

С. М. АЙВАЗЯН

К ОСНОВАМ ГЕОМЕХАНИКИ*

(Сообщение второе)

11. Событие, происходящее с частицей, определяется тремя координатами, моментом времени, когда произошло событие и состоянием массы частицы — пятой координатой континуума пространство—время—масса.

Рассмотрим две системы отсчета K и K' , движущиеся с постоянной скоростью друг относительно друга. Координатные оси X и X' совпадают, Y и Z параллельны осям Y' и Z' ; время в системах K и K' обозначим через t и t' .

Первое событие состоит в том, что сигнал отправляется в системе K из точки с массой m_1 , координатами x_1, y_1, z_1 в момент времени t_1 . Второе событие — сигнал приходит в этой же системе в точку с массой m_2 и координатами x_2, y_2, z_2 в момент времени t_2 .

Если принять, что скорость сигнала в интервале между двумя событиями постоянна, то пройденное сигналом расстояние равно $c(t_2 - t_1)$; это же расстояние, выраженное через пространственные координаты в пятимерном континууме равно $[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + \gamma(m_2 - m_1)^2]^{1/2}$, где γ — константа размерности. Уравнение движения сигнала выразится через зависимость между координатами обоих событий в системе K :

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + \gamma(m_2 - m_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0. \quad (8,1)$$

Интервал (s_{12}) между двумя событиями имеет следующую форму:

$$s_{12} = [c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 - \gamma(m_2 - m_1)^2]^{1/2}. \quad (8,2)$$

Если скорость сигнала непостоянна, т. е. в момент времени t_1 сигнал распространяется со скоростью c_1 , а в момент времени t_2 — со скоростью c_2 , то пройденное сигналом расстояние равно $(c_2 - c_1)^2(t_2 - t_1)^2$. Интервал, следовательно, примет вид:

$$s_{12} = [(c_2 - c_1)^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 - \gamma(m_2 - m_1)^2]^{1/2}. \quad (8,3)$$

Совершенно то же самое можно сказать о двух событиях и интервале в системе K' .

* Продолжение. Начало см. „Известия“ АН Армянской ССР (науки о Земле), № 1—2, 1966.

Как известно, из инвариантности (неизменности) скорости света следует, что интервал является инвариантом по отношению к преобразованию от одной инерциальной системы отсчета к любой другой. Тогда, из неинвариантности скорости света (сигнала) следует, что интервал неодинаков во всех инерциальных системах отсчета, он разнится на величину, пропорциональную изменению скорости сигнала: $c_2 - c_1$.

Интервал между бесконечно близкими событиями в пятимерном континууме при условии, что скорость света в пределах интервала постоянна, равен:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - \gamma dm^2. \quad (8,4)$$

Если $m_1 = m_2$, то dm^2 обратится в нуль и соотношение (8,4) примет обычный релятивистский вид:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Из соображений математического удобства можно принять:

$$\tau = ict,$$

тогда соотношения (8,2) и (8,4) запишутся:

$$s_{12}^2 = - [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + \gamma (m_2 - m_1) + (\tau_2 - \tau_1)^2],$$

$$ds^2 = - (dx^2 + dy^2 + dz^2 + \gamma dm^2 + d\tau^2), \quad (8,5)$$

где ds^2 — квадрат элемента длины.

Если $ds = 0$ в одной из инерциальных систем отсчета, то $ds' \neq 0$ в другой инерциальной системе, если скорость сигнала (c) в этих системах различна; следовательно, ds^2 и ds'^2 не будут пропорциональны друг другу:

$$ds^2 \neq ds'^2. \quad (8,6)$$

Из (8,6) следует, что при неравенстве бесконечно малых интервалов, не равны и конечные интервалы: $s \neq s'$.

Таким образом, интервал между событиями неодинаков во всех инерциальных системах отсчета, если скорость сигнала в них различна; относительно двух систем отсчета разность интервалов пропорциональна разности скоростей сигнала в этих системах.

12. Пусть в системе отсчета K произошли два события, характериземые вышеуказанными координатами. Зададимся вопросом, могут ли эти два события произойти в одном и том же месте пространства в системе K' .

