Известия НАН Армении, Математика, том 54, н. 6, 2019, стр. 54 – 65

О СХОДИМОСТИ ЧАСТИЧНЫХ СУММ РЯДОВ ФРАНКЛИНА К $+\infty$

К. А. НАВАСАРДЯН, В. Г. МИКАЕЛЯН

Ереванский государственный университет
E-mails: *knavasard@ysu.am*, *mikvazgen@gmail.com*

Аннотация. Доказано, что если $\{n_k\}$ любая возрастающая последовательность натуральных чисел и отношение n_{k+1} на n_k ограничено, то n_k-я частичная сумма ряда по системе Франклина не может стремиться к $+\infty$ на множестве положительной меры. Доказано также, что если это отношение не ограничено, то существует ряд по системе Франклина, n_k-я частичная сумма которого стремиться к $+\infty$ почти всюду в $[0, 1]$.

MSC2010 number: 42C05.

Ключевые слова: система Франклина; ряд Франклина; сходимость к $+\infty$.

1. Введение

В 1915 году Н. Н. Лузином [1] была поставлена задача: может ли тригонометрический ряд сходится к $+\infty$ на множестве положительной меры?

С тех пор многие математики исследовали вопрос сходимости или суммируемости к $+\infty$ ортогональных рядов на множестве положительной меры.

Ю. Б. Гермейер [2] доказал, что тригонометрический ряд не может суммироваться методом Римана к $+\infty$ на множестве положительной меры. Н. Н. Лузин и И. И. Привалов [3] построили пример тригонометрического ряда, почти всюду суммируемого к $+\infty$ методом Абеля. Д. Е. Меньшов [4] доказал, что для любой функции, не объязательно конечной почти всюду, существует тригонометрический ряд, сходящийся к ней по мере. В частности, существует тригонометрический ряд, который по мере сходится к $+\infty$ на $[-\pi, \pi]$. А. А. Талалян [5] установил, что для любой измеримой на $[-\pi, \pi]$ функции f существует тригонометрический ряд, сходящийся к ней по мере и почти всюду на множестве, где f конечна. Наконец, в 1988 году С. В. Конягин [6] решил проблему Н. Н. Лузина, доказав следующую теорему.

Теорема 1.1. *Пусть $\underline{S}(x)$ и $\overline{S}(x)$ нижние и верхние пределы частичных сумм некоторого тригонометрического ряда. Тогда*

$$\mu\left(\left\{x \in [-\pi, \pi] : -\infty < \underline{S}(x) \leq \overline{S}(x) = +\infty\right\}\right) = 0.$$

В частности, тригонометрический ряд не может сходиться к $+\infty$ на множестве положительной меры.

Для рядов по системам Хаара и Уолша имеется следующая картина. А. А. Талалян и Ф. Г. Арутюнян [7] доказали, что ряды по системам Хаара и Уолша не могут сходится к $+\infty$ на множестве положительной меры. В работах [8], [9] даны более простые доказательства этой теоремы. Однако (см. [10]), существуют равномерно ограниченные ортонормированные системы функций, ряды по которым могут сходится к $+\infty$ на множестве положительной меры при любой перестановке членов ряда. Н. Б. Погосян [11] установил, что для каждой полной ортонормированной системы существует ряд, который после подходящей перестановки сходится почти всюду к $+\infty$.

В работе [12] Г. Г. Геворкян доказал, что ряд по системе Франклина не может сходится к $+\infty$ на множестве положительной меры.

Теорема 1.2. *([12]) Пусть $S_n(x)$ частичная сумма некоторого ряда по системе Франклина. Тогда*

$$\mu\left(\left\{x \in [0,1] : \lim_{k\to\infty} S_{2^k}(x) = +\infty\right\}\right) = 0.$$

В настоящей работе изучается возможность стремления к $+\infty$ частичных сумм $S_{n_k}(x)$ ряда по системе Франклина на множестве положительной меры.

2. Необходимые определения и формулировки основных результатов

Пусть $n = 2^\mu + \nu$, где $\mu = 0, 1, 2, \ldots$ и $1 \leq \nu \leq 2^\mu$. Обозначим

$$s_{n,i} = \begin{cases} \dfrac{i}{2^{\mu+1}}, & 0 \leq i \leq 2\nu \\ \dfrac{i-\nu}{2^\mu}, & 2\nu < i \leq n. \end{cases}$$

Положим также $s_{n,-1} = s_{n,0} = 0$ и $s_{n,n+1} = s_{n,n} = 1$.

