

ВЕРТИКАЛЬНОЕ ВДАВЛИВАНИЕ ЖЕСТКОГО ШЕРОХОВАТОГО ШТАМПА В ПЛАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЕ ОСНОВАНИЕ

Докт. техн. наук А. С. СТРОГАНОВ¹

Реферат. Дается точное численное решение задачи теории пластичности о несущей способности пластически неоднородного основания в нестабилизированном состоянии под жестким шероховатым штампом при вертикальном вдавливании, что имеет место, например, при достаточно быстром нагружении фундамента, основанием которого служат глинистые грунты, илы и торфы, обладающие низкими значениями коэффициента консолидации и линейной пластической неоднородностью, хорошо подтвержденной экспериментально испытаниями лопастным зондом.

Рассмотрим задачу о несущей способности пластически неоднородного основания в нестабилизированном состоянии при вертикальном вдавливании жесткого шероховатого штампа, как это имеет место при достаточно быстром нагружении фундамента на водонасыщенных глинистых грунтах, илах и торфах, обладающих низкими значениями ($\leq i \cdot 10^7$ см/год) коэффициента консолидации.

Положим, что грунт основания, находящийся в нестабилизированном состоянии, когда силы трения от внешней нагрузки не реализуются (мгновенное нагружение), подчиняется условию пластической неоднородности (Строганов, 1970):

$$|\tau_n| = (H + q + \gamma y) \operatorname{tg} \rho, \quad (1)$$

где H — гидростатическое давление, эквивалентное начальному сцеплению грунта; q — пригрузка на поверхности основания; γ — объемный вес полностью водонасыщенного грунта во взвешенном или не во взвешенном состоянии в зависимости от положения уровня грунтовых вод; y — расстояние от поверхности основания до рассматриваемой точки; ρ — приведенный угол внутреннего трения грунта, определяемый в условиях плоской деформации (Строганов, 1965).

В условии (1) принят гидростатический закон распределения напряжений от пригрузки и собственного веса. Предполагается, что параметры прочности H и ρ в условии (1) определяются на основании трехосных испытаний грунта в полностью стабилизированном состоянии (Sorokina and Stroganov, 1971) или на основании испытаний грунта на срез также в полностью стабилизированном состоянии. Одновременно с этим могут быть использованы результаты полевых испытаний грунта лопастным зондом, которые выражаются так:

¹ Старший научный сотрудник Научно-исследовательского института оснований и подземных сооружений, Москва.

$$|\tau_n| = K_0 + Ky, \quad (2)$$

где K_0 и K определяются линейным выравниванием экспериментальной эпюры (τ_n), полученной по глубине зондирования. Трапецидальный характер эпюры (τ_n) хорошо подтвержден всеми имеющимися результатами зондирования, из которых могут быть отмечены, например, исследования (Cadling, Odenstad), проведенные на больших глубинах в водонасыщенных глинах практически одинаковой плотности.

Нетрудно видеть, что коэффициенты уравнения (2) могут быть выражены через величины, входящие в условие (1), следующим образом:

$$K_0 = (H + q) \operatorname{tg} \rho \text{ и } K = \gamma \operatorname{tg} \rho, \quad (3)$$

откуда, зная величину γ , легко получить значение $\operatorname{tg} \rho$, а также H при заданной величине пригрузки q , если таковая выдерживалась длительное время, достаточное для полной консолидации основания.

Компоненты напряжения, удовлетворяющие условию (1), могут быть представлены так (Строганов, 1970):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{aligned} \right\} = \left. \begin{aligned} \sigma \pm (H + q + \gamma y) \operatorname{tg} \rho \cdot \cos 2\chi, \\ \\ \tau_{xy} = (H + q + \gamma y) \operatorname{tg} \rho \cdot \sin 2\chi, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где χ — угол наклона к оси x максимального главного нормального напряжения.

При $\rho = 0$ уравнения (4) переходят в уравнения для идеально пластической среды (Соколовский, 1960).

