$. Совокупность всех таких уравнений дает систему уравнений с числом неизвестных значений $\frac{\partial U}{\partial z}(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$, равным числу уравнений.

Эту систему можно представить в виде:

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_1 = \alpha_{12}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_2 + \alpha_{13}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_3 + \cdots + \alpha_{1n}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_n + \beta_1, \\ \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_2 = \alpha_{21}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_1 + \alpha_{23}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_3 + \cdots + \alpha_{2n}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_n + \beta_2, \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_n = \alpha_{n1}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_1 + \alpha_{n2}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_2 + \cdots + \alpha_{n,\,n-1}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{n-1} + \beta_n; \end{array}\right. \tag{14}$$

где n — число соответствующим образом перенумерованных точек наблюдений,

$\alpha_{l,\,k}$ — соответственно перенумерованные величины $\Delta\omega_{l,\,j}$;

$(l,\ k = 1,\ 2, \cdots n)$, β_l — значения интегралов $\frac{\mu}{2\pi}\iint\limits_{\sigma}\frac{\Delta Z}{r_s}\,d\xi d\eta$.

Можно показать, что система (14) решается методом итерации и процесс итерации быстро сходится, [7]. Заметим, что систему (14) достаточно решить при $\mu = 1$, так как коэффициент μ в дальнейшем будет, как увидим, исключен.

Вернемся к рассмотрению равенства (4). Первый и второй интегралы в равенстве (4) близки к нулю, вследствие значительной компенсации величин, входящих соответственно под знаки первого и второго интегралов. Фиг. 2 поясняет сказанное для величин $\frac{\partial U}{\partial x}$, возникающих от действия элементарной гравитационной массы.

Учитывая это, точное равенство (4) заменим приближенным:

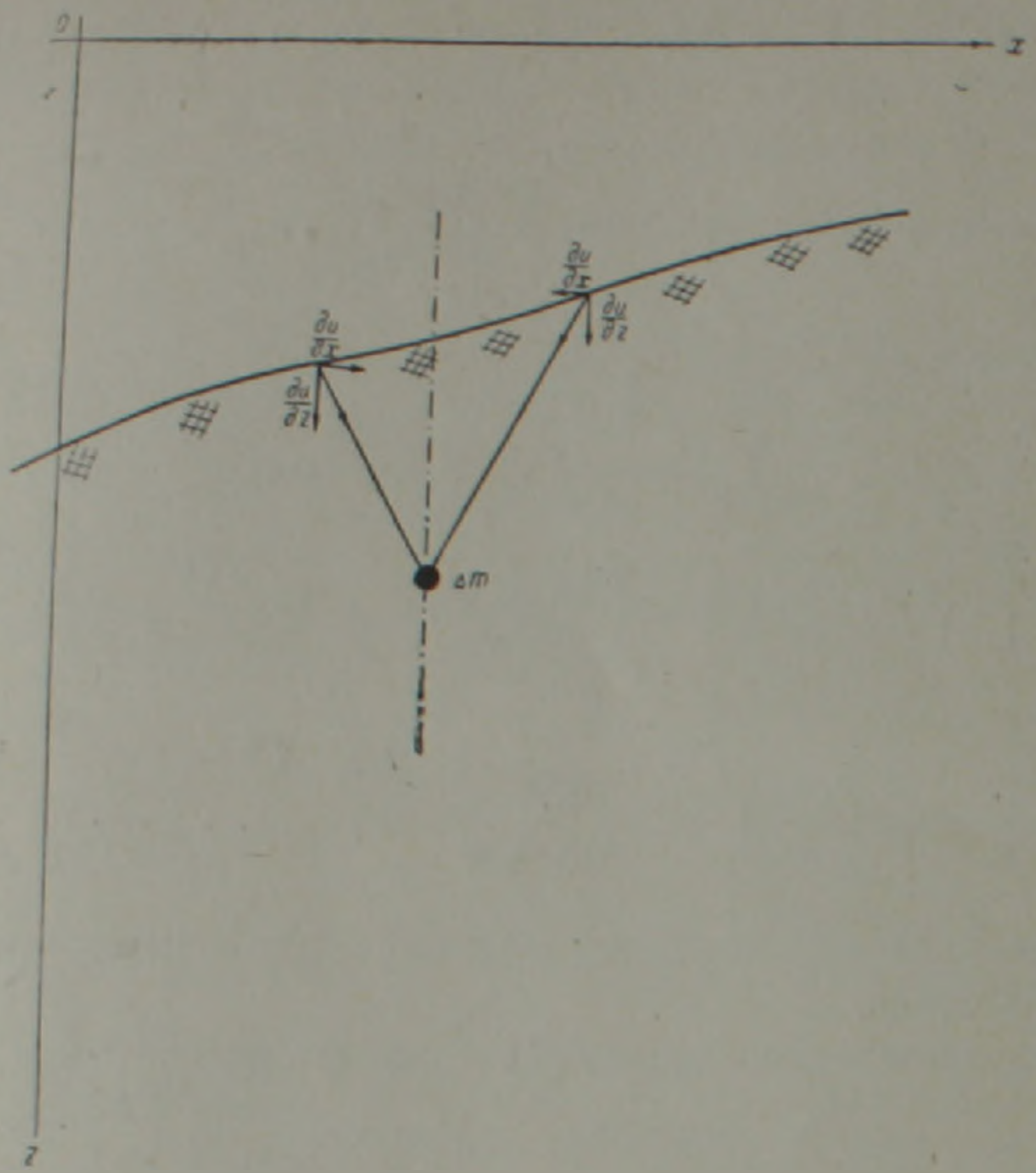
$$m = \frac{1}{2\pi f}\iint\limits_{S_{xoy'}}\frac{\partial U}{\partial z}\,dxdy. \tag{15}$$

Величины магнитного момента M, гравитационной массы m, намагниченность I и плотность σ связаны равенством:

$$M = \frac{I}{\sigma}\cdot m, \tag{16}$$

следующим из того, что $m = \sigma\cdot V$ и $M = I\cdot V$.

