Известия НАН Армении, Математика, том 54, н. 6, 2019, стр. 42 – 53

ДВОЙНЫЕ УНИВЕРСАЛЬНЫЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

М. Г. ГРИГОРЯН, Л. С. СИМОНЯН

Ереванский государственный университет[1]
E-mails: *gmarting@ysu.am*; *lussimonyan@mail.ru*

Аннотация. В данной работе построена интегрируемая функция двух переменных двойной ряд Фурье - Уолша которой сходится как по прямоугольникам, так и по сферам, коэффициенты на спектре положительные и расположены в убывающем порядке по всем направлениям, и после выбора подходящих знаков для ее коэффициентов Фурье сферические частичные суммы вновь полученного ряда плотны в $L^p[0,1]^2$, $p \in (0,1)$.

MSC2010 number: 42C10, 43A15.

Ключевые слова: частичная сумма; двойной ряд Фурье; плотность; система Уолша.

1. Введение

Пусть $L^p[0,1]$ $(p>0)$ – класс всех измеримых на $[0,1]$ функций $f(x)$, для которых $\int_0^1 |f(x)|^p dx < +\infty$.

Пусть $\{W_k(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – система Уолша, $c_k(g) = \int_0^1 g(x)W_k(x)dx$ коэффициенты Фурье - Уолша функции $g \in L^1[0,1]$ и пусть

$$S_n(x,g) = \sum_{k=0}^{n} c_k(g) W_k(x).$$

Хорошо известно, что ряд Фурье каждой интегрируемой функции по системе Уолша [1] (а также по тригонометрической системе (см. [2])) сходится в $L^p[0,1]$ для каждого $p \in (0,1)$. Из этого результата следует, что не существует функция $U \in L^1[0,1]$ частичные суммы ряда Фурье которой по системе Уолша (а также по тригонометрической системе) были бы плотными в $L^p[0,1]$ при некотором $p \in (0,1)$.

Сразу же возникает следующий вопрос, ответ на который нам не известен:

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта но. 18T-1A148.

Вопрос 1. Существует ли ограниченная ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ такая, что можно было бы построить функцию $U \in L^1[0,1]$ частичные суммы ряда Фурье которой по системе $\{\varphi_n(x)\}$ были бы плотными в $L^p[0,1]$ при некотором $p \in (0,1)$?

Отметим, что М. Григорян [3] построил функцию $U \in L^1[0,1]$ такую, что после выбора соответствующих знаков для его коэффициентов Фурье, частичные суммы вновь полученного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k c_k(U) W_k(x)$ ($\delta_k = \pm 1$) будут плотными в $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$.

В этой статье мы рассмотрим вопрос о том, можно ли получить аналогичный результат в двумерном случае.

Пусть $T = [0,1]^2$, и пусть $f(x,y) \in L^p(T)$, $p \in [1,\infty)$. Коэффициенты Фурье функции $f \in L^p(T)$, $p \in [1,\infty)$, по двойной системе Уолша $\{W_k(x)W_s(y)\}_{k,s=0}^{\infty}$ обозначим через

$$c_{k,s}(f) = \iint\limits_T f(t,\tau) W_k(t) W_s(\tau) dt d\tau. \tag{1.1}$$

Положим

$$\Lambda(f) = spec\{c_{k,s}(f)\} = spec(f) = \{(k,s), c_{k,s}(f)\} \neq 0, k,s \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{1.2}$$

Прямоугольные и сферические частичные суммы двойного ряда Фурье - Уолша определяются соответственно следующим образом:

$$S_{N,M}(x,y,f) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{s=0}^{M} c_{k,s}(f) W_k(x) W_s(y), \tag{1.3}$$

$$S_R(x,y,f) = \sum_{k^2+s^2 \leq R^2} c_{k,s}(f) W_k(x) W_s(y). \tag{1.4}$$

Определение 1.1. *Говорят, что двойной ряда Фурье - Уолша функции $f \in L^1[0,1)^2$ сходится в $L^p[0,1)^2$, $p > 0$, по прямоугольникам соотвественно по сферам, если*

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ M\to\infty}} \iint\limits_T |S_{N,M}(x,y,f) - f(x,y)|^p \, dxdy = 0,$$

соотвественно, если

$$\lim_{R\to\infty} \iint\limits_T |S_R(x,y,f) - f(x,y)|^p \, dxdy = 0.$$

Определение 1.2. *Скажем, что члены в последовательности* $\{c_{k,s}(f)\}_{k,,s=0}^{\infty}$ *на спектре* $\Lambda(f)$ *расположены в убывающем порядке по всем направлениям (лучам), если* $c_{k_2,s_2}(f) < c_{k_1,s_1}(f)$*, когда* $k_2 \geq k_1, s_2 \geq s_1, k_2 + s_2 > k_1 + s_1$, (k_2, s_2), $(k_1,\ s_1) \in \Lambda(f)$.

