ԳԵՈՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ՊՐՈԲԼԵՄՆԵՐ, ԵՐԵՎԱՆ
ПРОБЛЕМЫ ГЕОМЕХАНИКИ, ЕРЕВАН
PROBLEMS OF GEOMECHANICS, YEREVAN

1976, 7 : 99—105

IGC BO УДК 624.1

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ФАКТОРОВ ЛЯВА И ПУАССОНА В ТЕОРИИ ПРИЛИВНОЙ ДЕФОРМАЦИИ И ВЕКОВОГО РАСПОРА ЗЕМНОЙ КОРЫ

Чл.-корр. АН Арм. ССР, профессор, доктор геол.-мин. наук А. Т. АСЛАНЯН[1]

Реферат. Приливные деформации Земли характеризуются значением фактора Лява. Для его определения применяется отношение отклонения отвеса на деформированной и твердой поверхности Земли. Доказывается, что факторы Лява и Пуассона тождественны. Идентичность этих факторов выражается уравнением $1+k+h=(1-2\nu)/(1-\nu)$, где k и h—числа Лява, а ν—коэффициент Пуассона. Фактор Пуассона устанавливается по отношению скоростей продольных и поперечных волн. Этот подход позволяет определять фактор Лява, необходимый для оценки приливных деформаций Земли.

Инструментальные определения приливных деформаций Земли, вызванных притяжением Луны и Солнца, являются важным источником информации о внутреннем строении и механических свойствах Земли, поскольку земные приливы относятся к числу тех весьма немногих геофизических явлений, которые поддаются точной оценке как в смысле причинной обусловленности, так и в отношении количественной характеристики (Мельхиор, 1968; Молоденский, 1953; Love, 1967).

В данном сообщении показывается, что отношение γ отклонения отвеса на поверхности деформированной приливами реальной (упругой) Земли e_φ к отклонению отвеса на поверхности абсолютно твердой модели Земли e_0, определяемое с помощью наклономеров и маятниковых приборов, может быть определено также с помощью сейсмографов, исходя из отношения скоростей продольных и поперечных волн, поскольку это отношение является функцией фактора Пуассона λ, характеризующего упругие свойства деформируемой среды и равного, как выясняется, фактору Лява γ.

Приливной потенциал Луны является сферической гармоникой второго порядка и определяется выражением

$$W_2=\frac{Gma^2}{2c^3}(3\cos^2 z_0-1), \tag{1}$$

в котором G—гравитационная постоянная, m—масса Луны, a—средний радиус Земли, c—расстояние между центрами масс Земли и Лу-

[1] Директор Института геологических наук АН Арм. ССР.

ны, z_0—угол, образованный прямой, соединяющей центры масс Земли и Луны, и радиус-вектором точки, на которой устанавливается маятник.

Под влиянием возмущающей силы Луны, потенциал которой достигает максимума $W_{2\max} = Gma^2/c^3$, когда она находится в зените ($z_0 = 0$), поверхность Земли испытывает радиальное смещение Δr, а установленные на ней маятники и наклономеры показывают отклонение отвеса и изменение уклона поверхности.

Для абсолютно твердой модели Земли согласно теореме Брунса малое смещение эквипотенциальной поверхности $\Delta r = W_2/g$, а отклонение отвеса $e_0 = \frac{1}{ag} \cdot \frac{\partial W_2}{\partial \varphi}$ (φ—географическая широта), а в случае упругой модели Земли, поверхность которой уже не является эквипотенциальной поверхностью, вариация высоты смещения над этой поверхностью определяется согласно Ляву формулой

$$\Delta r = \frac{hW_2}{g}. \tag{2}$$

Соответствующее уменьшение потенциала Земли в точке наблюдения, обусловленное радиальным смещением поверхности, составляет

$$W_2' = g\Delta r = hW_2, \tag{3}$$

где $h = \Delta r/\Delta r_0$—безразмерная величина, характеризующая упругие свойства среды в зависимости от глубины ее залегания.

Изменение потенциала в точке наблюдения происходит также вследствие перемещения масс в толще Земли в процессе приливной деформации. Приращение его согласно Ляву определяется выражением

$$W_2'' = kW_2, \tag{4}$$

где k—безразмерная постоянная, зависящая от упругих свойств деформирующейся среды (Лейбензон, 1955; Мельхиор, 1968; Love, 1967).