Обозначим через S_n пространство непрерывных и кусочно-линейных на $[0,1]$ функций, с узлами $\{s_{n,i}\}_{i=0}^n$ т.е. $f \in S_n$, если $f \in C[0,1]$ линейна на каждом из интервалов $[s_{n,i-1}, s_{n,i}]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ясно, что $\dim S_n = n + 1$ и множество

$\{s_{n,i}\}_{i=0}^{n}$ получается добавлением $s_{n,2\nu-1}$ во множество $\{s_{n-1,i}\}_{i=0}^{n-1}$. Следовательно, существует единственное (с точностью до знака) функция $f_n \in S_n$, которая ортогональна к S_{n-1} и $\|f_n\|_2 = 1$. Положив $f_0(x) = 1$ и $f_1(x) = \sqrt{3}(2x-1), x \in [0,1]$, мы получим ортонормальную систему $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, которая эквивалентном образом была определена Франклином в [13].

Пусть $\{n_k\}$ любая возрастающая последовательность натуральных чисел. Обозначим через $\sigma_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, суммы первых $n_k + 1$ членов ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x). \tag{2.1}$$

т.е.

$$\sigma_k(x) = \sum_{n=0}^{n_k} a_n f_n(x).$$

В настоящей работе доказаны следующие теоремы.

Теорема 2.1. *Если* $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{n_{k+1}}{n_k} < +\infty$, *то*

$$\mu\left(\left\{x \in [0,1] : \lim_{k\to\infty} \sigma_k(x) = +\infty\right\}\right) = 0.$$

Теорема 2.2. *Если* $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{n_{k+1}}{n_k} = +\infty$, *то существует ряд по системе Франклина такой, что* $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_k(x) = +\infty$ *почти всюду в* $[0,1]$.

Теорема 2.3. *Для возрастающей последовательности* $\{n_k\}$ *условие*

$$\mu\left(\left\{x \in [0,1] : \lim_{k\to\infty} \sigma_k(x) = +\infty\right\}\right) = 0$$

выполняется для всех рядов вида (2.1) *тогда и только тогда, когда* $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{n_{k+1}}{n_k} < +\infty$.

Теорема 2.3 следует из теорем 2.1 и 2.2.

При доказательстве теоремы 1.1 важную роль играет понятие скалярного произведения ряда (2.1) на функции пространства S_n, определенное в работе [14] и успешно примененное в вопросах единственности рядов по системе Франклина (см. также [15]).

Через S формально обозначим ряд (2.1). Из определения системы Франклина следует, что если $g \in S_m$ и $n > m$, то

$$\int_0^1 f_n(x)\, g(x)\, dx = 0.$$

Поэтому можно определить скалярное произведение ряда S и функции $g \in S_m$ по формуле

$$(S, g) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^1 f_n(x)\, g(x)\, dx = \sum_{n=0}^{m} a_n \int_0^1 f_n(x)\, g(x)\, dx.$$

Очевидно, что если $g_1 \in S_{m_1}$ и $g_2 \in S_{m_2}$, то для любых α, β имеем

$$(S, \alpha g_1 + \beta g_2) = \alpha (S, g_1) + \beta (S, g_2).$$

Пусть δ_{ij}-символ Кронекера, т.е. $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$, и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Для $n \geq 2$ определим функции $\{N_{n,i}(t)\}_{i=0}^{n}$ следующим образом:

$$N_{n,i}(s_{n,j}) = \delta_{ij}, j = 0, \ldots, n \text{ и } N_{n,i}(t) \text{ линейна на } [s_{n,j-1}, s_{n,j}],\ j = 1, \ldots, n.$$

Функции $\{N_{n,i}(t)\}_{i=0}^{n}$ нормированы в пространстве $C[0,1]$ и из $N_{n,i}(s_{n,j}) = \delta_{ij}$ следует, что система $\{N_{n,i}(t)\}_{i=0}^{n}$ образует базис в S_n. Обозначив

$$M_{n,i}(t) = \frac{2}{s_{n,i+1} - s_{n,i-1}} N_{n,i}(t),$$

получим другой базис в S_n, который нормирован в $L[0,1]$.

Так как в дальнейшем изложении мы будем иметь дело только с функциями $M_{n,i}$, когда $n = n_k$, то с целью уменьшения количества индексов, вместо $M_{n_k,i}$ будем писать M_i^k

Введем также обозначение $\tau_i^k = s_{n_k,i}$, $\Delta_i^k = \operatorname{supp} M_i^k = [\tau_{i-1}^k, \tau_{i+1}^k]$. Следующие три леммы впервые появились в работах [14], [16], [12].