В этой работе доказывается

Теорема 1.1. *Существуют числа* $\{\delta_{k,s} = \pm 1\}_{k,s=0}^{\infty}$ *и функция* $U \in L^1[0,1)^2$ *(supp*$U \subset [0,\varepsilon] \times [0,1]) \cup ([0,1] \times [0,\varepsilon])$ *, здесь* $\varepsilon \in (0,1)-$ *наперед заданное число), ряд Фурье которой по двойной системе Уолша сходится к ней как по прямоугольникам, так и по сферам, коэффициенты на спектре положительные и расположены в убывающем порядке по всем направлениям, и сферические частичные суммы ряда* $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_{k,s} c_{k,s}(U) W_k(x) W_s(y)$ *(здесь* $c_{k,s}(U)-$ *коэффициенты Фурье - Уолша функции* U*) плотны в* $L^p(T)$, $p \in (0,1)$.

Отметим, что этим свойством обладает большинство функций и можно описать структуру этих универсальных функций с точки зрения широко известных классических теорем Лузина и Меньшова "Об исправлении функций". Точнее имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.2. *Для любого числа* $0 < \varepsilon < 1$ *существует измеримое множество* $E_\varepsilon \subset [0,1)^2$ *с мерой* $|E_\varepsilon| > 1 - \varepsilon$ *и такое, что для каждой функции* $f \in L^1(T)$ *можно найти числа* $\{\ \delta_{k,s} = \pm 1\}_{k,s=0}^{\infty}$ *и функцию* $\tilde{f} \in L^1(T)$*, совпадающую с* f *на* E_ε *ряд Фурье которой по двойной системе Уолша сходится как по прямоугольникам, так и по сферам, коэффициенты на спекторе положительные и расположены в убывающем порядке по всем направлениям и сферические частичные суммы ряда* $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_{k,s} c_{k,s}(\tilde{f}) W_k(x) W_s(y)$ *плотны в* $L^p(T), p \in (0,1)$.

Замечание 1.1. *Следует отметить, что теорема окончательна в некотором смысле (неулучшаема), ибо каковы бы не были число* $p \geq 1$ *и ограниченная ортонормированная система* $\{\varphi_n(x)\}$*, не существуют функция* $U \in L^1(T)$ *и числа* $\delta_{k,s} = \pm 1\}_{k,s=0}^{\infty}$ *такие, что сферические частичные суммы ряда* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \delta_{k,s} c_{k,s}(U)$ $\varphi_k(x)\varphi_s(y)$ *были бы плотными в* $L^p(T)$.

Действительно, если бы при некотором $p \geq 1$ относительно некоторой ограниченной ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$ существовали функция $U \in L^1(T)$ и числа $\{\delta_{k,s} = \pm 1,\ k, s = 0, 1, 2, ...\}$ такие, что сферические частичные суммы ряда $\sum_{k,s=0}^{\infty} \delta_{k,s} c_{k,s}(U)\ \varphi_k(x)\varphi_s(y)$ были бы плотными в $L^p(T)$, тогда для любой функции $f \in L^p(T)$ с $c_{1,1}(f) \neq 0$ нашлись бы числа N_m, Υ_m, $m = 1, 2, ...$ такие, что

$$\lim_{m\to\infty} \iint_T \left| \sum_{k^2+s^2 \le N_m^2} \delta_{k,s} c_{k,s}(U)\varphi_k(x)\varphi_s(y) - \ f(x,y) \right| dxdy = 0,$$

$$\lim_{m\to\infty} \iint_T \left| \sum_{k^2+s^2 \le \Upsilon_m} \delta_{k,s} c_{k,s}(U))\varphi_k(x)\varphi_s(y) - 2\ f(x,y) \right| dxdy = 0.$$

Отсюда сразу получаем противоречие $c_{1,1}(f) = \delta_{1,1}c_{1,1}(U) = c_{1,1}(2f) = 2c_{1,1}(f)$. Было бы интересно узнать ответ на вопрос:

Вопрос 2. Существует ли функция $U \in L^1(T)$ прямоугольные или сферические частичные суммы двойного ряда Фурье которой по двойной системе Уолша $\{W_k(x)W_s(y)\}_{k,s=0}^{\infty}$ или по двойной тригонометрической системе $\{e^{2\pi kix}e^{2\pi six}\}_{k,s=0}^{\infty}$ были бы плотными в $L^p(T)$, при некотором $p \in (0,1)$?

2. Доказательство теорем 1.1 и 1.2

Мы будем использовать следующую лемму, доказанную в [4].