Обозначим

$$c_2 - c_1 = c_{12}, \quad t_2 - t_1 = t_{12}, \quad m_2 - m_1 = m_{12},$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_{12}^2.$$

Допустим, что скорость сигнала постоянна в обеих системах. Интервал между событиями в системе K равен:

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 - \gamma m_{12}^2, \quad (9,1)$$

а в системе K' :

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 - \gamma m_{12}^2. \quad (9,2)$$

В силу инвариантности интервала из (9,1) и (9,2) имеем:

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 - \gamma m_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2 - \gamma m_{12}'^2.$$

Если два события происходят в одной и той же точке в системе K' (т. е. $l_{12}' = 0$), то:

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 - \gamma m_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - \gamma m_{12}'^2 > 0. \quad (9,3)$$

Таким образом, два события могут произойти в одном и том же месте пространства в системе K' , если интервал между событиями вещественный (времениподобный), т. е. если $s_{12}^2 > 0$.

В силу неинвариантности интервала имеем:

$$c_{12}^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 - \gamma m_{12}^2 \neq c_{12}'^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2 - \gamma m_{12}'^2.$$

Если потребовать, чтобы события произошли в одной точке в системе K' ($l_{12}' = 0$), то:

$$s_{12}^2 = c_{12}^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 - \gamma m_{12}^2 \neq c_{12}'^2 t_{12}'^2 - \gamma m_{12}'^2. \quad (9,4)$$

Правая часть соотношения (9,4) может быть больше, меньше или равна нулю; важно то, что в силу неинвариантности интервала не существует такой системы отсчета, в которой оба события произошли бы в одной и той же точке пространства.

Два события могут произойти в одно и то же время в двух системах отсчета K и K' , если интервал инвариантен. В силу инвариантности интервала

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 - \gamma m_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2 - \gamma m_{12}'^2$$

и так как мы требуем, чтобы $t_{12}' = 0$, то

$$s_{12}^2 = -l_{12}^2 - \gamma m_{12}'^2 = -(l_{12}^2 + \gamma m_{12}'^2) < 0, \quad (9,5)$$

т. е. если интервал между двумя событиями мнимый (пространственноподобный), то можно найти такую систему отсчета, в которой оба события произошли в одно и то же время. Однако если интервал неинвариантен, то при $t_{12}' = 0$