Деформация земной коры под воздействием приливообразующей силы происходит в направлении этой силы и фиксируется изменением приливного наклона поверхности коры на величину $i = -\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi}$, и, таким образом, согласно Ляву, отклонение отвеса, определенное для абсолютно твердой модели Земли, должно быть уменьшено при переходе к упругой модели Земли на величину $i = e_h = -\frac{h}{ga} \cdot \frac{\partial W_2}{\partial \varphi}$, однако, как показал Ляв, появление дополнительного возмущающего потенциала $W_2'' = kW_2$, обусловленного приливным выступом Земли, накладывается на возмущающий потенциал W_2 и тем самым уменьшает отклонение отвеса на угол $e_k = \frac{k}{ga} \cdot \frac{\partial W_2}{\partial \varphi}$.

Таким образом, отклонение отвеса на возмущенной поверхности упругой Земли, пропорциональное притяжению перпендикулярно к вертикальной оси маятника, нормальной к этой поверхности, составляет

$$e_\varphi = \frac{1}{ga} \cdot \frac{\partial W_2}{\partial \varphi} - \left(\frac{h}{ga} \cdot \frac{\partial W_2}{\partial \varphi} - \frac{k}{ga} \cdot \frac{\partial W_2}{\partial \varphi}\right). \tag{5}$$

Обозначая отклонение отвеса для модели абсолютно твердой Земли $e_0 = \frac{1}{ga} \frac{\partial W_2}{\partial \varphi}$ и вводя параметр

$$e_\varphi / e_0 = \gamma_{\text{нз}} \tag{5}$$

получаем известное уравнение Лява (Лейбензон, 1955; Love, 1967)

$$1 - (h - k) = \gamma. \tag{6}$$

Аналогично, обозначая общее значение возмущающего потенциала Земли в точке наблюдения на поверхности через V_φ, потенциал абсолютно твердой модели Земли через V_0, можно написать

$$V_\varphi = V_0 + W_2 - (W_2' - W_2'') = W_0 + W_2 + kW_2 - hW_2$$

или

$$\frac{\Delta V}{W_2} = \frac{V_\varphi - V_0}{W_2} = 1 - (h - k) = \gamma, \tag{6}$$

где γ—отношение результирующего возмущающего потенциала упругой Земли к приливному потенциалу Луны.

Числа k и h известны под названием приливных чисел Лява, а число γ под названием приливного фактора Лява.

М. С. Молоденский (1953) показал, что в первом приближении

$$5k = (3 - \eta)h, \tag{7}$$

где $\eta = r d\varepsilon / \varepsilon dr$—параметр Радо.

Параметр Радо для $r = a$ определяется из выражения

$$\eta_{r=a} = \frac{5q}{2\varepsilon} - 2 = \frac{5a\omega^2}{2\varepsilon g_e} - 2, \tag{8}$$

где a—средний радиус Земли, ω—угловая скорость ее вращения, g_e—ускорение силы тяжести на экваторе, ε—полярное сжатие Земли.

При η_a=0,57 М. С. Молоденский получил для 16 различных моделей Земли k=0,500, что позволило представить уравнение Лява в более простом виде:

$$1 - k = \gamma. \tag{9}$$

По данным спутниковых наблюдений η_a=0,585 и соответственно согласно формуле (7) k=0,483.

Обработка многочисленных результатов инструментальных наблюдений дает для поверхности земной коры h=0,58, k=0,29, γ=0,71. Для однородной модели Земли впервые Кельвином были получены цифры h=5/6, k=5/12, γ=2/3; для абсолютно твердой модели Земли $h = 0$, $k = 0$, $\gamma = 1$.

О характере распределения деформирующих сил и напряжений в приливном выступе коры можно судить по следующим построениям. Если вертикальная ось маятника до приливной деформации была направлена по линии отвеса и жестко привязана к коре, то на эту ось в ходе приливной деформации должны действовать: сила с возмущающим потенциалом W_2, сила с добавочным возмущающим потенциалом $W_2'' = kW_2$ и горизонтальная компонента силы тяжести (Лейбензон, 1955). Поскольку компоненты этих сил равняются производным их потенциалов по соответствующим направлениям, а для абсолютно твердой модели Земли ($k = h = 0$) горизонтальная компонента, действующая на вертикальную ось маятника, равняется $F_0 = \rho g e_0 = \rho \partial W_2 / a\partial\varphi$ (ρ — плотность коры), то, пользуясь уравнением (5), для результирующей горизонтальных сил $\rho g e_\varphi$ можно написать (Лейбензон, 1955):

$$F_\varphi = F_0 - F_0(h-k); \tag{10}$$

$$\frac{F_\varphi}{F_0} = 1 - (h-k) = \gamma. \tag{11}$$

Заменяя в уравнении (11) $F_\varphi/F_0 = \gamma$ отношением соответствующих этим силам касательных напряжений, из уравнения (13) получаем важное соотношение

$$\frac{\tau_\varphi}{\tau_0} = 1 - (h-k) = \gamma. \tag{12}$$

Уравнение поверхности приливного выступа обычно определяется выражением

$$r = a - \varepsilon a\left(\frac{1}{3} - \sin^2\varphi\right) = a - \varepsilon a s_2, \tag{13}$$