Лемма 2.1. *Пусть* $0 < p_1 < p_2 < 1$, $n_0 \in \mathbb{N}, \varepsilon$, $\theta \in (0,1)$ *и* $f(x,y) = \sum_{m=1}^{\tilde{\nu}_0} \tilde{\gamma}_m \chi_{\widetilde{\Delta}_m}(x,y)$ *есть такая ступенчатая функция, что* $\tilde{\gamma}_m \neq 0$ *и* $\{\widetilde{\Delta}_m\}_{m=1}^{\tilde{\nu}_0}$ *– суть непересекающиеся двоичные прямоугольники с* $\sum_{m=1}^{\tilde{\nu}_0} |\widetilde{\Delta}_m| = 1$. *Тогда можно найти измеримое множество* $E \subset [2^{-n_0}, 1)^2$ *и полиномы*

$$H(x,y) = \sum_{k,s=2^{n_0}}^{2^{n_1}-1} a_{k,s} W_k(x) W_s(y),$$

$$Q(x,y) = \sum_{k,s=2^{n_0}}^{2^{n_1}-1} \delta_{k,s} a_{k,s} W_k(x) W_s(y), \quad \delta_{k,s} = \pm 1,$$

по системе Уолша, удовлетворяющие следующим условиям:

коэффициенты $a_{\tilde{k},\tilde{s}}$, $(\tilde{k},\tilde{s}) \in spec(H)$ *расположены в убывающем порядке по всем направлениям и*

1) $$0 < a_{\tilde{k},\tilde{s}} < \varepsilon, \quad P(x,y) \cdot \chi_{[2^{-n_0},1)^2}(x,y) \equiv 0,$$

2) $$H(x,y) = f(x,y), \quad \text{когда} \quad (x,y) \in E, \quad |E| > 1 - \theta - 2^{-n_0}$$

3) $$\iint_T |f(x,y) - H(x,y)|^p \, dxdy < \varepsilon, \quad \forall p \in (p_1, p_2),$$

4) $$\max_{2^{n_0}\le N,M<2^n}\iint_T\left|\sum_{k=2^{n_0}}^{N,M}\delta_{k,s}a_{k,s}W_k(x)W_s(y)\right|^p dxdy<5\iint_T|f(x,y)|^p dxdy,$$

5) $$\max_{\sqrt{2}2^{n_0}\le R<\sqrt{2}2^n}\iint_T\left|\sum_{k^2+s^2\le R^2}\delta_{k,s}a_{k,s}W_k(x)W_s(y)\right|^p dxdy<5\iint_T|f(x,y)|^p dxdy,$$

6) $$\max_{2^{n_0}\le N,M<2^n}\iint_T\left|\sum_{k,s=2^{n_0}}^{N,M}\delta_{k,s}a_{k,s}W_k(x)W_s(y)\right| dxdy<4\iint_T|f(x,y)|dxdy,$$

7) $$\max_{\sqrt{2}2^{n_0}\le R<\sqrt{2}2^n}\iint_T\left|\sum_{k^2+s^2\le R^2}\delta_{k,s}a_{k,s}W_k(x)W_s(y)\right| dxdy<4\iint_T|f(x,y)|dxdy,$$

8) $$\max_{2^{n_0}\le N,M<2^n}\iint_T\left|\sum_{k,s=2^{n_0}}^{N,M}a_{k,s}W_k(x)W_s(y)\right| dxdy<\varepsilon.$$

9) $$\max_{\sqrt{2}2^{n_0}\le R<\sqrt{2}2^n}\iint_T\left|\sum_{k^2+s^2\le R^2}a_{k,s}W_k(x)W_s(y)\right| dxdy<\varepsilon.$$

Доказательство теоремы 1.1. Пусть $\{f_m(x,y)\}_{m=1}^{\infty}$ - есть последовательность всех ступенчатых функции вида

$$f_n(x,y)=\sum_{j=1}^{l_n}\gamma_j^{(n)}\chi_{\Delta_j^{(n)}}(x,y) \tag{2.1}$$

с рациональными $\gamma_j^{(n)}\neq 0$ и условием $\sum_{j=1}^{l_n}|\Delta_j^{(n)}|=1$, где $\{\Delta_j^{(n)}\}_{j=1}^{l_n}$ – непересекающиеся двоичные прямоугольники. Пусть $0<\varepsilon<1$. Положим

$$m_0=2+[\log_2\frac{1}{\varepsilon}] \quad \text{и} \quad M_1=2^{m_0}. \tag{2.2}$$

Пусть

$$\alpha_n\searrow 0,\quad \beta_n\nearrow 1,\qquad 0<\alpha_1<4^{-1},\quad \beta_1>\frac{3}{4}. \tag{2.3}$$

Применим Лемму 2.1, полагая в ее формулировке

$$n_0=m_0\quad \theta=\ \varepsilon 2^{-8(1+2)},\quad p_1=\alpha_1,\quad p_2=\beta_1,\quad f(x,y)=f_1(x,y).$$

Тогда определяются измеримое множество $E_1\subset[0,1]$ и полиномы по системе Уолша вида ($M_1=2^{m_0},M_2=2^{m_1}$)

$$H_1^{(1)}=\sum_{k,s=M_1}^{M_2-1}a_{k,s}^{(1)}W_k(x)W_s(y),\ Q_1^{(1)}=\sum_{k,s=M_1}^{M_2-1}\delta_{k,s}^{(1)}a_{k,s}^{(1)}W_k(x)W_s(y),\ \delta_{k,s}^{(1)}=\pm 1,$$