Лемма 2.1. *Пусть функция φ линейна на отрезках $[\tau_{i-1}^k, \tau_i^k]$ и $[\tau_i^k, \tau_{i+1}^k]$. Тогда*

$$(\varphi, M_i^k) := \int_0^1 \varphi(t)\, M_i^k(t) = \frac{1}{6}\varphi(\tau_{i-1}^k) + \frac{2}{3}\varphi(\tau_i^k) + \frac{1}{6}\varphi(\tau_{i+1}^k),$$

если $\tau_{i+1}^k - \tau_i^k = \tau_i^k - \tau_{i-1}^k$ и

$$(\varphi, M_i^k) := \int_0^1 \varphi(t)\, M_i^k(t) = \frac{1}{9}\varphi(\tau_{i-1}^k) + \frac{2}{3}\varphi(\tau_i^k) + \frac{2}{9}\varphi(\tau_{i+1}^k),$$

если $\tau_{i+1}^k - \tau_i^k = 2(\tau_i^k - \tau_{i-1}^k)$.

Лемма 2.2. *Для любых $M_{j_0}^{\nu_0}$ и $\nu > \nu_0$ существуют числа α_j такие, что*

$$M_{j_0}^{\nu_0} = \sum_j \alpha_j M_j^{\nu}$$

причем

$$\sum_j \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0 \text{ и } \alpha_j = 0, \text{ если } \Delta_j^{\nu} \not\subset \Delta_{j_0}^{\nu_0}.$$

Лемма 2.3. *Если* $(S, M_{n,i}) =: A < 0$, *то*

$$\mu\left(\left\{x \in \Delta_{n,i} : \sum_{i=0}^{n} a_i f_i(x) < \frac{A}{2}\right\}\right) > \frac{\mu(\Delta_{n,i})}{9}.$$

3. Доказательство теоремы 2.1

Из $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{n_{k+1}}{n_k} < +\infty$ следует, что существует абсолютная константа $C \in (0,1)$ такая, что для любых $l \in \mathbb{N}$, $i = 0, 1, \ldots, n_l$, $j = 0, 1, \ldots, n_{l-1}$,

$$\mu\left(\Delta_i^l\right) > C\mu\left(\Delta_j^{l-1}\right). \tag{3.1}$$

Обозначим $E = \left\{x \in [0,1] : \lim\limits_{k\to\infty} \sigma_k(x) = +\infty\right\}$. Допустим $\mu(E) > 0$. Тогда найдется отрезок $\Delta_{i_0}^{k_0}$ такой, что

$$\mu\left(\Delta_{i_0}^{k_0} \cap E\right) > (1 - 0.0001C)\,\mu\left(\Delta_{i_0}^{k_0}\right). \tag{3.2}$$

Следовательно, существует число $L < 0$, что

$$\mu(E_L) < 0.0001C\mu\left(\Delta_{i_0}^{k_0}\right), \text{ где } E_L = \left\{x \in \Delta_{i_0}^{k_0} : \inf_k \sigma_k(x) < L\right\}. \tag{3.3}$$

Для интегрируемой функции g обозначим

$$\mathcal{M}_2(g,x) = \sup_{k,i:\Delta_i^k \ni x} \frac{1}{\mu\left(\Delta_i^k\right)} \int\limits_{\Delta_i^k} |g(t)|\, dt.$$

Ясно, что $\mathcal{M}_2(g,x)$ не превосходит максимальную функцию Харди-Литтлвуда функции g и поэтому

$$\mu(D) < 0.01\mu\left(\Delta_{i_0}^{k_0}\right), \text{ где } D = \left\{x \in \Delta_{i_0}^{k_0} : \mathcal{M}_2\left(\chi_{E_l}, x\right) > \frac{C}{15}\right\}. \tag{3.4}$$

В силу леммы 2.3 имеем, что

$$\left(\sigma_k, M_i^k\right) > 2L, \text{ если } \Delta_i^k \subset \Delta_{i_0}^{k_0} \text{ и } \Delta_i^k \not\subset D. \tag{3.5}$$

Методом математической индукции для любого $k > k_0$ найдем представление

$$M_{i_0}^{k_0} = \sum_{l=k_0}^{k} \sum_{j\in\Lambda_l} \alpha_j^{(l)} M_j^l + \sum_{j\in B_k} \beta_j^{(k)} M_j^k, \tag{3.6}$$

где

$$\alpha_j^{(l)} \geq 0, \quad \beta_j^{(k)} \geq 0, \quad \sum_{l=k_0}^{k} \sum_{j\in\Lambda_l} \alpha_j^{(l)} + \sum_{j\in B_k} \beta_j^{(k)} = 1, \tag{3.7}$$

а множества Λ_l и B_k определим по ходу.