Внося (4) в уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \gamma, \quad (5)$$

получим основную систему уравнений гиперболического типа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \mp 2(H + q + \gamma y) \operatorname{tg} \rho \frac{\partial \chi}{\partial x} + \left[\frac{\partial \sigma}{\partial y} \mp 2(H + q + \right. \\ \left. + \gamma y) \operatorname{tg} \rho \frac{\partial \chi}{\partial y} \right] \operatorname{tg} \left(\chi \mp \frac{\pi}{4} \right) = \mp \gamma \operatorname{tg} \rho + \gamma \operatorname{tg} \left(\chi \mp \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Воспользовавшись, например, обычным детерминантным методом, получим для системы (6) два семейства дифференциальных уравнений характеристик поля напряжений

$$dy = \operatorname{tg} \left(\chi \mp \frac{\pi}{4} \right) d\chi,$$

$$d\sigma \mp 2(H + q + \gamma y) \operatorname{tg} \rho d\chi = \mp \gamma \operatorname{tg} \rho dx + \gamma dy. \quad (7)$$

Нетрудно показать, что в рассматриваемом случае дифференциальные уравнения характеристик поля скоростей совпадают с таковыми для поля напряжений, как это имеет место в теории идеально пластических сред.

Заметим, что полученные уравнения описывают пластически неоднородную среду, более общий случай которой впервые рассмотрен

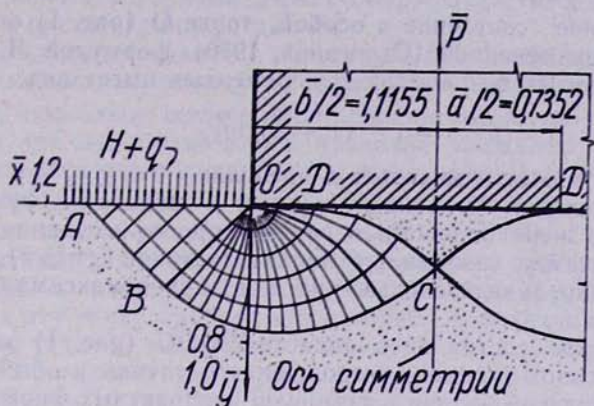


Рис. 1. Характеристики поля напряжений—линии скольжения и жесткие области в пластически неоднородном основании при вертикальном вдавливании жесткого шероховатого штампа; $\bar{p}=6,007$.

Նկ. 1. Հարուստ էրի դաշտի բնութագրերը՝ սահեցման գծեր և կոշտ վայրեր պլաստիկորեն անհամասեռ հիմքում կոշտ խոր-դրարդ շտամպի ուղղահիգ ներմղման ժամանակ: $\bar{p}=6,007$.

Fig. 1. Stress field characteristics—lines of sliding and rigid areas in a plastically non-homogeneous foundation at the vertical pressing-in of a rigid rough plate;

$$\bar{p}=6,007.$$

А. И. Кузнецовым (1958), показавшим также невозможность линеаризации подобных уравнений. Поэтому решение краевых задач для уравнений (6), вообще говоря, может быть получено только численными методами путем представления уравнений (7) в разностной форме. Исключение составляет решение краевых задач для напряженных состояний, не зависящих от координаты x , которое может быть получено в замкнутом виде.

Теперь приступим к решению поставленной задачи. Будем полагать, что в области AOB происходит выпирание грунта (рис. 1) и реализуется максимальное напряженное состояние, не зависящее от координаты x .

Это напряженное состояние определяется известной формулой (Строганов, 1970), которая в безразмерных переменных принимает вид:

$$(\bar{H} + \sigma)_+ = (1 + \operatorname{tg} \rho)(1 + \bar{y}), \quad (8)$$

где $(\bar{H} + \sigma)_+ = \frac{(H + \sigma)_+}{H + q}$ — приведенное напряжение; $\bar{y} = \frac{y}{l}$ — относительная координата рассматриваемой точки; $l = \frac{H + q}{\gamma}$ — характеристическая длина.

Характеристики в этой области состоят из двух семейств ортогональных прямых, а границей области служит характеристика

$$\bar{x} = \bar{y} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}, \quad (9)$$

вдоль которой $\chi=0$.

