Известия НАН Армении, Математика, том 54, н. 6, 2019, стр. 3 – 18

n – КРУЧЕНЫЕ ГРУППЫ

С. И. АДЯН, В. С. АТАБЕКЯН

Институте Математики Российской Академии Наук, Москва, Россия
Ереванский государственный университет [1] [2]
E-mails: *sia@mi.ras.ru*; *varujan@atabekyan.com*

Аннотация. Группу назовем n-крученой группой, если она имеет систему определяющих соотношений вида $r^n = 1$ для некоторых элементов r и для любого ее элемента a конечного порядка выполняется соотношение $a^n = 1$. При этом допускается, что в группе могут быть элементы бесконечного порядка. В работе показано, что при нечетных $n \geq 665$ для каждой n-крученой группы можно построить теорию, аналогичную теории построенной в известной монографии С.И.Адяна о свободных бернсайдовых группах, что позволяет n-крученые группы исследовать развитыми в ней методами. Доказано, что любая n-крученая группа может быть задана с помощью некоторой независимой системы определяющих соотношений, что центр любой нециклической n-крученой группы тривиален, что n-периодическое произведение любого семейства n-крученых групп является n-крученой группой, что в любой рекурсивно заданной n-крученой группе разрешимы проблема распознавания равенства слов и проблема сопряженности.

MSC2010 number: 20F50; 20F05; 20E06.

Ключевые слова: группа с кручением; периодическая группа, свободная бернсайдова группа; относительно свободная группа; бесконечно базируемое многообразие.

1. Введение

Если в группе G выполнено тождество $x^n = 1$, то говорят, что G является периодической группой экспоненты n, или, что G – n-периодическая группа. Все подобные группы составляют многообразие называемое бернсайдовым многообразием экспоненты n. Свободные группы ранга m бернсайдова многообразия экспоненты n обозначается через $B(m, n)$. Одна из самых известных проблем алгебры и теории групп поставленной в 1902 г. У. Бернсайдом имеет простую

[1]Исследование проведено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта 18T-1A306.

[2]Параграфы 1, 4 написаны С. Адяном; параграфы 2, 3 написаны В. Атабекяном.

формулировку: *конечна ли всякая конечно порожденная группа* $B(m,n)$? В настоящее время свободные группы $B(m,n)$ называют также свободными бернсайдовыми группами в честь У.Бернсайда.

Впервые отрицательное решение проблемы Бернсайда было получено в классической серии работ С.И.Адяна и П.С.Новикова. Несколько лет позже С.И.Адян в монографии [1] модифицировал и усилил построенную теорию и доказал свою знаменитую теорему: *для всех нечетных* $n \geq 665$ *и* $m > 1$ *группы* $B(m,n)$ *бесконечны.* Помимо исследования групп $B(m,n)$, в монографии [1] построены и изучены ряд других групп имеющих новые непривычные свойства. Конструкции и идеи построения этих групп стали основой для решения целой серии хорошо известных старых и трудных проблем теории групп. Отметим два важных класса групп из [1].

Первый важный класс групп, построенный в [1] с помощью порождающих и определяющих соотношений, обозначена через $B(m,n,\alpha)$, где m – число порождающих группы, $n \geq 665$ – произвольное нечетное число, а α – натуральный параметр. В [1] доказано, что свободная бернсайдова группа $B(m,n)$ является прямым пределом по α групп $B(m,n,\alpha)$.

Следующий важный класс связан с известной проблемой конечного базиса теории групп, которая была поставлена Б.Нейманом в 1937 г.. В [1] доказано, что при любом нечетном $n \geq 1003$ следующее семейство тождеств от двух переменных

$$\{(x^{pn}y^{pn}x^{-pn}y^{-pn})^n = 1\},$$

где параметр p пробегает все простые числа, является неприводимым, т.е. ни одно из этих тождеств не является следствием остальных. Отсюда следует, что для любого нечетного $n \geq 1003$ существует континуум различных многообразий $\mathcal{A}_n(\Pi)$ соответствующих различным множествам простых чисел Π. При этом, для каждого фиксированного значения $m > 1$ существует *континуум* не изоморфных групп $\Gamma(m,n,\Pi)$, где $\Gamma(m,n,\Pi)$ – относительно свободная группа ранга m многообразия $\mathcal{A}_n(\Pi)$.