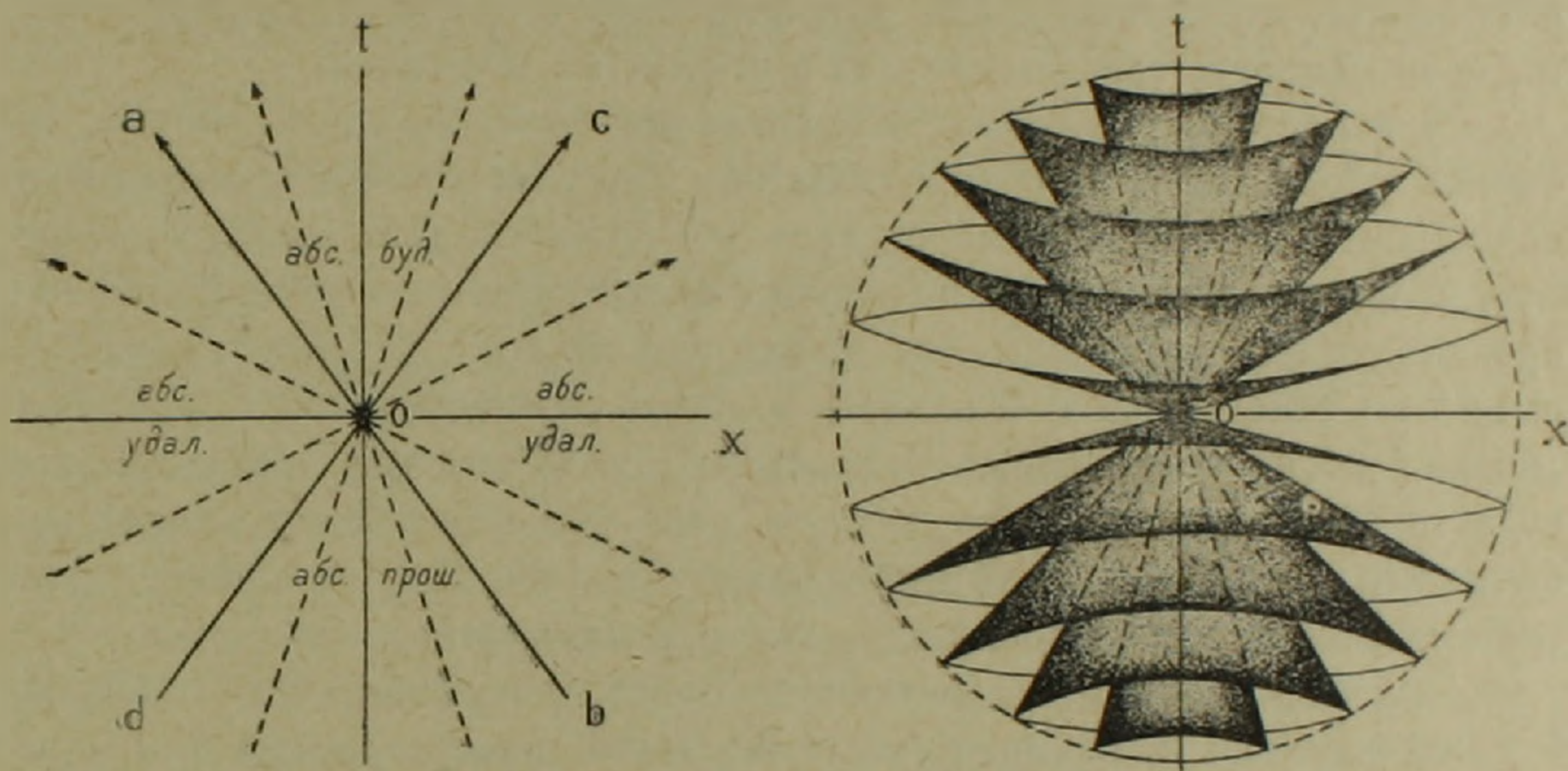
$$s_{12}^2 = c_{12}^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 - \gamma m_{12}^2 \neq -(l_{12}'^2 + \gamma m_{12}'^2), \quad (9,6)$$

т. е. не существует такой системы отсчета, в которой два события произошли бы в одно и то же время.

Таким образом, свойство интервала быть времениподобным или пространственноподобным (вещественным или мнимым) всецело зависит от выбора систем отсчета и от изменения в них скорости сигнала. В силу неинвариантности интервалов, подразделение их на времениподобные и пространственноподобные не является понятием абсолютным.

13. Рассмотрим событие O в четырехмерной системе координат и отношение к нему других событий при условии, что скорость сигнала может бесконечно возрасти*. В релятивистской механике мировые линии движущейся частицы образуют „световой конус“, внутренние полости которого изображают „абсолютно будущее“ и „абсолютно прошедшее“. При бесконечном возрастании скорости сигнала мировые линии событий примут конфигурацию „светового шара“.

Пусть событие O начало временной (t) и одной из пространственных координат (x) (фиг. 1). По отношению к этому событию все остальные события (при прямолинейном равномерном движении частицы) изображаются в виде прямой линии, проходящей через начало координат под определенным углом к оси t , тангенс которого равен скорости частицы. При постоянстве скорости двух сигналов, распространяющихся в противоположных направлениях, их мировые линии



Фиг. 1.

(ab и dc) образуют некоторый наибольший угол с осью t , соответствующий постулату о существовании наибольшей скорости движения материальной частицы—скорости света; в этом случае, как отмечалось, линии образуют „световой конус“.

Однако, в действительности скорость частицы (света) может возрасти неограниченно или, что то же, в природе не существует наибольшей возможной скорости распространения взаимодействий. Поэтому, мировая линия движения частицы образует в пределе прямой угол с осью t ; множество мировых линий с возрастающим углом к оси t (возрастающая скорость движения частицы) при „вращении“ вокруг начала координат образует круг.

При постоянной (максимально возможной) скорости распространения сигнала интервалы между событиями в области aOc и собы-

* Такое событие должно рассматриваться, вообще то говоря, в пятимерном континууме.