Напряженное состояние в особой точке О (рис. 1) определяется несколько видоизмененной (Строганов, 1970) формулой Л. Прандтля, которая в принятых безразмерных переменных имеет вид:

$$\overline{H+\sigma} = 1 + (1 + 2\chi)\operatorname{tg}\rho, \quad (10)$$

причем угол χ может изменяться в пределах $0 \leq \chi \leq 3/4\pi$, поскольку контактная поверхность между грунтом и штампом (фундаментом), вследствие его шероховатости, в случае «проскальзывания» грунта по поверхности штампа совпадает с характеристикой ($\chi=3/4\pi$), являющейся одновременно линией скольжения или линией максимальной скорости сдвига.

Напряженное состояние в области *BODC* (рис. 1) определяется численным методом по схеме вырожденного случая и обычной начальной характеристикой задачи с помощью рекуррентных формул, полученных на основе системы уравнений (7), в безразмерных переменных в следующем виде:

$$\overline{x} = \frac{\overline{x_1}\operatorname{tg}(\chi_1 - \frac{\pi}{4}) - \overline{x_2}\operatorname{tg}(\chi_2 + \frac{\pi}{4}) - \overline{y_1} + \overline{y_2}}{\operatorname{tg}(\chi_1 - \frac{\pi}{4}) - \operatorname{tg}(\chi_2 + \frac{\pi}{4})}, \quad (11)$$

$$\overline{y} = (\overline{x} - \overline{x_1})\operatorname{tg}(\chi_1 - \frac{\pi}{4}) + \overline{y_1} \text{ или } \overline{y} = (\overline{x} - \overline{x_2})\operatorname{tg}(\chi_2 - \frac{\pi}{4}) + \overline{y_2}. \quad (12)$$

$$\chi = \overline{\Sigma_2} - \overline{\Sigma_1}, \quad (13)$$

$$(\overline{H+\sigma}) = 2[(1 + \overline{y_2})\overline{\Sigma_1} + (1 + \overline{y_1})\overline{\Sigma_2}]\operatorname{tg}\rho, \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{\Sigma_1} &= \frac{(\overline{H+\sigma_1}) - 2(1 + \overline{y_1})\chi_1\operatorname{tg}\rho - (\overline{x} - \overline{x_1})\operatorname{tg}\rho + (\overline{y} - \overline{y_1})}{2[(1 + \overline{y_1}) + (1 + \overline{y_2})]\operatorname{tg}\rho}, \\ \overline{\Sigma_2} &= \frac{(\overline{H+\sigma_2}) + 2(1 + \overline{y_2})\chi_2\operatorname{tg}\rho + (\overline{x} - \overline{x_2})\operatorname{tg}\rho + (\overline{y} - \overline{y_2})}{2[(1 + \overline{y_1}) + (1 + \overline{y_2})]\operatorname{tg}\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Исходными данными для решения этих уравнений служат полученные выше величины на характеристике *OB* и в особой точке.

Для повышения точности вычислений, как правило, следует находить второе приближение путем последующей подстановки в формулы (11) и (12) вместо χ_1 и χ_2 значений $\overline{\chi_1} = 1/2(\chi + \chi_1)$ и $\overline{\chi_2} = 1/2(\chi + \chi_2)$ и повторного вычисления значений $(\overline{H+\sigma})$ и χ по формулам (13) и (14).

Помимо этого, для определения напряженного состояния вдоль контактной поверхности *OD*, где имеет место «проскальзывание», необходимо пользоваться рекуррентными формулами смешанной задачи, которые имеют следующий вид:

$$\overline{x} = \overline{x_1} - \frac{\overline{y_1}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\chi_1 + 3/4\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{4}}, \quad \overline{y} = 0, \quad (16)$$

$$(\overline{H+\sigma}) = (\overline{H+\sigma_1}) + 2(1 + \overline{y_1})(3/4\pi - \chi_1)\operatorname{tg}\rho - (\overline{x} - \overline{x_1})\operatorname{tg}\rho - \overline{y_1}, \quad (17)$$

непосредственно получаемый из указанной системы уравнений. Реали-

зация приведенного алгоритма может быть осуществлена посредством приводимой в приложении программы.