удовлетворяющие условиям: коэффициенты $a^{(1)}_{\tilde{k},\tilde{s}}$, $(\tilde{k},\tilde{s}) \in spec(H_1^{(1)})$ расположены в убывающем порядке по всем направлениям и

$$a^{(1)}_{\tilde{k},\tilde{s}} < \frac{1}{2^{m_0}}, \quad \text{где} \quad (\tilde{k},\tilde{s}) \in spec(H_1^{(1)}),$$

$$Q_1^{(1)}(x,y) = f_1(x,y), \quad (x,y) \in E_1, \qquad |E_1| > 1 - \frac{\varepsilon}{2^2} - 2^{-m_0} \ \geq \frac{\varepsilon}{2^1},$$

$$H_1^{(1)}(x,y) \cdot \chi_{[t_1,1]^2}(x,y) = 0, t_1 = \frac{1}{M_1},$$

$$\iint\limits_T \left| f_1(x,y) - Q_1^{(1)}(x,y) \right|^p dxdy < 4^{-8(1+2)}, \quad p \in (\alpha_1, \beta_1)\,,$$

$$\iint\limits_T |Q_1^{(1)}()|dxdy < \max_{m,l\in[M_1,M_2)} \iint\limits_T |\sum_{k=M_1}^{m,l} \delta_k^{(1)} a_k^{(1)} W_k(x) W_s(y)|dxdy < 3 \iint\limits_T |f_1(x,y)|dxdy,$$

$$\max_{\sqrt{2}M_1 \leq R \leq \sqrt{2}M_2} \iint\limits_T | \sum_{\sqrt{2}M_1 \leq k^2+s^2 \leq R^2} \delta_k^{(1)} a_k^{(1)} W_k(x) W_s(y)|dx < 3 \int_0^1 \int_0^1 |f_1(x,y)|dxdy,$$

$$\iint\limits_T |H_1^{(1)}()|dxdy \leq \max_{\sqrt{2}M_1 \leq R \leq \sqrt{2}M_2} \iint\limits_T | \sum_{\sqrt{2}M_1 \leq k^2+s^2 \leq R^2} a_{k,s}^{(1)} W_k(x) W_s(y)|dxdy +$$

$$+ \max_{m\in[M_1,M_2)} \iint\limits_T | \sum_{k,s=M_1}^{m} a_{k,s}^{(1)} W_k(x) W_s(y)|dxdy < 4^{-2-1}.$$

Снова применим лемму, полагая в ее формулировке

$n_0 = [\log_2 M_2]$, $\theta = a^{(1)}_{M_2,-1}$, $\theta = \varepsilon 2^{-8(1+2)}$, $p_1 = \alpha_1$, $p_2 = \beta_1$, $f(x,y) = \{f_1() - H_1^{(1)}()\}$.

Тогда определяются измеримое множество $E_1 \subset [0,1]$ и полиномы по системе Уолша вида

$$H_1^{(2)}(x,y) = \sum_{k,s=M_2}^{M_3-1} a_{k,s}^{(1)} W_k(x) W_s(y)\ , \quad M_2 = 2^{m_1}, M_3 = 2^{m_2}$$

$$Q_1^{(2)}(x,y) = \sum_{k,s=M_2}^{M_3-1} \delta_{k,s}^{(1)} a_{k,s}^{(1)} W_k(x) W_s(y), \quad \delta_{k,s}^{(1)} = \pm 1$$

удовлетворяющие условиям: коэффициенты $a^{(1)}_{\tilde{k},\tilde{s}}$, $(\tilde{k},\tilde{s}) \in spec(H_1^{(2)})$ расположены в убывающем порядке по всем направлениям и

$$H_1^{(2)}(x,y) \cdot \chi^2_{[t_2,1]^2}(x,y) = 0, t_2 = \frac{1}{M_2}, \quad a^{(1)}_{\tilde{k},\tilde{s}} < \frac{A_0^{(1)}}{2^{m_1}},$$

где

$$A_0^{(1)} = \min_{(\tilde{k},\tilde{s}) \in spec(H_1^{(1)})} a^{(1)}_{\tilde{k},\tilde{s}}, \quad A_0 = 1,$$

$$\iint_T |\{f_1(x,y)-H_1^{(1)}(x,y)\}-Q_1^{(2)}(x,y)|^p\,dxdy<4^{-8(1+2)},\quad p\in(\alpha_1,\beta_1)$$

$$\iint_T |H_1^{(2)}(x,y)|dxdy<\max_{\sqrt{2}M_2\le R<\sqrt{2}M_3}\iint_T |\sum_{\sqrt{2}M_2\le k^2+s^2\le R^2} a_{k,s}^{(1)}W_k(x)W_s(y)|dxdy+$$

$$+\max_{m\in[M_2,M_3)}\iint_T |\sum_{k,s=M_2}^{m} a_{k,s}^{(1)}W_k(x)W_s(y)|dxdy<4^{-2-1}.$$