где r—расстояние исследуемой точки от центра Земли.

В соответствии с уравнением (2) $r - a = \varepsilon a s_2 = \Delta r = hW_2/g$. Если моделировать выступ коры в виде бесконечного полупространства и поместить начало прямоугольных координат в вершине выступа, направив ось y по касательной к меридиану, а ось z к центру Земли, радиальное напряжение можно выразить уравнением

$$\sigma_z = \sigma_2 = f_0 z, \; f_0 = \rho g, \tag{14}$$

а тангенциальное напряжение σ_0 (если положить $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0$) уравнением

$$\sigma_0 = f_R z = f_0 z - \beta f_0 z, \tag{15}$$

где β—безразмерная постоянная, зависящая от упругих свойств выступа коры и имеющая в рассматриваемом случае произвольные значения (ввиду того, что при $z \to \infty$, $\sigma \to \infty$).

Условие $\beta=0$ соответствует, очевидно, гидростатическому характеру распределения напряжений ($\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$), а условие $\beta = \nu/(1-\nu)$ —широко известной в теории горного давления гипотезе бокового распора (ν—коэффициент Пуассона). Последняя основана на следующих рассуждениях (Асланян, 1960; Терцаги, 1961).

Если на поверхности Земли свободно залегает пласт в виде материковой плиты (или материкового ледника) с плотностью ρ, модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν, то эта плита на глубине z будет оказывать давление на свое основание, равное $\rho g z$. Это давление принимается равным нормальному радиальному напряжению на той же глубине z, причем если колонну мысленно изолировать, то она под этим давлением в боковом направлении получит расширение на относительную величину

$$\varepsilon^0 = \frac{\nu\sigma z}{E} = \frac{\nu\rho g z}{E}. \tag{16}$$

Если колонну блокировать со всех сторон, то под влиянием горизонтальных напряжений $\sigma_x = \sigma_y$ поперечник ее уменьшится на относительную величину

$$\varepsilon' = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E}. \tag{17}$$

Из условия равновесия $\varepsilon^0 = \varepsilon'$ получим значение горизонтального (тангенциального) главного напряжения

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_\theta = \frac{\nu}{1-\nu} \rho g z = \beta \rho g z = \beta \sigma r. \tag{18}$$

Согласно теории прочности Сен-Венана разрушение выступа коры в виде зон текучести или разрывных нарушений наступает тогда, когда предел прочности достигает максимальной разности между главными нормальными напряжениями (Асланян, 1960; Лейбензон, 1955; Терцаги, 1961). В рассматриваемом случае предел прочности (вернее текучести) равняется $\varepsilon_{\varsigma} = \varepsilon_2 - \varepsilon_\theta$ или

$$\sigma_2 = \rho g z - \beta \rho g z = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \rho g z = \lambda \rho g z = \lambda \varepsilon_r. \tag{19}$$

Коэффициент β в уравнении (18) называется коэффициентом статического давления пласта в состоянии покоя, а коэффициент λ в уравнении (19)—фактором Пуассона.

Если в уравнении (12) заменить касательные напряжения их верхними значениями, соответствующими пределу прочности материала σ_s, и учесть, что $\sigma_s = 2\tau_s = \sigma_2 - \sigma_\theta$, и далее согласно уравнению (18) принять для абсолютно твердой модели Земли $\sigma_\theta = 0, \nu = 0$, $2\tau_{s(0)} = \sigma_r = \rho g z$, то это уравнение запишется в виде

$$\frac{\tau_{s(\nu)}}{\tau_{s(0)}} = \frac{\sigma_r - \sigma_0}{\sigma_r} = 1 - (h-k) = \gamma. \tag{20}$$

Сопоставляя его с уравнением (19), получаем:

$$\gamma = 1 - (h-k) = \frac{1-2\nu}{1-\nu} = \lambda; \tag{21}$$

$$h - k = \nu/(1-\nu). \tag{22}$$

Таким образом, доказывается тождество фактора Лява γ, определяемого с помощью наклономеров и маятниковых приборов, и фактора Пуассона λ, определяемого сейсмометрическими методами.