Численное интегрирование в области $BODC$, вообще говоря, ничем пока не ограничено, поскольку не ограничены длины отрезков OB и OD . Однако, поскольку штамп имеет ограниченную ширину $\bar{b}$, то на продолжении его оси симметрии в пределах основания должны быть выполнены определенные граничные условия, которые сводятся к тому, чтобы $\chi = \pi/2$, а значения $(H + \sigma)$ справа и слева оси симметрии были равны. Следовательно, интегрирование в области $BODC$ должно быть ограничено такими линиями скольжения, которые при пересечении на оси симметрии — в точке C удовлетворяют указанным условиям. Практически найти эту точку удобнее всего линейной интерполяцией на оси симметрии при условии, когда поле характеристик несколько продолжено за пределы предполагаемого в процессе численного интегрирования. Далее координаты точек B и D , а также характеристики BC и DC , ограничивающие пластическую область, могут быть найдены, например, численным интегрированием по рекуррентным формулам (11) — (15), так сказать, в обратном направлении от точки C . Одновременно с этим будут получены значения $(H + \sigma)$ и χ вдоль характеристики DC .

Совершенно очевидно, что область DCD будет жесткой, т. е. не будет находиться в пластическом состоянии, ибо для распространения пластической области за пределы характеристики DC необходимо большее значение $(H + \sigma)$ с противоположной стороны оси симметрии, в то время как имеет место очевидное равенство этих напряжений. На основании тех же соображений область $ABCBA$ будет также жесткой.

Для определения несущей способности основания достаточно вычислить значения вертикального приведенного напряжения $(H + \sigma_y)$ вдоль участка «проскальзывания» OD и вдоль характеристики DC по формуле

$$(H + \sigma_y) = (\overline{H + \sigma}) - (1 + \bar{\gamma}) \operatorname{tg} \epsilon \cos 2\chi \quad (18)$$

и проинтегрировать в пределах ширины $(\bar{b})$ штампа, вычтя затем собственный вес жесткого ядра и силу гидростатического давления, эквивалентного начальному сцеплению.

Тогда получим

$$\overline{P} = 2 \int_0^{\bar{b}/2} (\overline{H + \sigma_y}) d\bar{x} - 2 \int_{\frac{\bar{b}-a}{2}}^{\bar{b}/2} \overline{y_y} d\bar{x} - \overline{H} \bar{b}, \quad (19)$$

где $\overline{y_y}$ — ординаты поверхности жесткого ядра.

Ясно, что абсолютная величина предельного давления, например, вдоль поверхности ODC , может быть получена умножением на $(H + q)$ ординат эпюры (18), а все линейные размеры сетки характеристик и, следовательно, всей области пластического течения должны быть умножены на $l = (H + q)/\gamma$, т. е. на характерную длину. Абсолютная величина несущей способности основания может быть выражена так:

$$P = \frac{(H + q)^2}{\gamma} \overline{P}, \quad (20)$$

где безразмерная величина несущей способности $\overline{P}$ определяется в со-

ответствии с (19) численным интегрированием, например, методом трапеций.

В качестве примера решена задача (рис. 1) о несущей способности основания, угол внутреннего трения которого принят равным $\varphi = 18^\circ 54'$ ($\operatorname{tg} \varphi = 0.342$), чем характеризуется степень неоднородности основания. Безразмерная величина гидростатического давления, эквивалентного начальному сцеплению, принята равной $\bar{H}=1$, причем пригрузка отсутствует ($q=0$). В результате численного решения задачи для штампа полушириной $\bar{b}/2=1.1155$ в основании получена сетка характеристик (рис. 1), очертание жесткого ядра, напряженное состояние в каждом узле указанной сетки и соответствующие величины (табл. 1) вертикального приведенного напряжения ($\bar{H} + \sigma_y$) на контактной поверхности и поверхности жесткого ядра.