Нетрудно видеть, что продолжая эти рассуждения, мы можем по индукции определить последовательности измеримых множеств $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ и полиномов $\{H_n^{(1)}(x,y)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{H_n^{(2)}(x,y)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{Q_n^{(1)}(x,y)\}_{n=1}^{\infty},\{Q_n^{(2)}(x,y)\}_{n=1}^{\infty}$ вида

$$H_n^{(1)}=\sum_{k,s=M_{2n-1}}^{M_{2n}-1} a_{k,s}^{(n)}W_k(x)W_s(y)\ ,\ H_n^{(2)}=\sum_{k,s=M_{2n}}^{M_{2n+1}-1} a_{k,s}^{(n)}W_k(x)W_s(y), \tag{2.4}$$

$$Q_n^{(1)}=\sum_{k,s=M_{2n-1}}^{M_{2n}-1}\delta_{k,s}^{(n)}a_k^{(n)}W_k(x)W_s(y),\ Q_n^{(2)}=\sum_{k,s=M_{2n}}^{M_{2n+1}-1}\delta_{k,s}^{(n)}a_{k,s}^{(n)}W_k(x)W_s(y), \tag{2.5}$$

где

$$M_j=2^{m_{j-1}},\{m_j\}_{j=0}^{\infty}\nearrow^{\infty},m_0=2[\log_2\frac{1}{\varepsilon}],\quad \delta_k^{(n)}=\pm1,\quad k=0,1,2,.., \tag{2.6}$$

которые для каждого $n=1,2,....$ удовлетворяют условиям: коэффициенты $a_{\tilde{k},\tilde{s}}^{(n)}$, $(\tilde{k},\tilde{s})\in spec(H_n^{(1)})\cup spec(H_n^{(2)})$ расположены в убывающем порядке по всем направлениям и

$$0<a_{\tilde{k},\tilde{s}}^{(1)}<\frac{A_{n-1}^{(2)}}{2^{m_1}},\quad \text{где}\quad A_{n-1}^{(2)}=\min_{(\tilde{k},\tilde{s})\in spec(H_{n-1}^{(2)})} a_{\tilde{k},\tilde{s}}^{(1)},\forall(\tilde{k},\tilde{s})\in spec(H_n^{(1)}), \tag{2.7}$$

$$0<a_{\tilde{k},\tilde{s}}^{(2)}<\frac{A_n^{(1)}}{2^{m_1}},\quad \text{где}\quad A_n^{(1)}=\min_{(\tilde{k},\tilde{s})\in spec(H_n^{(1)})} a_{\tilde{k},\tilde{s}}^{(1)},\forall(\tilde{k},\tilde{s})\in spec(H_n^{(2)}), \tag{2.8}$$

$$|E_n|>1-\varepsilon 2^{-n}, \tag{2.9}$$

$$Q_n^{(1)}(x,y)=f_n(x,y),\quad (x,y)\in E_n, \tag{2.10}$$

$$\iint_T \left|\{f_n(x,y)-\sum_{j=1}^{n}\left(H_j^{(1)}(.)+Q_j^{(2)}(.)\right)\right|^p dxdy<2^{-3n},\ \forall p\in(\alpha_n,\beta_n) \tag{2.11}$$

$$H_n^{(1)}(x,y)\chi_{[t_{2n-1},1]^2}(x,y)=H_n^{(2)}(x,y)\chi_{[I_{2n},1]^2}(x,y)=0,\ I_j=\frac{1}{M_j} \tag{2.12}$$

(2.13)
$$\iint_T |H_n^{(1)}|dxdy < \max_{m,l\in[M_{2n-1},M_{2n})} \iint_T |\sum_{k,s=M_{2n-1}}^{m,l} a_{k,s}^{(n)} W_k(x)W_s(y)| < 4^{-2n-1}.$$

$$\max_{\sqrt{2}M_{2n-1}\le R\le\sqrt{2}M_{2n}} \int_0^1\int_0^1 |\sum_{\sqrt{2}M_{2n-1}\le k^2+s^2\le R^2} a_{k,s}^{(n)} W_k(x)W_s(y)| < 4^{-2n-1}. \tag{2.14}$$

$$\iint_T |H_n^{(2)}|dxdy < \max_{m,l\in[M_{2n},M_{2n+1})} \iint_T |\sum_{k,s=M_{2n}}^{m,l} a_{k,s}^{(n)} W_k(x)W_s(y)| < 4^{-2n-1}, \tag{2.15}$$

$$\max_{\sqrt{2}M_{2n}\le R^2<\sqrt{2}M_{2n+1}} \iint_T |\sum_{\sqrt{2}M_{2n}\le k^2+s^2\le R^2} a_{k,s}^{(n)} W_k(x)W_s(y)| < 4^{-2n-1}, \tag{2.16}$$

$$\iint_T |Q_n^{(1)}|dxdy < \max_{m,l\in[M_{2n-1},M_{2n})} \iint_T |\sum_{k,s=M_{2n-1}}^{m,l} \delta_{k,s}^{(n)} a_{k,s}^{(n)} W_k(x)W_s(y)|dxdy <$$

$$< 3\iint_T |f_n(x,y)|\,dx\,dy, \tag{2.17}$$

(2.18)
$$\max_{M_{2n-1}\le\frac{R}{\sqrt{2}}R\le M_{2n}} \iint_T |\sum_{\sqrt{2}M_{2n-1}\le k^2+s^2\le R^2} \delta_{k,s}^{(n)} a_{k,s}^{(n)} W_k()W_s()| < 3\iint_T |f_n|dxdy.$$