При соблюдении условия Молоденского $h = 2k$ получается:

$$1 - k = \frac{1-2\nu}{1-\nu};\ k = \frac{\nu}{1-\nu}. \tag{23}$$

Эти результаты могут быть получены также несколько иным путем.

Согласно уравнениям (2), (3), (14), (15):

$$\sigma_r = \rho g \Delta r = \rho h W_2; \tag{24}$$

$$\sigma_\theta = \beta \sigma_r = \beta \rho h W_2 \tag{25}$$

и, следовательно, с учетом уравнения (19)

$$\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{\sigma_r} = 1 - \beta = \lambda. \tag{26}$$

Сравнение уравнений (26) и (21) показывает, что $\beta = h - k$. Если $h = 2k$, $\beta = k$ и $k W_2 = W_2''$, то получаем $\sigma_\theta/\sigma_r = k$, и с учетом (18) $k = \nu/(1-\nu)$, и поскольку $W_2''/W_2 = k$, $W_2''/W_2 = \sigma_s/\sigma_r = \nu/(1-\nu)$, то $k = \nu/(1-\nu)$ и $1 - k = \gamma = \lambda$.

Непосредственная подстановка численных значений в формулу (27) подтверждает тождество $\lambda = \gamma$.

В частности: при $\nu=0$, $h=0$, $k=0$, $\lambda=\gamma=1$ (абсолютно твердая модель Земли); $\nu=1/4$, $k=1/3$, $\lambda=2/3$ (модель упругой Земли); $\nu=1/2$, $k=1$, $\lambda=\gamma=0$ (модель жидкой Земли).

Таким образом, для Земли устанавливается тождественность факторов Лява и Пуассона, и поскольку фактор Пуассона связывает скорости поперечных V_s и продольных V_p волн в виде $2V_s^2/\lambda V_p^2$, то зная эти значения скоростей, из зависимости

$$\lambda=\frac{1-2\nu}{1-\nu}=\frac{2V_s^2}{V_p^2}=1-h+k=\lambda \tag{27}$$

можно определить фактор Лява и использовать его для изучения внутреннего строения и физических свойств Земли. Обильный сейсмометрический материал, накопленный по всем континентам, океанам и отдельным регионам земной поверхности, позволит без дополнительных полевых исследований определить факторы Лява и Пуассона и соответственно контролировать результаты наклономерных и маятниковых измерений.

По сейсмометрическим данным для Земли в целом $V_p=10{,}37$ км/сек, $V_s=6{,}01$ км/сек. При этих данных формула (27) дает $\gamma=0{,}67$, $\nu=0{,}248$. Для верхов мантии, на глубине 100 км, $V_p=8$ км/сек, $V_s=4{,}4$ км/сек, $\gamma=0{,}65$, $\nu=0{,}26$, для низов мантии $V_p=13{,}65$ км/сек, $V_s=7{,}2$ км/сек, $\gamma=0{,}56$, а для гранитного слоя ряда горных областей среднее значение $V_s=3{,}37$ км/сек, $V_p=5{,}78$ км/сек и соответственно $\gamma=0{,}68$, $\nu=0{,}254$. Наблюденные значения γ колеблются в пределах 0,54—0,82 со средним значением 0,68 (Мельхиор, 1968; Пильник, 1970). При $\gamma=0{,}67$ из (9) получаем $k=0{,}33$, а из уравнения (23) $\nu=0{,}248$.

Согласно сейсмометрическим данным для Земли в целом и ее оболочек (за исключением внешнего ядра) коэффициент Пуассона находится почти всегда в пределах 0,21—0,27 и соответственно согласно уравнению (27) фактор Лява находится в пределах 0,72—0,63.

Среднее значение фактора Лява, по данным геофизических станций СССР, составляет 0,699, США : 0,694, Северной Европы : 0,682—0,712 (Мельхиор, 1968; Парийский, 1963; Пильник, 1970). По сводке Пильника среднее значение k по всем станциям СССР равняется 0,301, чему, согласно формуле Лява

$$k=(2\varepsilon/q-1)\ (1-T_0/T)$$

соответствует возрастание периода свободной нутации полюса от 305 дней для абсолютно твердой модели Земли (период Эйлера) до 433 дней для упругой ее модели (период Чандлера), причем в случае отсутствия водной оболочки Земли этот период должен был равняться 415 дням (Мельхиор, 1968).