Существует натуральный гомоморфизм из каждой из групп $\Gamma(m,n,\Pi)$ и $B(m,n,\alpha)$ на $B(m,n)$ для фиксированных m и n. Более того, эти группы $\Gamma(m,n,\Pi)$ и $B(m,n,\alpha)$ обладают следующими двумя свойствами: 1. каждая из этих (m порожденных) групп имеет систему определяющих соотношений вида $A^n = 1$ для некоторых элементов A; 2. в каждой из этих групп для любого элемента Y, имеющего конечный порядок, выполняется определяющее соотношение $Y^n = 1$.

Пусть X – произвольный групповой алфавит, $\mathcal{R}$ – некоторое множество записанных в этом алфавите слов, $n > 1$ фиксированное натуральное число и

$$G = \langle X | R^n = 1, R \in \mathcal{R} \rangle \tag{1.1}$$

задание некоторой группы G.

Определение 1.1. *Скажем, что группа* (1.1) *является n-крученой группой, если для любого элемента $Y \in G$ либо $Y^n = 1$, либо Y имеет бесконечный порядок.*

Циклическая группа порядка n и бесконечная циклическая группа являются простейшими примерами n-крученых групп. Очевидно также, что свободные группы любого ранга являются n-кручеными группами для любого натурального n. А.Каррас, В.Магнус и Д.Солитэр в [2] доказали, что в любой группе $G = \langle X | A^n = 1 \rangle$, где A – простое слово (т.е. слово не являющееся собственной степенью другого слова), элемент A имеет порядок n в G, а каждый элемент конечного порядка в G сопряжен с некоторой степенью элемента A. Это означает, что любая группа с одним определяющим соотношением вида $A^n = 1$ является n-крученой группой. Из результата работы [3] С.И.Адяна (см. также [4]) следует, что в любой конечно представленной n-крученой группе алгоритмические проблемы равенства и сопряженности разрешимы для всех нечетных $n \geq 665$. Помимо абсолютно свободных групп и приведенных выше групп $B(m, n)$, $B(m, n, \alpha)$, $\Gamma(m, n, \Pi)$, $m \geq 1$, исследованных в работах [1], [3]-[5], С.И.Адян в работе [6] изучил свободные группы многообразия, удовлетворяющее тождеству $[x, y]^n = 1$. На основании работы [6] нетрудно вывести, что эти свободные группы тоже являются n-кручеными группами. Некоторые группы, которые, по сути, являются n-кручеными, были построены и изучены также в работах А.Ю.Ольшанского, С.В.Иванова, И.Г.Лысенка, В.С.Атабекяна и других авторов (см. [7]–[12]).

Обозначим через $B(X, n)$ свободную бернсайдову группу периода n с одинаковой с G системой порождающих X:

$$B(X, n) = \langle X \mid A^n = 1 \text{ для всех слов } A \text{ в групповом алфавите} X \rangle.$$

Тождественное на множестве порождающих X отображений из G в $B(X, n)$ продолжается до сюръективного гомоморфизма, так как в силу определения (1.1)

n-крученой группы все ее определяющие соотношения имеют вид $R^n = 1$, где $R \in \mathcal{R}$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Любая n-крученая группа $G = \langle X | R^n = 1, R \in \mathcal{R} \rangle$ гомоморфно отображется на $B(X, n)$. В частности, любая нециклическая n-крученая группа бесконечна, если n имеет нечетный делитель $k \geq 665$ или делитель вида $k = 16m \geq 8000$.*

Вторая часть предложения 1.1 следует из вышеуказанной теоремы С.И.Адяна и теоремы И.Г.Лысенка [9] (см. также [8]).

Мы покажем, что при нечетных $n \geq 665$ для каждой n-крученой группы можно построить теорию, аналогично теории построенной в монографии [1], что позволит n-крученые группы исследовать методами развитыми в [1] и изучить их ключевые свойства, некоторые из которых мы докажем в настоящей работе. Для показателей вида $n = 16m \geq 8000$ аналогичную теорию можно построить на основе [9], [8].