Таблица 1

Величины вертикального приведенного напряжения на контактной поверхности штампа и поверхности жесткого ядра

$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{H} + \sigma$	γ	$\bar{H} + \sigma_y$
+0.0000	0.0000	2.9536	2.3562	2.9536
-0.1661	0.0000	3.2432	2.3562	3.2432
-0.3803	0.0000	3.5449	2.3562	3.5449
-0.6368	0.0458	3.6929	2.0486	3.8903
-0.8928	0.1691	3.9170	1.7853	4.2279
-1.1155	0.3513	4.1948	1.5705	4.5368

На основании этих данных и выражения (19) получена безразмерная величина несущей способности $\bar{P}=6.007$, соответствующая относительной ширине штампа $\bar{b}=2.2310$, что дает среднюю безразмерную величину вертикального напряжения $\bar{\sigma}_y = \bar{P}/\bar{b} = 2.693$ на контактной поверхности штампа.

В заключение следует заметить, что в зависимости от размеров штампа длина участка «проскальзывания» OD может меняться в широких пределах, причем уменьшение размеров штампа приводит даже к его исчезновению, как это имеет место в классической задаче Л. Прандтля (Качанов, 1969) при вдавливании жесткого шероховатого штампа в идеально пластическую среду.

ПРОГРАММА

вычислений по рекуррентным формулам (11)–(17) для ЭВМ «НАИРИ»

1. допустим $m=1$ $j=15$; 2. введем λ ; 3. допустим $i=1$ $k=0$ $m_k=0$;
4. вычислим $e_k = e_k + 0.1$; 5. вычислим $p_k = p_k + 0.1342$; 6. вычислим $l_k = e_k$;
7. печатаем с 5 знаками m l_k p_k ; 8. допустим $\bar{v}=1$ $y=0$ $z=0.785398$;
9. вычислим $t = \operatorname{tg}((m_k + y)/\bar{v} - z)$; 10. вычислим $s = \operatorname{tg}((m_1 + y)/\bar{v} + z)$;
11. вычислим $u = (e_k t - e_1 s - l_k + l_1)/(t - s)$; 12. спросим; 13. вычислим $s = (u - e_k)t + l_k$;
14. вычислим $n = 2\lambda(2 + 1/l_k)$; 15. вычислим $t = (p_k - 2\lambda m_k(1 + l_k) - (u - e_k)\lambda + s - l_k)/n$;
16. вычислим $g = (p_1 + 2\lambda m_1(1 + l_1) + (u - e_1)\lambda + s - l_1)/n$;
17. вычислим $n = 2\lambda((1 + l_1)t + (1 + l_k)g)$; 18. вычислим $y = g - t$;
19. вставим $\bar{v} = \bar{v} + 1$; 20. спросим; 21. если $\bar{v} < 2.1$ идти к 9;
22. печатаем с 5 знаками u s y ; 23. вставим $i = i + 1$ $k = k + 1$;
24. допустим $e_k = u$ $l_k = s$ $p_k = n$ $m_1 = y$; 25. если $i < j$ идти к 8;
26. допустим $l_1 = 0$ $m_1 = 2.3262$; 27. вычислим $e_1 = e_k - l_k/(t g((m_k + 3z)/2 - z))$;
28. вычисли $m_1 = p_1 + 2\lambda((1 + l_1)(3z - m_k) - \lambda(e_1 - e_k) - l_k)$;
29. печатаем с 5 знаками e_1 p_1 ; 30. вставим $m = m + 1$ $j = j + 1$; 31. идти к 3.

ОБОЗНАЧЕНИЯ, ПРИНЯТЫЕ В ПРОГРАММЕ

M —номер горизонтальной строки; j —*max* номер столбца в каждой строке без диагонального; первоначально—количество исходных данных; в данном случае $j=15$; $\lambda=1gr$, $z=\pi/4$; l —индексация, совпадающая со вторым направлением; k —то же с первым направлением;

$m_k = \overline{m} - \gamma$, $e_k = \overline{m} - x$, $l_k = \overline{s} - \overline{y}$, $p_k = \overline{H} - \overline{z}$, где $\overline{m}$, $\overline{s}$, $\overline{H}$, $\overline{m}$ —буквы, используемые для первого и второго приближений, их количество регулируется δ ;

$(N-1)$ —*max* номер столбца в последней строке вычислений.