Сначала отметим, что из (3.4) следует, что $\Delta_{i_0}^{k_0} \not\subset D$. В случае $k = k_0$, обозначив $\Lambda_{k_0} = \emptyset$, $B_{k_0} = \{i_0\}$, будем иметь

$$M_{i_0}^{k_0} = \sum_{j \in B_k} M_j^k.$$

Допустим имеем представление (3.6) для k и получим ее для $k+1$. В силу леммы 2.2, каждая функция $M_i^k, i \in B_k$, представляется линейной комбинацией функций M_i^{k+1} с неотрицательными коэффициентами. Подставляя эти представления во вторую сумму из (3.7), получим

$$\sum_{j \in B_k} \beta_j^{(k)} M_j^k = \sum_{j \in \Lambda_{k+1}} \alpha_j^{(k+1)} M_j^{k+1} + \sum_{j \in B_{k+1}} \beta_j^{(k+1)} M_j^{k+1}, \tag{3.8}$$

где

$$\Lambda_{k+1} = \left\{ j : \Delta_j^{k+1} \subset D \text{ с } \alpha_j^{k+1} \neq 0 \right\} \tag{3.9}$$

и

$$B_{k+1} = \left\{ j : \Delta_j^{k+1} \not\subset D \text{ с } \beta_j^{k+1} \neq 0 \right\}. \tag{3.10}$$

Вместо последней суммы в (3.6), подставляя суммы в правой части равенства (3.8), получим (3.6) для $k+1$. Соотношения $\alpha_j^{(l)} \geq 0,\ \beta_j^{(k)} \geq 0$ следуют из неотрицателности коэффициентов в (3.6) в лемме 2.2. А последнее равенство из (3.7) следует из того, что интегралы всех функций, входящих в (3.6) равны единице.

Докажем, что

$$\left(S, M_i^k \right) > 2L, \text{ когда } i \in \Lambda_k. \tag{3.11}$$

Допустим обратное, т.е. $\left(S, M_i^k \right) \leq 2L$, тогда в силу леммы 2.3

$$\mu \left(\left\{ x \in \Delta_i^k : \sigma_k(x) < L \right\} \right) > \frac{\mu\left(\Delta_i^k\right)}{9}. \tag{3.12}$$

Из определения Λ_l в представлении (3.6) имеем, что если $i \in \Lambda_k$, то существует такое $j \in B_{k-1}$, что $\Delta_i^k \subset \Delta_j^{k-1}$. Из (3.12) и (3.1) следует, что

$$\mu \left(\left\{ x \in \Delta_j^{k-1} : \sigma_k(x) < L \right\} \right) > \frac{\mu\left(\Delta_i^k\right)}{9} > \frac{C\mu\left(\Delta_j^{k-1}\right)}{9}.$$

Отсюда получается (см. также (3.3) и (3.4)), что $\Delta_j^{k-1} \subset D$ для некоторого $j \in B_{k-1}$, которое противоречит (3.10). Следовательно выполняется (3.11).

Итак, для любого $k \geq k_0$ имеем представление (3.6) и соотношения (3.7), (3.11). Тогда для любого k имеем

$$d := \left(S, M_{i_0}^{k_0}\right) = \sum_{l=k_0}^{k} \sum_{j \in \Lambda_l} \alpha_j^{(l)} \left(S, M_j^l\right) + \sum_{j \in B_k} \beta_j^{(k)} \left(S, M_j^k\right) = \tag{3.13}$$

$$= \sum_{l=k_0}^{k} \sum_{j \in \Lambda_l} \alpha_j^{(l)} \left(\sigma_l, M_j^l\right) + \sum_{j \in B_k} \beta_j^{(k)} \left(\sigma_k, M_j^k\right) =: I_1(k) + I_2(k).$$

Для $I_1(k)$ имеем (см. (3.11))

$$I_1(k) \geq 2L \sum_{l=k_0}^{k} \sum_{j \in \Lambda_l} \alpha_j^{(l)}. \tag{3.14}$$

Для произвольного положительного $L_0 > -100L$ обозначим

$$\Omega_k = \left\{ i \in B_k : \sigma_k\left(\tau_i^k\right) > L_0 \right\}.$$

Для $i \in \Omega_k$ имеем, что $\Delta_i^k \not\subset D$. Следовательно

$$\mu\left(\left[\tau_{i-1}^k, \tau_i^k\right] \cap E_L\right) < \frac{C}{5}\left(\tau_i^k - \tau_{i-1}^k\right) \tag{3.15}$$

и

$$\mu\left(\left[\tau_i^k, \tau_{i+1}^k\right] \cap E_L\right) < \frac{C}{5}\left(\tau_{i+1}^k - \tau_i^k\right). \tag{3.16}$$