Сначала укажем еще один обширный класс n-крученых групп, который получается с помощью следующей теоремы.

Теорема 1.1. *n-периодическое произведение любого семейства n-крученых групп является n-крученой группой для любого нечетного $n \geq 665$.*

Напомним, что n-периодические произведения групп были введены С. И. Адяном в [13]. Установлено, что периодические произведения являются ассоциативными, точными, наследственны по подгруппам, а также обладают важными свойствами, такими как хопфовость, C^*-простота, равномерная неаменабельность, SQ-универсальность и т.д. (см. [13]-[18]). В продолжении всей статьи мы будем предполагать, что $n \geq 665$ – произвольное фиксированное нечетное число.

Теорема 1.2. *Любая n-крученая группа может быть задана с помощью некоторой независимой системы определяющих соотношений $\{A^n = 1 : A \in \mathcal{A}\}$, где $\mathcal{A}$ – некоторое множество слов в алфавите X. При этом каждый элемент конечного порядка из G будет сопряжен некоторой степени какого-либо элемента $A \in \mathcal{A}$.*

Хорошо известно, что централизатор любого нетривиального элемента абсолютно свободной группы – циклическая. Согласно теореме С.И.Адяна центры групп $B(m, n)$ и $B(m, n, \alpha)$ тривиальны для всех нечетных $n \geq 665$. Более того, централизатор любого нетривиального элемента этих групп также циклическая (см. [1], гл. 6, теоремы 3.1 и 3.2). В работе [19] доказали, что централизаторы любых нетривиальных элементов относительно свободных групп $\Gamma(m, n, \Pi)$ тоже цикличны для всех нечетных $n \geq 1003$. Опираясь на независимую систему определяющих соотношений из теоремы 1.2 мы докажем, что эти свойства относятся к любым n-крученым группам.

Теорема 1.3. *Централизатор любого нетривиального элемента любой n-крученой группы является циклической группой.*

Следствие 1.1. *Центр любой нециклической n-крученой группы тривиален.*

Следствие 1.2. *Любая абелева подгруппа каждой n-крученой группы является циклической группой.*

Следующее утверждение верно для всех групп, которые имеют только циклические централизаторы для нетривиальных элементов (см. [20], лемма 2.3).

Следствие 1.3. *Каждая нетривиальная нормальная подгруппа любой нециклической n-крученой группы бесконечна.*

Следующий результат касается алгоритмическим проблемам.

Теорема 1.4. *Если представление* (1.1) *n-крученой группы G рекурсивно, то в G разрешимы проблема распознавания равенства слов и проблема сопряженности.*

Следствие 1.4. *В любой конечно определенной n-крученой группе проблемы равенства и сопряженности разрешимы.*

В [21] рассмотрены относительно свободные группы K, имеющие только циклические централизаторы для нетривиальных элементов. Доказано, что любой автоморфизм полугруппы эндоморфизмов $End(K)$ группы K из указанного класса однозначно определяется своим действием на подгруппу внутренних автоморфизмов $Inn(K)$. Сопоставляя этот результат с теоремой 1.3 получаем следующее утверждение.

Следствие 1.5. *Если автоморфизм полугруппы $End(K)$ относительно свободной n-крученой группы K действует тождественно на подгруппе внутренних автоморфизмов $Inn(K)$, то он действует тождественно на всей полугруппе $End(K)$.*

Следствие 1.6. *Группа автоморфизмов $Aut(End(K))$ канонически вложена в группу $Aut(Aut(K))$ для любой относительно свободной n-кручeной группы K.*

Следствия 1.5 и 1.6 обобщают теорему 2 и следствие 4 соответственно из работы [19], доказанные для групп $\Gamma(m, n, \Pi)$ при нечетных $n \geq 1003$.

Теорема 1.1 будет доказана в §2. В §3 для каждой n-кручeной группы будет построена специальная независимая система определяющих соотношений, на основании которой в §4 будет обоснована теорема 1.2, а в §5 – теорема 1.3.

В дальнейшем мы неоднократно будем ссылаться на монографию [1]. При ссылках на утверждения из [1] мы используем принятые в ней стандартные обозначения. Например, II.5.3 [1] означает пункт 3 параграфа 5 главы II из [1].