После ввода программы необходимо сделать некоторые исправления:

1. Надо исправить 22 оператор. В режиме «выдача памяти» вывести на печать $(68+22=90)$ 90 $m2$; полученные числа будут начальным $[A]$ и конечным $[B]$ номерами программы печати. В режиме команд ввести следующие команды:

Ak nn52H5 0227OH nn53H5 0227OH
nn40H5 0227OH nn55H5 02274H и Bn ш,

2. Для ввода исходной информации необходимо в режиме «выдача памяти» вывести начальные номера ячеек, в которых записываются массивы x_j , y_j , γ_j , z_j , $[E]$, L , P , MJ , т.е. 48 $m4$. В режиме ввода чисел с плавающей запятой вводятся построчно массивы: $En-x_j$; $Ln-y_j$, $Pn-\gamma_j$, $Mn-z_j$.

ԿԱՐՄԻ ԽՈՐԴՈՒԹՐՈՐԻ ՍԱԼԻ ՈՒՂԱՋԻԿ ՆԵՐԱՂՈՒՄԸ ՊԼԱՍՏԻԿՈՐԵՆ ԱՆՀԱՄԱՍՆԻ ԳՐՈՒՆՏԻ ՄԵՋ

Տեխն. գիտ. դոկտոր, ԱԼԵՔՍԵՅ ՍՏՐՈԳԱՆՈՎ¹

Ռեֆերատ. Տրվում է պլաստիկության տեսության խնդրի մի թվային լուծում, որը վերաբերում է չկայունացած վիճակում գտնվող պլաստիկական անհամասեռ գրունտի կրողականությանը, երբ վերջինիս մեջ ուղղաձիգ ներմղվում է կարծր խորդորորդ սալ: Այդ տեղի է ունենում կոնսոլիդացման գործակցի ցածր նշանակություն ունեցող կավերի, տիղմերի և տորֆերի վրա տեղադրած հիմքերի բավականին արագ բեռնավորման դեպքում:

VERTICAL PRESSING-IN OF A RIGID ROUGH PLATE INTO A PLASTICALLY NON-HOMOGENEOUS SOIL

ALEXEY S. STROGANOV¹, Dr. Sc. (Eng.)

SYNOPSIS. The paper deals with the numerical solution of the problem of plasticity theory concerning the bearing capacity of the plastically non-homogeneous soil in an unstabilized state under a rigid rough plate by vertical pressing-in. This takes place at a sufficiently quick loading of foundations on clays, silts and peats with low values of the coefficient of consolidation.

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ — ЛИТЕРАТУРА — REFERENCES

- Качанов Л. М., 1969. Основы теории пластичности. Изд. «Наука».
- Кузнецов А. И., 1958. Плоская деформация неоднородных пластических тел. Вестник Ленинградского университета, № 13, 112—131.
- Соколовский В. В., 1960. Статика сыпучей среды. Физматгиз.
- Строганов А. С., 1965. Анализ плоской пластической деформации грунта. «Инженерный журнал» АН СССР, том. I, вып. 4, М.
- Строганов А. С., 1970. Несущая способность оснований в нестабилизированном состоянии. Сб. «Строительство на слабых грунтах», Изд. Рижского политехнического института, Рига.
- Cadiling L. and Odenstad S., 1950. The vane borer. Proc. Roy. Swed. Geotech. Inst. No. 2.
- Sorokina G. Y. and Stroganov A. S., 1971. The strength of clay soils dependent on time factor. Proc. Fourth Asian Regional Conf. Soil Mech. Found. Engg., Bangkok, Thailand, v. I.

¹ Հիմքերի և տորերկրյա կառուցվածքների դիտահետազոտական ինստիտուտի ավագ գիտաշխատող, Մոսկվա:

¹ Senior Researcher, Research Institute of Foundations and Underground Structures Moscow.