Обозначим $\omega_1 = \sigma_k\left(\tau_{i-1}^k\right)$, $\omega_2 = \sigma_k\left(\tau_i^k\right)$, $\omega_3 = \sigma_k\left(\tau_{i+1}^k\right)$. Из (3.15) и линейности функции σ_k на $\left[\tau_{i-1}^k, \tau_i^k\right]$ следует, что если $\omega_1 < L$, то $\dfrac{\omega_2 - \omega_1}{L - \omega_1} > \dfrac{5}{C}$. Следовательно, в любом случае $\omega_1 > \dfrac{5L}{5-C} - \dfrac{C}{5-C}\omega_2$. Аналогично, из (3.16) получается, что $\omega_3 > \dfrac{5L}{5-C} - \dfrac{C}{5-C}\omega_2$. Поэтому из леммы 2.1 получаем

$$\left(\sigma_k, M_i^k\right) \geq \min\left\{ \frac{1}{6}\omega_1 + \frac{2}{3}\omega_2 + \frac{1}{6}\omega_3, \frac{1}{9}\omega_1 + \frac{2}{3}\omega_2 + \frac{2}{9}\omega_3 \right\} \geq$$

$$\geq \frac{2}{3}\omega_2 + \frac{1}{3}\left(\frac{5L}{5-C} - \frac{C}{5-C}\omega_2\right) \geq \frac{7}{12}\omega_2 - \frac{0.05L_0}{12} > \frac{L_0}{2}, \text{ когда } i \in \Omega_k. \tag{3.17}$$

Из (3.13), (3.14), (3.5), (3.10), (3.17), следует

$$d \geq 2L\left(\sum_{l=k_0}^{k} \sum_{j \in \Lambda_l} \alpha_j^{(l)} + \sum_{j \in B_k \setminus \Omega_k} \beta_j^{(k)} \right) + 0.5L_0 \sum_{j \in \Omega_k} \beta_j^{(k)}. \tag{3.18}$$

Учитывая, что интегралы от функций M_j^l, $l \geq k_0$, $l \in \Lambda_k$ равны единице и имеет место (3.6), получим

$$\sum_{l=k_0}^{k} \sum_{j\in\Lambda_l} \alpha_j^{(l)} = \sum_{l=k_0}^{k} \sum_{j\in\Lambda_l} \alpha_j^{(l)} \int\limits_{\Delta_j^l} M_j^l(x)\,dx \leq \int\limits_{F_1} M_{i_0}^{k_0}(x)\,dx,$$

где $F_1 = \bigcup\limits_{l=k_0}^{k} \bigcup\limits_{j\in\Lambda_k} \Delta_j^l$.

По определению Λ_k имеем $F_1 \subset D$. Следовательно $\mu(F_1) \leq 0.01\mu\left(\Delta_{i_0}^{k_0}\right)$ и поэтому

$$\sum_{l=k_0}^{k} \sum_{j\in\Lambda_l} \alpha_j^{(l)} \leq \mu(F_1) \left\| M_{i_0}^{k_0} \right\|_\infty \leq 0.02. \tag{3.19}$$

Теперь докажем, что при достаточно больших k имеет место

$$\sum_{j\in B_k\setminus\Omega_k} \beta_j^{(k)} \leq 0.9. \tag{3.20}$$

Обозначим

$$\Gamma_0^k := \left\{ i : \Delta_i^k \subset \Delta_{i_0}^{k_0} \right\}, \quad m = \operatorname{card}\left(\Gamma_0^k\right) + 1. \tag{3.21}$$

Ясно, что для каждого $i \in \Gamma_0^k$

$$\frac{1}{2m}\mu\left(\Delta_{i_0}^{k_0}\right) \leq \left|\tau_{i+1}^k - \tau_i^k\right| \leq \frac{2}{m}\mu\left(\Delta_{i_0}^{k_0}\right). \tag{3.22}$$

Положим $\tilde{\Delta}_j^k = \left[\dfrac{\tau_{j-1}^k + \tau_j^k}{2}, \dfrac{\tau_j^k + \tau_{j+1}^k}{2}\right]$. Заметим, что

$$\sum_{j\in B_k\setminus\Omega_k} \beta_j^{(k)} = \sum_{j\in B_k\setminus\Omega_k} \beta_j^{(k)} M_j^k\left(\tau_j^k\right) \frac{\tau_{j+1}^k - \tau_{j-1}^k}{2} \leq \sum_{j\in B_k\setminus\Omega_k} M_{i_0}^{k_0}\left(\tau_j^k\right) \frac{\tau_{j+1}^k - \tau_{j-1}^k}{2} \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{j\in B_k\setminus\Omega_k \\ j\notin\{i_1,i_2\}}} \int\limits_{\tilde{\Delta}_j^k} M_{i_0}^{k_0}(t)\,dt + M_{i_0}^{k_0}\left(\tau_{i_0}^{k_0}\right) \frac{\tau_{i_1+1}^k - \tau_{i_1-1}^k}{2} + M_{i_0}^{k_0}\left(\tau_{i_2}^k\right) \frac{\tau_{i_2+1}^k - \tau_{i_2-1}^k}{2}, \tag{3.23}$$