2. Доказательство теоремы 1.1

Докажем, что *n-периодическое произведение любого семейства n-кручeных групп является n-кручeной группой.*

Периодическим произведением показателя n (или n-периодическим произведением) семейства групп $\{G_i\}_{i\in I}$ называется группа, получающаяся в результате добавления к соотношениям свободного произведения $F = \prod\limits_{i\in I}{}^{*}G_i$ всех определяющих соотношений вида $A^n = 1$, где A есть элементарный период некоторого ранга α при определенной классификации периодических слов свободного произведения F (см. определение п.8 [13]). По теореме 2 [13] равенство $X^n = 1$ в группе $\prod\limits_{i\in I}{}^{\mathbf{n}}G_i$ выполняется для каждого слова X из свободного произведения F, которое не сопряжено в группе $G = \prod\limits_{i\in I}{}^{\mathbf{n}}G_i$ никакому элементу подгрупп G_i, $i \in I$. Кроме того, в силу теоремы 3 из [13], каждый множитель G_i, $i \in I$ тождественно вкладывается в n-периодическое произведение G (см. также [18], [16]).

Предположим, что все множители G_i данного n-периодического произведения $G = \prod\limits_{i\in I}{}^{\mathbf{n}}G_i$ являются n-кручеными группами. Тогда каждое из групп G_i имеет представление вида $G_i = \langle a_{ik}, k \in S_i |\, g_{il}^n, l \in J_i\rangle$ для некоторых множеств индексов S_i, J_i, $i \in I$, а свободное произведение F будет иметь, соответственно, представление:

$$\prod_{i\in I}{}^{*}G_i = \langle a_{ik}, k \in S_i, i \in I |\, g_{il}^n, l \in J_i, i \in I\rangle\,.$$

Как было отмечено выше, n-периодическое произведение семейства групп $\{G_i\}_{i\in I}$ получатся в результате добавления к соотношениям свободного произведения

$\prod\limits_{i\in I}{}^{*}G_i$ всех определяющих соотношений вида $A^n = 1$, где каждый элемент A есть элементарный период некоторого ранга α при определенной классификации периодических слов в групповом алфавите $\{a_{ik}\}_{k\in S_i, i\in I}$ свободного произведения $\prod\limits_{i\in I}{}^{*}G_i$. Таким образом, n-периодическое произведение G имеет такое представление, в котором все определяющие соотношения имеют вид $r^n = 1$ (где $r = g_{il}, l \in J_i, i \in I$ или $r = A$, A – элементарный период). Далее, по теореме 2 из [13] равенство $X^n = 1$ в группе $\prod\limits_{i\in I}{}^{\mathbf{n}}G_i$ выполняется для каждого слова X из свободного произведения $\prod\limits_{i\in I}{}^{*}G_i$, которое не сопряжено в группе $\prod\limits_{i\in I}{}^{\mathbf{n}}G_i$ никакому элементу подгрупп G_i, $i \in I$. А если X сопряжено в группе $\prod\limits_{i\in I}{}^{\mathbf{n}}G_i$ какому-то элементу одной из подгрупп G_i, $i \in I$, то он либо имеет бесконечный порядок, либо $X^n = 1$, так как, по условию, каждая группа G_i, $i \in I$, является n-крученой группой и, кроме того, в силу теоремы 3 из [13], каждый множитель G_i, $i \in I$ тождественно вкладывается в n-периодическое произведение G. Теорема 1.1 доказана.

3. Независимые системы определяющих соотношений для n-крученых групп

Пусть группа G с представлением (1.1) произвольная n-крученая группа. Для каждой такой группы индукцией по натуральному параметру α мы построим некоторое представление с помощью порождающих X и новой системы определяющих соотношений $\{A^n = 1; A \in \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \mathcal{E}_\alpha\}$. Мы будем пользоваться обозначениями и системой ссылок, принятой в работе [1]. Изложенная в параграфе 4 главы I и в параграфе 2 главы VII монографии [1] система определений сложной совместной индукцией по натуральному параметру, называемому рангом, была основана на понятии (отмеченных) элементарных слов вида A^n, где n есть фиксированное нечетное число ≥ 1003. Для доказательства теоремы 1.2 мы построим аналогичную систему понятий, используя заданное множество слов $\mathcal{R}$.