тием O являются времениподобными, т. е. для всех мировых точек этой области справедливо $c^2t^2 - x^2 > 0$ и, следовательно $t > 0$ (все события этой области, как „абсолютно будущие“, происходят после O). Два события, разделенных времениподобным интервалом, могут произойти в одном и том же месте в какой-либо из систем отсчета, но ни в одной системе отсчета не могут произойти одновременно. Поэтому, в пределах aOc нельзя выбрать такой системы отсчета, где бы событие произошло раньше, чем O .

При бесконечном возрастании скорости сигнала (отсутствии максимально возможной скорости распространения взаимодействий) наступит момент, когда линии Oa и Oc сольются с осью x , т. е. события, мировые точки которых лежат вдоль этих линий, произойдут одновременно с событием O .

Отсюда следует, что события, разделенные времениподобным интервалом, могут произойти одновременно в одной из систем отсчета, если скорость взаимодействий бесконечно возрастет.

При постоянстве скорости сигнала интервал между любым событием в области aOd cOb и событием O является пространственно-подобным: в любой системе отсчета эти события происходят в разных местах пространства и можно найти такую систему отсчета, где они происходят одновременно. Эти области являются „абсолютно удаленными“ по отношению к O и здесь понятия „одновременно“, „раньше“, „позже“ носят абсолютный характер: „для всякого события этой области есть такие системы отсчета, где оно происходит позже события O , системы, где оно происходит раньше O , и, наконец, одна система отсчета, где оно происходит одновременно с O “ [1].

При бесконечном возрастании скорости сигнала, aOd и cOb будут сокращаться и, наконец, наступит такой момент, когда они ограничатся осью x . Тогда для всякого события этой области будет только одна система отсчета—именно та, где событие происходит одновременно с O . Следовательно, при сверхсветовых, неограниченно возрастающих скоростях исчезает различие между времениподобным и пространственноподобным интервалами, понятия „раньше“ и „позже“, также как и причинно-следственные понятия, не имеют абсолютного смысла.

14. Рассмотрим время пятимерного континуума в двух инерциальных системах отсчета при постоянной скорости сигнала.

Пусть одна из систем с наблюдателем и часами покоится, другая система—с часами—движется равномерно относительно первой. Судя по неподвижным часам, движущиеся часы за бесконечно малый промежуток времени dt пройдут расстояние $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 + \gamma d\bar{m}^2}$. Определим промежуток времени dt' , показываемый движущимися часами.

Движущиеся часы в своей системе координат покоятся, т. е. $dx' = dy' = dz' = \gamma dm' = 0$. При постоянной скорости сигнала в пятимерном континууме интервал инвариантен, поэтому:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - \gamma dm^2 = c^2 dt'^2. \quad (10,1)$$

$$dt' = \frac{ds}{c} = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - \gamma dm^2} \quad (10,2)$$

Умножив и разделив подкоренное выражение на $c^2 dt^2$, получим:

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2} - \frac{\gamma dm^2}{c^2 dt^2}} \quad (10,3)$$

Скорость движущихся часов обозначим через v ; тогда, имея $c^2 dt^2 = ds^2 + \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = v^2$, получим:

$$dt' = \frac{ds}{c} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} - \gamma \left(\frac{dm}{ds}\right)^2} \quad (10,4)$$

Проинтегрировав (10,4), найдем время, показываемое движущимися часами, если по неподвижным часам пройдет время $t_2 - t_1$:

$$t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} - \gamma \left(\frac{dm}{ds}\right)^2}. \quad (10,5)$$

Таким образом, собственное время движущейся системы меньше соответствующего промежутка времени в неподвижной системе. $\frac{dm}{ds}$ показывает изменение массы с расстоянием и ее влияние на время движущегося объекта.

15. Можно показать, что преобразования координат для пятимерного континуума инварианты по отношению к преобразованиям Лоренца при допущении, что скорость сигнала постоянна (невозможно установить какая из систем находится в абсолютном движении).