где i_1 и i_2 выбраны так, что $\tau_{i_1}^k = \tau_{i_0}^{k_0}$, а $\tau_{i_2+1}^k - \tau_{i_2}^k = 2\left(\tau_{i_2}^k - \tau_{i_2-1}^k\right)$ (если такое i_2 не существует то вместо последного слагаемого нужно понимать 0). Из (3.22), (3.23) получим

$$\sum_{j\in B_k\setminus\Omega_k} \beta_j^{(k)} \leq \sum_{\substack{j\in B_k\setminus\Omega_k \\ j\notin\{i_1,i_2\}}} \int\limits_{\tilde{\Delta}_j^k} M_{i_0}^{k_0}(t)\,dt + \frac{4}{m} M_{i_0}^{k_0}\left(\tau_{i_0}^{k_0}\right) \mu\left(\Delta_{i_0}^{k_0}\right). \tag{3.24}$$

Очевидно, что если $\tau_i^k, \tau_{i+1}^k \in B_k \backslash \Omega_k$, то $\sigma_k(x) < L_0$, когда $x \in \left[\tau_i^k, \tau_{i+1}^k\right]$. Отсюда, учитывая (3.22) и что при достаточно больших k имеет место оценка

$$\mu\left(\left\{x \in \Delta_{i_0}^{k_0} : \sigma_k(x) > L_0\right\}\right) > 0.999\mu\left(\Delta_{i_0}^{k_0}\right),$$

получим card $\left\{\Gamma_1^k\right\} \leq 0.002m$ для больших k, где $\Gamma_1^k = \{i \in B_k \setminus \Omega_k : i+1 \in B_k \setminus \Omega_k\}$. Следовательно, из (3.22) получим

$$\sum_{j \in \Gamma_1^k} \int_{\tilde{\Delta}_j^k} M_{i_0}^{k_0}(t)\,dt \leq \operatorname{card}\left(\Gamma_1^k\right) \cdot \frac{2}{m}\mu\left(\Delta_{i_0}^{k_0}\right)\left\|M_{i_0}^{k_0}\right\|_\infty \leq 0.008. \tag{3.25}$$

С другой стороны, если $\Gamma_2^k = \{i \in B_k \setminus \Omega_k : i+1 \notin B_k \setminus \Omega_k$ и $i \notin \{i_1, i_2\}\}$ тогда

$$1 = \int_{\Delta_{i_0}^{k_0}} M_{i_0}^{k_0}(t)\,dt \geq \sum_{j \in \Gamma_2^k} \int_{\tilde{\Delta}_j^k} M_{i_0}^{k_0}(t)\,dt + \sum_{j \in \Gamma_2^k} \int_{\tilde{\Delta}_{j+1}^k} M_{i_0}^{k_0}(t)\,dt \geq \frac{9}{8} \sum_{j \in \Gamma_2^k} \int_{\tilde{\Delta}_j^k} M_{i_0}^{k_0}(t)\,dt. \tag{3.26}$$

Из (3.24)-(3.26) получим, что для больших k

$$\sum_{j \in B_k \backslash \Omega_k} \beta_j^{(k)} \leq 0.9.$$

Оценка (3.20) доказана. Из (3.20), (3.19) и (3.7) следует

$$\sum_{j \in \Omega_k} \beta_j^{(k)} \geq 0.08. \tag{3.27}$$

Из (3.18)-(3.20) и (3.27) получается, что при любом $L_0 > -100L$ имеем $d > 0.01L_0$, при достаточно больших k, т.е. число d больше любого числа. Полученное противоречие доказывает теорему.

4. Доказательство теоремы 2.2

Лемма 4.1. *Для любых $p, q \in \mathbb{N}$ с $q > p+2$ и для любой $i = 0, 1, \ldots, 2^p - 1$ существует функция $\varphi_{p,q}^i \in S_{2^q}$ такой, что*

1) *supp* $\left(\varphi_{p,q}^i\right) = \left[\frac{i}{2^p}, \frac{i+1}{2^p}\right]$,
2) $\mu\left(\left\{x \in [0,1] : \varphi_{p,q}^i(x) = 1\right\}\right) = \frac{1}{2^p} - \frac{1}{2^{q-2}}$,
3) $\int_0^1 f_n(x)\,\varphi_{p,q}^i(x)\,dx = 0$, *при* $n \in \mathbb{N} \setminus \{2^p, 2^p+1, \ldots, 2^q\}$.