Прежде всего, мы можем считать, что все слова $R \in \mathcal{R}$ в представлении (1.1) являются циклически несократимыми и простыми, т.е. ни одно слово R не является собственной степенью какого-либо слова. Действительно, если скажем, $R_1^k = R \in \mathcal{R}$, то элемент R_1 в G имеет конченый порядок, и так как G – n-крученая группа, то $R_1^n = 1$ в G. Тогда соотношение R^n можно заменить на соотношение $R_1^n = 1$.

Для ранга 0 все понятия остаются без изменений. В частности, все несократимые слова называются приведенными в ранге 0, а всякое циклически несократимое слово есть период ранга 1.

Все слова $R \in \mathcal{R}$ являются *минимальными* периодами ранга 1 в силу их циклически несократимости и простоты (см. определение I.4.9 [1]). Среди всех приведенных в ранге 0 слов (множество которых обозначается через $\mathcal{R}_0$) мы можем выделить все *элементарные периоды* ранга 1 согласно определению I.4.10 из [1]. Элементарный период E ранга 1 назовем *отмеченным* (в ранге 0), если какой либо циклический сдвиг слова E или его обратного принадлежит множеству $\mathcal{R}$. В противном случае элементарный период ранга 1 назовем *неотмеченным*. Затем мы введем повороты ранга 1 для всех периодических слов, периоды которых отмеченные в ранге 0 элементарные периоды ранга 1. Эти повороты будут иметь обычную форму:

$$PA^tA_1Q \to P(A^{-1})^{n-t-1}A_2^{-1}Q, \tag{3.1}$$

где A или A^{-1} есть отмеченный элементарный период ранга 1 или некоторый его циклический сдвиг, $A \equiv A_1A_2$ и слова A^tA_1 и $(A^{-1})^{n-t-1}A_2^{-1}$ содержат не менее $p = 9$ участков, т.е. являются p-степенями.

Естественным образом мы определяем *реальные повороты* ранга 1. На базе реальных поворотов определяется понятие *ядра* ранга 1 для слов $W \in \mathcal{N}_1$, где множество слов $\mathcal{N}_1$ определяется согласно I.4.21 из [1]. Далее согласно I.4.26 из [1] мы определяем множества $\mathcal{R}_1, \mathcal{K}_1, \mathcal{L}_1, \mathcal{M}_1$, отношение эквивалентности ранга 1, обозначаемое через $\overset{1}{\sim}$, а также все остальные понятия ранга 1. Доказательства всех необходимых свойств введенных в §4 главы I монографии [1] понятий ранга 1 проходят без изменений. Новым является только ограничение класса элементарных слов отмеченными элементарными словами ранга 1. Наконец, для любых слов $B, C \in \mathcal{R}_1$ определим бинарную *операцию* $[B, C]_1$ *смыкания* ранга 1 по аналогии определения I.4.36 [1]:

$$[B, C]_1 = PQ \leftrightarrow \exists T(B \overset{1}{\sim} PT \ \&\ C \overset{1}{\sim} T^{-1}Q \ \&\ PQ \in \mathcal{R}_1).$$

Далее совместной индукцией по рангу α все введенные понятия определяются для всех натуральных рангов. Пусть *отмеченные* периоды ранга α и аналоги всех понятий, которые были определены в §4 главы I монографии [1], уже введены для всех рангов $\leq \alpha$. Определим их в ранге $\alpha + 1$.

Если $W \in \mathcal{R}_0$ и $W \equiv x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$, где $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}$ принадлежат множеству порождающих X (знак $\equiv$ означает графическое равенство), то через $[W]_\alpha$ обозначим результат следующей последовательности смыканий ранга α:

$$[[\cdots[[x_{i_1}, x_{i_2}]_\alpha, \cdots]_\alpha, x_{i_k}]_\alpha.$$

Таким образом,

$$[W]_\alpha \equiv [[\cdots[[x_{i_1}, x_{i_2}]_\alpha, \cdots]_\alpha, x_{i_k}]_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha. \tag{3.2}$$