С этой целью рассмотрим две координатные системы (фиг. 2): нештрихованную XYZ и штрихованную $X'Y'Z'$ соответственно условно неподвижную и подвижную. Оси систем параллельны. $X'Y'Z'$ движется относительно XYZ вдоль оси OX со скоростью v .

Координаты y и z преобразуются (аналогично преобразованиям Галилея) соотношением:

$$y' = y \text{ и } z' = z.$$

Найдем преобразования координат x и t . С этой целью запишем координату точки в начале координат подвижной системы ($t' = 0$):

$$x' + \gamma m' = 0. \quad (11,1)$$

Эта точка в неподвижной системе в момент времени t (отсчитанный в неподвижной системе) имеет координату:

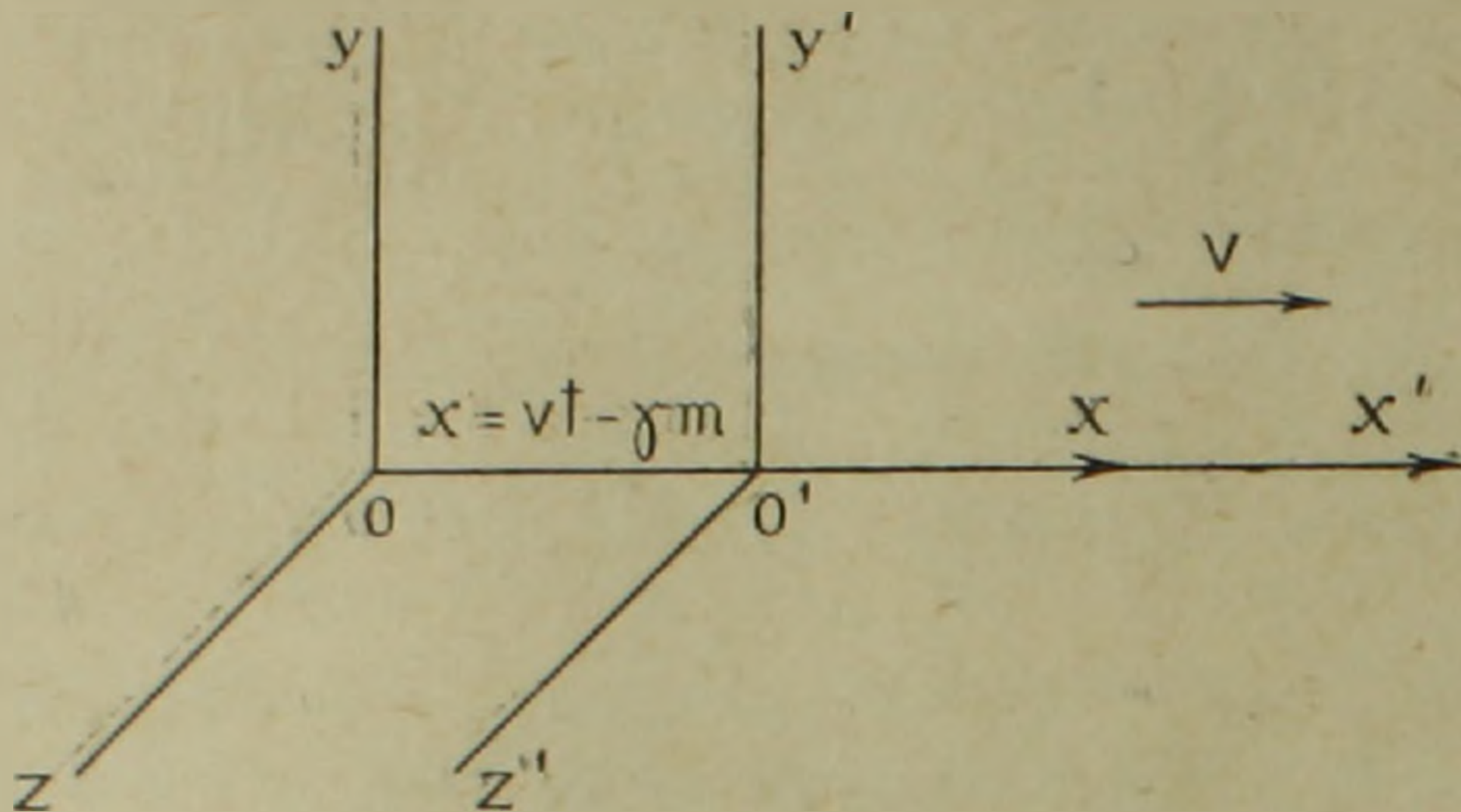
$$x = vt - \gamma m \quad \text{или} \quad x - vt + \gamma m = 0. \quad (11,2)$$