Из (2.13) и (2.15) следует

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\left(\iint_T \left|H_n^{(j)}(x,y)\right| dxdy\right) < \sum_{n=1}^{\infty} < 2^{-n}. \tag{2.19}$$

Определим функцию $U(x,y)$ и последовательность чисел $\{a_{k,s}\}$ следующим образом

$$U(x,y) = H_0(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^{(1)}(x,y) + H_n^{(2)}(x,y)\right) = \sum_{k,s=0}^{\infty} a_{k,s} W_k(x)W_s(y), \tag{2.20}$$

где

$$H_0(x,y) = \sum_{k,s=0}^{2^{m_0}-1} W_k(x)W_s(y), \tag{2.21}$$

$$a_{k,s}=1,\ \ k,s\in[0,2^{m_0}\ ), \quad a_{k,s}=a_{k,s}^{(n)},\ \ k,s\in[M_{2n-1},M_{2n+1}),\ n=1,2,... \tag{2.22}$$

Отсюда и из (2.2), (2.12), (2.13), (2.15) вытекает, что $U\in L^1(T)$, и $U(x,y)=0, (x,y)\in[2^{-m_0},1]^2\subset[\varepsilon,1]^2$.

Учитывая соотношения (2.13) - (2.16) и (2.19)- (2.22), получим, что ряд $\sum\limits_{k,s=0}^{\infty} a_{k,s}$ $W_k(x)W_s(y)$ сходится к $U(x,y)$ по $L^1(T)-$ норме как по прямоугольникам, так и по сферам, и следвательно

$$a_{k,s} = \ c_{k,s}(U) = \int_0^1 U(x,y)W_k(x)W_s(y)dx \geq 0). \tag{2.23}$$

Отсюда и из (2.7), (2.8), (2.20) - (2.22) вытекает, что коэффициенты Фурье-Уолша функции U на спектре $\Lambda(U)$ (см.(1.2)) положительные и расположены в убывающем порядке по всем направлениям.

Положим

$$\delta_{k,s} = 1, \ \ k,s \in [0, 2^{m_0} \ ) \cup [M_{2n-1}, M_{2n}), \ \ \delta_{k,s} = \delta_{k,s}^{(n)}, \ \ k,s \in [M_{2n}, M_{2n+1}). \tag{2.24}$$

Покажем, что сферические частичные суммы двойного ряда (см. (2.20)- (2.24))

$$\sum_{k,s=0}^{\infty} \delta_{k,s} c_{k,s}(U) \ W_k(x)W_s(y) \tag{2.25}$$

плотны во всех пространствах $L^p(T) \quad \forall p \in (0,1)$.

Пусть $p \in (0,1)$, тогда для некторого $n^{\triangleleft} \in \mathbf{N}, \quad p \in (\alpha_n, \beta_n) \quad \forall n \geq n^{\triangleleft}$ и пусть $f \in L^p(T)$.

Легко видеть, что можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_k}(x,y)\}_{k=1}^{\infty}$ из последовательности (2.1) такую, что

$$\lim_{k \to \infty} \iint_T |\{f(x,y) - H_0(x,y) - f_{n_k}(x,y)|^p dxdy = 0, \quad n_k > n_1 \geq \ n^{\triangledown}.$$

Отсюда и из (1.3), (1.4), (2.4), (2.5), (2.11), (2.19) и (2.22) - (2.25) (при $N_k = M_{2n_k+1} - 1 \qquad R_k = \sqrt{2}N_k$) будем иметь

$$\iint_T |S_{R_k}(x,y) - f(x,y)|^p \, dxdy = \iint_T \left| S_{N_k, N_k}(x,y) - f(x,y) \right|^p dxdy =$$

$$= \iint_T \left| \sum_{k,s=0}^{N_k} \delta_{k,s} c_{k,s}(U) \ W_k(x)W_s(y) - f(.) \right|^p dxdy \leq \iint_T |f(x,y) - H_0(x,y) - f_{n_k}(x,y)|^p dxdy \leq$$

$$\leq \iint_T \left| f_{n_k}() - \sum_{j=1}^{n_k} \left(H_j^{(1)}(x,y) + Q_j^{(2)}(x,y) \right) \right|^p dxdy \leq 2^{-n_k} \to 0 \qquad k \ \to \infty.$$

Теорема 1.1 доказана.