***

После того, как была набрана настоящая статья, в „Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominate“ (Sectio Geologica), т. XVIII, 1976 появилась интересная статья Б. Бодри „Земные приливы и тонкие закономерности вращения Земли (дата поступления 15/III-1974). В этой работе, по сообщению автора, использованы более достоверные наблюдательные данные, чем у ряда предыдущих исследователей. Для главных приливных волн Б. Бодри приняты значения $k=0{,}3017$, $h=0{,}6113$, $\gamma=0{,}6904$, а для периода Чандлера 442,6 дней (реальное значение периода примерно 450 дней).

ՄԱԿԸՆԹԱՑԱՅԻՆ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԵՐԿՐԱԳՆԴԻ ԿԵՂԵՎԻ ԿՈՂՄՆԱՅԻՆ ՊԱՀԱՆՔԻ ԼՅԱՎԻ ԵՎ ՊՈՒԱՍՈՆԻ ԳՈՐԾՈՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐԺԵՔՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, պրոֆեսոր, երկրաբ.-միներ, գիտութ. դոկտոր Ա. Տ. ԱՍԼԱՆՅԱՆ[1]

Ռ ե ֆ ե ր ա տ։ Երկրագնդի մակընթացային ձևափոխությունները բնութագրվում են Լյավի գործոնի արժեքով։ Այդ գործոնի որոշման համար օգտագործվում է Երկրի ձևափոխված և պինդ մակերևույթների վրա ուղղալարի շեղման հարաբերությունը։ Ապացուցվում է, որ Լյավի և Պուասոնի գործոնները նույնն են։ Այդ գործոնների նույնությունը արտահայտվում է $1+k+h=(1-2\nu)/(1-\nu)$ հավասարումով, որտեղ k-ն և h-ը Լյավի թվերն են, իսկ ν-ն՝ Պուասոնի գործակիցը։ Պուասոնի գործոնը բացահայտվում է երկայնական և լայնական ալիքների արագությունների հարաբերությամբ։ Այսպիսի մոտեցումը թույլ է տալիս որոշել Երկրի մակընթացային ձևափոխությունների գնահատման համար անհրաժեշտ Լյավի գործոնները։

ON EQUIVALENCE OF LOVE'S AND POISSON'S FACTORS IN THE THEORY OF TIDAL DEFORMATION AND LATERAL THRUST OF THE EARTH'S CRUST

ASHOT ASLANIAN, Prof., Dr. Sc. (Geol.), Corr. Mem. Armen. Ac. Sc[2];

S Y N O P S I S The tidal deformation of the Earth is characterized by value of the Love's factor. For its determination the ratio of the plumbline deviation on the deformed and rigid Earth's surfaces is used. It is demonstrated that the Love's and the Poisson's factors are identical. The identity of these factors is expressed by equation $1+k+h=(1-2\nu)/(1-\nu)$, where k and h are Love's numbers and ν is Poisson's ratio. The Poisson's factor for the Earth is ascertained from the ratio between the rates of longitudinal and transverse waves. This approach permits to determine the Love's factor for estimation of the tidal deformation of the Earth.

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ—ЛИТЕРАТУРА—REPERENCES

Асланян А. Т., 1960. Динамическая проблема геотектоники. Международный геологический конгресс, XXI сессия, 1960. Доклады советских геологов. Изд. АН СССР, М.

Лейбензон Л. С., 1955. Деформация упругой сферы Земли (1910). Собрание трудов, т. IV. Изд. АН СССР, М.

Мельхиор П. 1968. Земные приливы. Изд. «Мир», М.

Парийский Н. Н., 1963. Земные приливы и внутреннее строение Земли. Изв. АН СССР, серия геофиз., № 2.

Пильник Г. П., 1970. Астрономические наблюдения земных приливов. Физика Земли, № 3.

Молоденский М. С., 1953. Упругие приливы, свободная нутация и некоторые вопросы строения Земли. Тр. геофиз. ин-та АН СССР, № 19.

Терцаги К., 1961. Теория механики грунтов. М.

Love A. E., 1967. Some problems of Geodynamics. New York (1909, 1911).

---

[1] *ՀՍՍՀ ԳԱ երկրաբանական գիտությունների ինստիտուտի դիրեկտոր։*

[2] Director, Institute of Geological Sciences, Armenian Academy of Sciences.