Из сравнения (11,1) и (11,2) следует, что оба соотношения отличаются для любых моментов времени постоянным множителем, т. е.:

$$x' + \gamma m' = \alpha (x - vt + \gamma m). \quad (11,3)$$

Соответственно, точка в начале координат неподвижной системы ($t=0$) имеет координату:

$$x + \gamma m = 0, \quad (11,4)$$



Фиг. 2.

а координата этой же точки в подвижной системе в момент времени t' (отсчитанный в подвижной системе) равна:

$$\begin{aligned} x' &= -vt' - \gamma m' & \text{или} \\ x' + vt' + \gamma m' &= 0. \end{aligned} \quad (11,5)$$

Из сравнения (11,4) и (11,5) имеем:

$$x + \gamma m = \alpha (x' + vt' + \gamma m'). \quad (11,6)$$

Если постоянный световой сигнал отправляется от начала координат обеих систем в направлении осей OX и $O'X'$, то координаты точек, до которых дойдет сигнал в произвольные моменты времени t и t' , запишутся:

$$x = ct - \gamma m; \quad x' = ct' - \gamma m'. \quad (11,7)$$

Перемножив (11,3) и (11,6), подставив значения x и x' по (11,7), получим:

$$c^2 = \alpha^2 (c^2 - v^2),$$

откуда, взяв для α положительные значения корня, имеем:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Подставив значение α в (11,3) и (11,6), получим:

$$\begin{aligned} x' + \gamma m' &= \frac{x - vt + \gamma m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ x' &= \frac{x - vt + \gamma m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \gamma m' \end{aligned} \quad (11,8)$$

Соответственно:

$$x + \gamma m = \frac{x' + vt' + \gamma m'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$x = \frac{x' + vt' + \gamma m'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \gamma m. \quad (11,9)$$

Из (11,8) имеем:

$$x' = \frac{x - vt + \gamma m - \gamma m' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Если принять:

$$\gamma m' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \gamma m, \quad (11,10a)$$

(масса покоящегося тела меньше массы движущегося на $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$),
то:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (11,10)$$

Таким образом, мы получили формулу преобразования координат Лоренца для x' .

Соответственно, из (11,9) имеем:

$$x = \frac{x' + vt' + \gamma m' - \gamma m \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Обозначим:

$$\gamma m \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \gamma m', \quad (11,11a)$$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (11,11)$$

Решая (11,10) и (11,11) относительно t и t' получим преобразования Лоренца для t и t' :

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (11,12)$$

16. Приведенные ранее выражения для импульса (2,6) и энергии (2,9) частицы в пятимерном континууме позволяют записать зависи-

мость между энергией, импульсом, скоростью, массой и пройденным расстоянием свободной частицы. С этой целью возведем в квадрат и сравним выражения (2,6) и (2,9):

$$p^2 = \frac{m^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2} - \gamma \left(\frac{dm}{ds} \right)^2} ; E^2 = \frac{\left\{ mc^2 \left[1 - \gamma \left(\frac{dm}{ds} \right)^2 \right] \right\}^2}{1 - \frac{v^2}{c^2} - \gamma \left(\frac{dm}{ds} \right)^2} .$$

$$\frac{v}{p} = \frac{c^2 \left[1 - \gamma \left(\frac{dm}{ds} \right)^2 \right]}{E} . \quad (12,1a)$$

$$p = \frac{Ev}{c^2 \left[1 - \gamma \left(\frac{dm}{ds} \right)^2 \right]} . \quad (12,1)$$