Доказательство Теоремы 1.2. Положим

$$E = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m, \quad H_n(x,y) = \left(H_n^{(1)}(x,y) + H_n^{(2)}(x,y) \right). \tag{2.26}$$

Ясно, что (см. (2.9)), $|E| > 1-\varepsilon$. Пусть $f(x,y)$ произвольная функция из $L^1(T)$. Нетрудно видеть, что можно выбрать подпоследовательность $\{f_{k_n}(x,y)\}_{n=1}^{\infty}$ из (2.1) такую, что

$$\lim_{N\to\infty}\iint\limits_T \left|f(x,y)-H_0(x,y)-\sum_{n=1}^{N} f_{k_n}(x,y)\right| dxdy = 0, k_1 > n_0, \tag{2.27}$$

$$\iint\limits_T |f_{k_n}(x,y)|\, dxdy < 2^{-8n} \quad \forall n \geq 2. \tag{2.28}$$

Предположим, что уже определены числа $k_1 = \nu_1 < ... < \nu_{q-1}$ функции $f_{\nu_1}(x,y)$, ..., $f_{\nu_{q-1}}(x,y)$, $g_0(x,y)$, $g_1(x,y), ..., g_{q-1}(x)$ и полиномы

$$Q_{\nu_n}^{(1)}(x,y) = \sum_{k=M_{2\nu_n-1}}^{M_{2\nu_n}-1} \delta_k^{(\nu_n)} a_k W_k(x) W_s(y)\ , 1 \leq\ n \leq q-1, \tag{2.29}$$

для всех $l \in [1, q-1]$ удовлетворяющие условиям:

$$g_l(x,y) = f_{k_l}(x,y), \quad (x,y)\in E,$$

$$\iint\limits_T |g_l(x,y)| dxdy < 2^{-(l+1)},$$

$$\iint\limits_T \left|\sum_{j=1}^{l}\left[g_j() - \left(\sum_{n=\nu_{j-1}+1}^{\nu_j-1} H_n() + Q_{\nu_j}^{(1)}() + H_{\nu_j}^{(2)}()\right)\right]\right| dxdy < 2^{-2(l+1)}. \tag{2.30}$$

Нетрудно видеть, что можно выбрать натуральное число $\nu_q > \nu_{q-1}$ (функцию $f_{\nu_q}(x,y)$ из последовательности (2.1)) таким образом, чтобы

$$\begin{aligned}\iint\limits_T \Big|\Big\{ f_{k_q}(x,y) - \textstyle\sum_{j=1}^{q-1}\Big[g_j() - \Big(\sum_{n=\nu_{j-1}+1}^{\nu_j-1} H_n(x,y) + Q_{\nu_j}^{(1)}() + H_{\nu_j}^{(2)}()\Big)\Big]\Big\} -\\ - f_{\nu_q}(x,y)\Big|\, dxdy \leq 2^{-3(q+3)}.\end{aligned} \tag{2.31}$$

В силу (2.28), (2.30) и (2.31) имеем

$$\iint\limits_T |f_{\nu_q}(x,y)| dxdy \leq 2^{-2(q+1)}. \tag{2.32}$$

Положим

$$g_q(x,y) = f_{k_q}(x,y) + [Q_{\nu q}^{(1)}(x,y) - f_{\nu_q}(x,y)]. \tag{2.33}$$

Отсюда и из (2.10) и (2.26) вытекает

$$g_q(x,y) = f_{k_q}(x,y) \quad \forall (x,y)\in E \quad \forall q \geq 1. \tag{2.34}$$

Учитывая соотношения (2.13), (2.15), (2.17) и (3.30)- (2.32) для всех $q \geq 2$ получим

$$\left(\iint_T \left|\sum_{j=1}^{q}\left[g_j(x,y)-\left(\sum_{n=\nu_{j-1}+1}^{\nu_j-1} H_n(x,y)+Q_{\nu_j}^{(1)}(x,y)+H_{\nu_j}^{(2)}(x,y)\right)\right]\right| dxdy\right) \leq$$

$$\leq \iint_T \left|\left\{f_{k_q}(x,y)-\sum_{j=1}^{q-1}\left[g_j()-\left(\sum_{n=\nu_{j-1}+1}^{\nu_j-1} H_n(x,y)+Q_{\nu_j}^{(1)}()+H_{\nu_j}^{(2)}()\right)\right]\right\}-f_{\nu_q}()\right| dxdy+$$

$$+\iint_T \left|Q_{\nu_q}^{(1)}\right| dxdy+\sum_{n=\nu_{q-1}+1}^{\nu_q-1}\iint_T |H_n()|+\iint_T \left|H_{\nu q}^{(2)}()\right| dxdy < 2^{-2q-2}. \tag{2.35}$$

Из (2.28),(2.32) и (2.33) следует

$$\iint_T |g_q(x,y)|dxdy \leq \iint_T |f_{k_q}(x)|dxdy+$$

$$+\iint_T |Q_{\nu_q}^{(1)}(x,y)|dxdy+\iint_T |f_{\nu_q}(x,y)|dxdy \leq 2^{-q-1}. \tag{2.36}$$