Сопоставляя (15) и (16) видим, что:



Фиг. 2. Схема гравитационного поля от элементарной массы Δm в плоскости XOZ.

$$M = \frac{1}{2\pi f\sigma} \iint\limits_{S_{xoy}} \frac{\partial U}{\partial z}\, dxdy. \tag{17}$$

$\frac{\partial U}{\partial z}$ — есть решение системы (14).

Это решение можно записать в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z}, \tag{18}$$

где $\frac{\partial \overline{U}}{\partial z}$ — решение системы (14) при $\frac{\mu}{2\pi} = 1$.

Подставляя $\frac{\partial U}{\partial z}$ из (18) в (17), получим:

$$M = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{S_{xoy}} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z}\, dxdy. \tag{19}$$

Выбирая область σ для решения системы (14), достаточно большой, всегда можно аналитически доопределить функцию $\frac{\partial \overline{U}}{\partial z}$ на оставшейся бесконечной области $(S_{xoy} - \sigma)$ так, чтобы остаточный интеграл был практически неотличим от остаточного интеграла, под знак которого входила бы неизвестная функция $\frac{\partial \overline{U}}{\partial z}$ за пределами области σ. Это следует из того, что возмущающая масса занимает ограниченный объем и на значительном удалении ее действие практически совпадает с действием тела простой формы: полюса, например, для изометрического возмущающего тела, [1].

Формулу (19) для практического использования можно, следовательно, записать так:

$$M = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{i} \sum_{j} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} (\xi_i, \eta_j; \zeta_{i,j}) \cdot \Delta\xi \cdot \Delta\eta + \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{(S_{xoy-\sigma})} F(x, y)\, dxdy, \tag{20}$$

где $F(x, y)$ — функция, заданная аналитически и аппроксимирующая функцию $\frac{\partial \overline{U}}{\partial z}$ на бесконечной области $(S_{xoy} - \sigma)$ за пределами области σ.

Выводы

1. Предложен новый алгоритм для вычисления магнитного момента от возмущающего объекта произвольной формы, намагниченного вертикально, по аномалии ΔZ, наблюденной на негоризонтальном рельефе.

2. Описанный алгоритм позволяет вычислять магнитный момент по аномалии ΔZ, наблюденной в горной местности на ограниченном участке рельефа.

3. Построенный алгоритм имеет существенные преимущества по сравнению с возможным в принципе методом решения поставленной задачи путем предварительного пересчета наблюденной аномалии на горизонтальную плоскость наблюдений с последующим применением известных формул вычисления для горизонтальной плоскости. Это объясняется тем, что при пересчете вверх, во-первых, резко сокращается заданная ограниченная область наблюденных значений; во-вторых, вносятся значительные ошибки, связанные с конечностью областей интегрирования; в-третьих, сама по себе задача пересчета вверх для заданной произвольной поверхности S является самостоятельной, очень сложной задачей.

Ордена Трудового Красного Знамени
Институт геофизики и инженерной сейсмологии
АН Армянской ССР

Поступила 9.VI.1971.

Դ. Ս. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Ա. Մ. ՊՈԼՈՆՍԿԻ

ΔZ ԱՆՈՄԱԼԻԱՅՈՎ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ՄՈՄԵՆՏԻ ՀԱՇՎԱՐԿՈՒՄԸ ԱՆՀԱՐԹ ՌԵԼԻԵՖԻ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ

Ամփոփում

Այս աշխատանքում առաջարկվում է նոր ալգորիթմ ցանկացած ձևի ուղղահայաց մագնիսացած մարմնի մագնիսական մոմենտը ըստ կորագիծ մակերևույթի վրա դիտված ΔZ անոմալիան հաշվելու համար։

Նկարագրված ալգորիթմը հնարավորություն է տալիս սահմանափակ լեռնային տեղանքի վրա դիտված ΔZ անոմալիայի արժեքով հաշվել մագնիսական մոմենտը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колюбакин В. В. и Лапина М. И.* Обзор способов решения прямой и обратной задач магнитной разведки. Труды Ин-та физики Земли им. О. Ю. Шмидта. Изд. АН СССР, М., 1960.
2. *Полонский А. М.* Об оценке запасов железорудных месторождений по данным магнитной съемки. Известия АН СССР, сер. геофиз., № 11, 1963.
3. *Полонский А. М.* О вычислении магнитных моментов трехмерных тел. Известия АН СССР, сер. геофиз., № 6, 1961.
4. *Полонский А. М.* К вопросу о вычислении магнитных моментов. Известия АН СССР, сер. геофиз., № 6, 1962.
5. *Логачев А. А.* Курс магниторазведки. Госгеолтехиздат, М., 1962.
6. *Сретенский Л. Н.* Теория ньютоновского потенциала. Гостехиздат, М., 1946.
7. *Демидович Б. П., Марон И. А.* Основы вычислительной математики. Физматгиз, М., 1963.