Используя (12,1a) можно найти соотношение между энергией и импульсом частицы. Из соображений математического удобства заменим в (2,6) и (2,9) дифференциальную форму $\frac{dm}{ds}$ через $\frac{m}{s}$:

$$E = \frac{pc^2 \left(1 - \gamma \frac{m^2}{s^2} \right)}{v} . \quad (12,1b)$$

Определим значение v из (2,6):

$$v^2 = \frac{p^2 c^2 (s^2 - \gamma m^2)}{s^2 (m^2 c^2 + p^2)} ,$$

$$E = \frac{pc^2 \left(1 - \gamma \frac{m^2}{s^2} \right)}{\sqrt{\frac{p^2 c^2 (s^2 - \gamma m^2)}{s^2 (m^2 c^2 + p^2)}}} ,$$

$$\frac{E^2}{c^2} = \frac{1}{s^2} (s^2 - \gamma m^2)(m^2 c^2 + p^2) . \quad (12,2)$$

Выражения (12,1) и (12,2) показывают искомую зависимость.

Зависимость между энергией и импульсом — функция Гамильтона — примет вид:

$$H = \frac{c}{s} \sqrt{(s^2 - \gamma m^2)(m^2 c^2 + p^2)} . \quad (12,3)$$

Разложим H в ряд (по степеням) и опустим члены высших порядков:

$$H \approx \frac{c}{s} \left[\left(s^2 - \frac{1}{2} \gamma m^2 \right) \left(m^2 c^2 + \frac{1}{2} p^2 \right) \right] \approx$$

$$\approx \left(s^2 - \frac{1}{2} \gamma m^2 \right) \left(\frac{m^2 c^3}{s} + \frac{cp^2}{2s} \right) .$$

Полученное выражение умножим на s и разделим на mc :

$$H \approx \left(s^2 - \frac{1}{2} \gamma m^2 \right) \left(mc^2 + \frac{p^2}{2m} \right). \quad (12,4)$$

Таким образом, мы получили во второй скобке релятивистскую энергию покоя частицы и классическое выражение функции Гамильтона, а первая — указывает на зависимость энергии и импульса от расстояния и массы в пятимерном континууме.

17. *Пятимерной скоростью* (5-скоростью) частицы является вектор

$$u_i = \frac{dx_i}{ds}. \quad (13,1)$$

Компонента ds согласно (10,4) запишется

$$ds = cdt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} - \gamma \left(\frac{dm}{ds} \right)^2}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} u_1 = \frac{dx_1}{ds} &= \frac{dx}{cdt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} - \gamma \left(\frac{dm}{ds} \right)^2}} = \\ &= \frac{v_x}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} - \gamma \left(\frac{dm}{ds} \right)^2}}. \end{aligned} \quad (13,2)$$

Скорости u_2, u_3 записываются подобно (13,2). Для u_4 замечаем, что $x_4 = ict$ ($i = x_4/ct$):

$$u_4 = \frac{i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} - \gamma \left(\frac{dm}{ds} \right)^2}}. \quad (13,3)$$

Для u_5 имеем:

$$u_5 = \frac{dx_5}{cdt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} - \gamma \left(\frac{dm}{ds} \right)^2}}. \quad (13,4)$$

Компонента dx_5 характеризует массу частицы — пятую координату пятимерного континуума. Вторую производную пятимерной скорости

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} = \frac{du_i}{ds} \quad (13,5)$$

можно назвать 5-ускорением.

Поскольку $dx_i^2 = -ds^2$ (согласно 8,5), то из (13,1) следует

$$u_i^2 = -1, \quad (13,6)$$

а продифференцировав это отношение по независимой переменной s , получим:

$$u_i \frac{du_i}{ds} = 0. \quad (13,7)$$

Из (13,7) следует, что пятимерные векторы скорости и ускорения „взаимно перпендикулярны“.

18. В соответствии с принципом наименьшего действия, для частицы, не находящейся под влиянием внешних сил (т. е. свободной материальной точки), действие есть интеграл (S), минимальный вдоль мировой линии между заданными мировыми точками (a и b) нахождения частицы. Поскольку интеграл $\int_a^b ds$ с положительным знаком не может иметь минимума, он должен быть взят с обратным знаком:

$$S = -mc \int_a^b ds. \quad (14,1)$$

Здесь ds — есть интервал между начальной и конечной точками расположения частицы; для принятого нами пятимерного континуума интервал имеет форму (8,4). mc — постоянная, характеризующая данную частицу.