Ясно, что по индукции определяются последовательности функций $\{g_q(x,y)\}_{q=1}^{\infty}$ $(g_1(x,y)=f_{k_1}(x,y))$ и полиномов $\{Q_{\nu_q}^{(1)}(x,y\}$, удовлетворяющих условиям (2.34)-(2.36) для всех $q>1$. Из (2.36) вытекает, что

$$\sum_{q=0}^{\infty}\iint_T |g_q(x,y)|dxdy < \infty.$$

Определим функцию $g(x,y)$ и последовательность чисел $\{\varepsilon_{k,s}\}_{k,s=0}^{\infty}$ следующим образом

$$g(x,y)=H_0(x,y)+\sum_{q=1}^{\infty} g_q(x,y), \tag{2.37}$$

$$\varepsilon_{k,s}=\delta_{k,s}^{(\nu_q)},\ k\in[M_{2\nu_q-1},M_{2\nu_q}),\ \ \varepsilon_{k,s}=1, k,s\notin[M_{2\nu_q-1},M_{2\nu_q}),\ q=1,2,.. \tag{2.38}$$

Из (2.27), (2.34) и (2.37)вытекает $g\in L^1(T)$, $\quad g(x,y)=f(x,y)\ \forall (x,y)\in E$.

В силу (2.13) - (2.18), (2.22)-(2.24), (2.32) и (2.35) - (2.38) для всех $R\in [\sqrt{2}M_{2\nu_{q-1}-1},\sqrt{2}M_{2\nu_{q+1}-1})$ будем иметь

$$\iint_T \left|\sum_{k^2+s^2\leq R^2}\varepsilon_{k,s}c_{k,s}(U)W_k(x)W_s(y)-g(x,y)\right| dxdy \leq \sum_{j=q}^{\infty}\left(\iint_T |g_j(x,y)|dxdy\right)+$$

$$+\iint_T \left|\sum_{j=1}^{q-1}\left[g_j(x,y)-\left(\sum_{n=\nu_{j-1}+1}^{\nu_j-1} H_n(x,y)+Q_{\nu_j}^{(1)}()+H_{\nu_j}^{(2)}(x,y)\right)\right]\right| dxdy+$$

$$+2\sum_{n=\nu_{q-1}+1}^{\nu_q-1}\max_{m,l\in[M_{2n-1},M_{2n+1})}\iint_T|\sum_{k,s=M_{2n-1}}^{m,l}a_{k,s}^{(n)}W_k(x)W_s(y)|dxdy+$$

$$+\max_{\sqrt{2}M_{2\nu_q-1}\le R<\sqrt{2}M_{2\nu_q})}\iint_T|\sum_{\sqrt{2}M_{2\nu_q-1}\le k^2+s^2\le R^2}\delta_{k,s}^{(\nu_q)}a_{k,s}^{(\nu_q)}W_k()W_s()|dxdy<2^{-q-1}.$$

Отсюда следует

$$\varepsilon_{k,s}c_{k,s}(U)=c_{k,s}(g)),k,s=0,1,2,...$$

Значит, ряд Фурье функции $g(x,y)$ по двойной системе Уолша сходится в $L^1(T)$ по сферам. Аналогично доказывается, что ряд Фурье функции $g(x,y)$ по двойной системе Уолша сходится в $L^p(T)$ по прямоугольникам.

Обозначая через $\beta_{k,s}=\varepsilon_{k,s}\delta_{k,s},\ \ k,s=0,1,2,..$ (см. (2.6),(2.23),(2.38)) имеем

$$\delta_{k,s}c_{k,s}(U)=\beta_{k,s}c_{k,s}(g),\quad \beta_{k,s}=\pm1,\quad k,s=0,1,2,...$$

Отсюда вытекает, что сферические частичные суммы двойного ряда (см. (2.20)-(2.25))

$$\sum_{k,s=0}^{\infty}\beta_{k,s}c_{k,s}(g)W_k(x)W_s(y)=\sum_{k,s=0}^{\infty}\delta_{k,s}c_{k,s}(U)\ W_k(x)W_s(y)$$

плотны во всех пространствах $L^p(T)\quad\forall p\in(0,1)$. Теорема 1.2 доказана.

Abstract. In this paper we construct an integrable function of two variables for which the double Fourier-Walsh series converges both by rectangles and by spheres. Besides, we show that the coefficients of the series on the spectrum are positive and are arranged in decreasing order in all directions. Also, it is proved that after a suitable choice of signs for the Fourier coefficients of the series the spherical partial sums of the obtained series are dense in $L^p[0,1]^2$, $p\in(0,1)$.

Список литературы

[1] C. Watari, "Mean convergence of Fourier- Walsh series", Tohoku Math. J, **16**, no. 2, 183 – 188 (1964).

[2] A. H. Kolmogorov, "Sur les fonctions harmoniques conjugeeset les series de Fourier", FM, **7**, 23 – 28 (1925).

[3] M. Grigoryan, "Functions, universal with respect to classical system", Int. Conf. Harmonic analysis and apprximatins VII, 16 - 22 September, 44 – 45, Armenia (2018).

[4] M. Grigoryan, A. Sargsyan, "On the structure of universal functions for classes $L^p[0,1]^2$, $p\in(0,1)$ with respect to the double Walsh system", Banach Journal of Math. Analysis, **13**, no. 3, 625 – 653 (2019).

Поступила 6 мая 2019

После доработки 2 сентября 2019

Принята к публикации 11 октября 2019