Доказательство. Пусть $p, q \in \mathbb{N}$ и $q > p+2$. На $[0,1]$ рассмотрим следующую функцию

$$\varphi_{p,q}^{i}(x) = \begin{cases} 1, \text{ при } x \in \left[\frac{i}{2^p} + \frac{1}{2^{q-1}}, \frac{i+1}{2^p} - \frac{1}{2^{q-1}}\right], \\ \frac{3}{2} - 2^{q-p-1}, \text{ при } x \in \left\{\frac{i}{2^p} + \frac{1}{2^q}, \frac{i+1}{2^p} - \frac{1}{2^q}\right\}, \\ 0, \text{ при } x \notin \left[\frac{i}{2^p}, \frac{i+1}{2^p}\right], \end{cases}$$

и которая кусочно линейна с узлами

$$\left\{0, \frac{i}{2^p}, \frac{i}{2^p} + \frac{1}{2^q}, \frac{i}{2^p} + \frac{1}{2^{q-1}}, \frac{i+1}{2^p} - \frac{1}{2^{q-1}}, \frac{i+1}{2^p} - \frac{1}{2^q}, \frac{i+1}{2^p}, 1\right\}.$$

Легко проверить, что для этой функции первые две условия выполняются. Из $\varphi_{p,q}^{i} \in S_{2^q}$ и из определении системы Франклина следует, что $\int\limits_0^1 f_n(x)\,\varphi(x)\,dx = 0$, при $n > 2^q$. Если $n < 2^p$, тогда f_n линейная в отрезке $\left[\frac{i}{2^p}, \frac{i+1}{2^p}\right]$. Пусть

$$f_n(x) = a + b\left(x - \frac{2i+1}{2^{p+1}}\right), \quad x \in \left[\frac{i}{2^p}, \frac{i+1}{2^p}\right].$$

Из равенства

$$\varphi_{p,q}^{i}\left(x + \frac{2i+1}{2^{p+1}}\right) = \varphi_{p,q}^{i}\left(x - \frac{2i+1}{2^{p+1}}\right), \quad x \in \left[\frac{i}{2^p}, \frac{i+1}{2^p}\right]$$

следует, что

$$\int\limits_0^1 f_n(x)\,\varphi_{p,q}^{i}(x)\,dx = a\int\limits_0^1 \varphi_{p,q}^{i}(x)\,dx + b\int\limits_{\frac{i}{2^p}}^{\frac{i+1}{2^p}} \left(x - \frac{2i+1}{2^{p+1}}\right)\varphi_{p,q}^{i}(x)\,dx = 0.$$

□

Лемма 4.2. *Для любых $p, q \in \mathbb{N}$ с $q > p+2$ существует функция $\psi_{p,q} \in S_{2^q}$ такая, что*

1) $\mu\left(\{x \in [0,1] : \psi_{p,q}(x) \neq 1\}\right) = \dfrac{1}{2^{q-p-2}}$,
2) $\int\limits_0^1 f_n(x)\,\psi_{p,q}(x)\,dx = 0$, *при* $n \in \mathbb{N} \setminus \{2^p, 2^p+1, \ldots, 2^q\}$.

Доказательство. Пусть $p, q \in \mathbb{N}$ и $q > p+2$. Обозначим $\psi_{p,q} = \sum\limits_{i=0}^{2^p-1} \varphi_{p,q}^{i}$, где $\varphi_{p,q}^{i}$ определяется из леммы 4.1. Пункт 2) сразу следует из леммы 4.1. Заметим, что

$$\mu\left(\{x \in [0,1] : \psi_{p,q}(x) \neq 1\}\right) = 1 - 2^p\left(\frac{1}{2^p} - \frac{1}{2^{q-2}}\right) = \frac{1}{2^{q-p-2}}.$$

□

Доказательство теоремы 2.2. Пусть $p_k = [\log_2(n_k)]+1$ и $q_k = [\log_2(n_{k+1})]-1$. Из условии теоремы следует, что $limsup(q_k - p_k) \to +\infty$, следовательно для каждого $j \in \mathbb{N}$ существует строго возрастающая последовательность $k_j \in \mathbb{N}$ такой, что $\frac{1}{2^{q_{k_i}-p_{k_i}-2}} \leq \frac{1}{i^2}$. Из леммы 4.2 следует, что для любого $j \in \mathbb{N}$ существует $\psi_j \in S_{2^{q_{k_j}}}$ такой, что

1) $\mu\left(\{x \in [0,1] : \psi_j\left(x\right) \neq 1\}\right) \leq \frac{1}{j^2}$,

2) $\int\limits_0^1 f_n\left(x\right)\psi_j\left(x\right)dx = 0$, при $n \in \mathbb{N} \setminus \{2^{p_{k_j}}, 2^{p_{k_j}}+1, \ldots, 2^{q_{k_j}}\}$.