Вариация интеграла действия (δS) равна нулю:

$$\delta S = -mc \delta \int_a^b ds = 0. \quad (14,2)$$

Подставим сюда значение $ds = \sqrt{-dx_i^2}$:

$$\begin{aligned} \delta S &= -mc \delta \int_a^b \sqrt{-dx_i^2} = -mc \int_a^b \frac{1}{2\sqrt{-dx_i^2}} \delta(-dx_i^2) = \\ &= mc \int_a^b \frac{1}{2\sqrt{-dx_i^2}} 2dx_i \delta dx_i = mc \int_a^b \frac{dx_i}{ds} d\delta x_i = \\ &= mc \int_a^b u_i d\delta x_i = mc u_i \delta x_i \Big|_a^b - mc \int_a^b \delta x_i du_i = \\ &= mc u_i \delta x_i \Big|_a^b - mc \int_a^b \delta x_i \frac{du_i}{ds} ds. \end{aligned} \quad (14,3)$$

Если заданы два положения частицы в точках a и b , то $(\delta x_i)_a = (\delta x_i)_b = 0$, а траектория движения частицы определяется из условия равенства нулю вариации действия ($\delta S = 0$). Тогда из (14,3) следует, что $\frac{du_i}{ds} = 0$, т. е. в этом случае скорость свободной частицы в пятимерном континууме будет постоянной.

Если же задано положение частицы лишь в одной точке a $[(\delta x_i)_a = 0]$, а вторая точка b является переменной, то вариация действия есть функция от координат, поэтому интеграл в (14,3) равен нулю. Отсюда, приняв δx_i вместо $(\delta x_i)_b$, получим:

$$\delta S = m c u_i \delta x_i. \quad (14,4)$$

Таким образом, соотношения (14,3) и (14,4) показывают, что вариации действия частицы для четырех- и пятимерного континуума внешне совершенно аналогичны.

19. Пятимерный импульс (p_i) для свободной материальной частицы является пятимерным вектором с составляющими $\frac{\partial S}{\partial x_i}$. Следовательно, из (14,4) значение импульса запишется:

$$p_i = m c u_i. \quad (15,1)$$

Пятимерный вектор (g_i) есть производная импульса по ds :

$$g_i = \frac{dp_i}{ds} = m c \frac{du_i}{ds}. \quad (15,2)$$

Согласно (13,7) $u_i \frac{du_i}{ds} = 0$, поэтому компоненты пятимерной силы

$$g_i u_i = 0. \quad (15,3)$$

Из (13,6) и (15,1) следует:

$$p_i^2 = - m^2 c^2. \quad (15,4)$$

Подставив сюда значение пятимерного импульса $p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}$, получим:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right)^2 = - m^2 c^2. \quad (15,5)$$

Это же выражение в развернутом виде для пятимерного континуума:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 + m^2 c^2 = 0. \quad (15,6)$$

Таким образом, в уравнение Гамильтона-Якоби релятивистской механики в случае пятимерного континуума вводится дополнительная компонента $\partial S / \partial t$, характеризующая состояние массы свободной частицы.

Институт геологических наук
АН Армянской ССР

Поступила 29.V.1965.

Ս. Մ. ԱՅՎԱԶՅԱՆ

ԵՐԿՐԱՄԵՆԱՆԻԿԱՅԻ ՀԻՄՔԵՐԻ ՇՈՒՐՋԸ

(Երկրորդ հադուրում)

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Հոդվածում քննարկված են առնվազն հինգշափանի կոնտինուումի մի շարք հիմնական առանձնահատկությունները:

Հնթացող համակարգերում ժամանակի հոսքը ավելի դանդաղ է, քան անշարժ համակարգերում և տարբերությունը հավասար է $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \gamma \left(\frac{dm}{ds} \right)^2$.

Հինգշափանի կոնտինուումում կոորդինատները կերպափոխվում են չորենցի կերպափոխություններին համաձայն, այսինքն նրանք ինվարիանտ են (անփոփոխ են) այդ կերպափոխությունների վերաբերյալ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Теория поля. Москва. 1962.