Пусть $E_j = \{x \in [0,1] : \psi_j\left(x\right) = 1\}$, $j \in \mathbb{N}$. Заметим что для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\mu\left(\bigcap_{j=m}^{\infty} E_j\right) = 1 - \mu\left(\bigcup_{j=m}^{\infty} E_j^c\right) \geq 1 - \sum_{j=m}^{\infty}\mu\left(E_j^c\right) \geq 1 - \sum_{j=m}^{\infty}\frac{1}{j^2},$$

следовательно

$$\mu\left(\liminf_{j\to\infty} E_j\right) = 1. \tag{4.1}$$

Из пункта 2) следует, что

$$\psi_j = \sum_{n=2^{p_{k_j}}}^{2^{q_{k_j}}} a_n^{(j)} f_n,$$

а из (4.1) получим $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{n=2^{p_{k_j}}}^{2^{q_{k_j}}} a_n^{(j)} f_n = +\infty$ почти всюду в $[0,1]$. □

Abstract. In this paper, we prove that if $\{n_k\}$ is an arbitrary increasing sequence of natural numbers such that the ratio n_{k+1}/n_k is bounded, then the n_k-th partial sum of a series by Franklin system cannot converge to $+\infty$ on a set of positive measure. Also, we prove that if the ratio n_{k+1}/n_k is unbounded, then there exists a series by Franklin system, the n_k-th partial sum of which converges to $+\infty$ almost everywhere on $[0,1]$.

Список литературы

[1] Н. Н. Лузин, Интеграл и Тригонометрический Ряд, ГИТТЛ, М.-Л. (1951).
[2] Ю. Б. Гермейер, Производные Римана и Валле-Пуссена и их Применение к Некоторым Вопросам из Теории Тригонометрических Рядов", Дис. канд. физ.-мат. наук, М. (1946).
[3] И. И. Привалов, Граничные Свойства Аналитических Функций, ГИТТЛ, М. (1950).
[4] Д. Е. Меньшов, "О сходимости по мере тригонометрических рядов", Труды МИАН СССР, **32**, 3 – 97 (1950).

[5] А. А. Талалян, “Тригонометрические ряды, универсальные относительно подрядов”, Изв. АН СССР, сер. матем., **27:3**, 621 – 660 (1963).
[6] С. В. Конягин, “О пределах неопределенности тригонометрических рядов”, Матем. заметки, **44:6**, 770 – 784 (1988).
[7] А. А. Талалян, Ф. Г. Арутюнян, “О сходимости рядов по системе Хаара к $+\infty$”, Мат. сб., **66:2**, 240 – 247 (1965).
[8] R. F. Gundy, “Martingale theory and pointwise convergence of certain orthogonal series”, Trans. Amer. Math. Soc., **124:2**, 228 – 248 (1966).
[9] В. А. Скворцов, “Дифференцирование относительно сетей и ряды Хаара”, Мат. заметки, **4:1**, 33 – 40 (1968).
[10] Р. И. Овсепян, А. А. Талалян, “О сходимости ортогональных рядов к $+\infty$”, Мат. заметки, **8:2**, 129 – 135 (1970).
[11] Н. Б. Погосян, “Представление измеримых функций базисами $L_p[0,1], p>2$”, ДАН Арм. ССР, **63:4**, 205 – 209 (1976).
[12] Г. Г. Геворкян, “О сходимости рядов Франклина к $+\infty$”, Мат. заметки **106:3**, 341 – 349 (2019).
[13] Ph. Franklin, “A set of continuous orthogonal functions”, Math. Annalen, **100**, 522 – 529 (1928).
[14] Г. Г. Геворкян, О единственности рядов по системе Франклина, Матем. сб., **207:12**, 30 – 53 (2016).
[15] Г. Г. Геворкян, “О единственности рядов Франклина, сходящихся к интегрируемым функциям”, Матем. сб., **209:6**, 25 – 46 (2018).
[16] Г. Г. Геворкян, “О единственности для кратных рядов Франклина”, Матем. заметки, **101:2**, 199 – 210 (2017).

Поступила 20 февраля 2019

После доработки 20 февраля 2019

Принята к публикации 25 апреля 2019