Элементарный период A ранга $\alpha+1$ назовем *отмеченным элементарным периодом* (в ранге α), если можно указать такое слово B и такое слово $R \in \mathcal{R}$, что

$$[R]_\alpha \overset{\alpha}{\sim} [BA^jB^{-1}]_\alpha \tag{3.3}$$

для некоторого целого j. В противном случае элементарный период ранга $\alpha+1$ назовем *неотмеченным элементарным периодом ранга* $\alpha+1$. Легко проверить, что при $\alpha = 1$ определение отмеченного элементарного периода ранга α совпадает с приведенным выше определением отмеченного элементарного периода ранга 1, так как если $BE^jB^{-1} \overset{0}{\sim} R \in \mathcal{R}$, то $BE^jB^{-1} = R$ в свободной группе. Тогда $|j| = 1$, поскольку слово R является простым. Следовательно один из слов E, E^{-1} является циклическим сдвигом слова R в силу циклической несократимости элементов из $\mathcal{R}$ и элементарного периода E.

Используя понятие отмеченного элементарного периода мы по аналогии с §2 главы VII монографии [1] вносим некоторые изменения в определениях некоторых понятий из §4 главы I монографии [1]. Именно, во всех упоминаниях о нормированных вхождениях элементарных слов ранга α будем предполагать, что имеются ввиду отмеченные элементарные периоды ранга α. Все остальные определения формально остаются без изменения. Все утверждения глав II-V монографии [1], а также все утверждения из пунктов 2.3, 2.4 и 2.7-2.10 главы VII [1] и лемма 2.6 из работы [22] (которые верны не только для нечетных $n \geq 1003$, но и для нечетных $n \geq 665$) их доказательства формально повторяются и остаются в силе с учетом поправки о понятии отмеченного элементарного периода в приведенном выше новом смысле. Подчеркнем, в частности, что согласно леммы V.1.8 [1] бинарная операция смыкания ранга α является ассоциативной операцией при любом $\alpha \geq 0$.

На основании введенных понятий мы построим новое представление для группы G. Пусть $\Gamma_G(X,0)$ есть свободная группа с образующими X. Сначала построим вспомогательные группы $\Gamma_G(X,\alpha)$, которые строятся индукцией по рангу α (по аналогии определения VI.2.2 групп $B(m,n,\alpha)$ из монографии [1]).

Предположим $\alpha > 0$ и группы $\Gamma_G(X,\gamma)$ уже построены для всех $\gamma \le \alpha - 1$. Через $\mathcal{E}_\alpha$ обозначим множество, состоящее из таких отмеченных элементарных периодов A ранга α, чтобы выполнялись условия:

(a) для всякого отмеченного элементарного периода E ранга α имеется одно и только одно слово $A \in \mathcal{E}_\alpha$ такое, что период E сопряжен в группе $\Gamma_G(X,\alpha-1)$ или с периодом A, или с A^{-1}.

(b) если $A \in \mathcal{E}_\alpha$, то при некоторых слов P и Q имеет место включение $PA^nQ \in \overline{\mathcal{M}}_{\alpha-1}$.

Замечание. *Существование элементарных периодов A с указанным выше свойствами* (a) *и* (b) *доказано в лемме* 3.5 (см. ниже).

Через $\Gamma_G(X,\alpha)$ обозначим группу с теми же образующими X и системой определяющих соотношений $A^n = 1$, где $A \in \bigcup_{\alpha=1}^{n} \mathcal{E}_\alpha$:

$$\Gamma_G(X,\alpha) = \langle X \mid A^n = 1,\ A \in \bigcup_{\alpha=1}^{n} \mathcal{E}_\alpha \rangle.$$

Далее, обозначим

$$\mathcal{E} = \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \mathcal{E}_\alpha. \tag{3.4}$$

По определению, группа $\Gamma_G(X)$ порождается образующими X и имеет систему определяющих соотношений $A^n = 1$, где $A \in \mathcal{E}$:

$$\Gamma_G(X) = \langle X \mid A^n = 1,\ A \in \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \mathcal{E}_\alpha \rangle. \tag{3.5}$$

Предложение 3.1. *Группы G и $\Gamma_G(X)$ совпадают:*

$$G = \Gamma_G(X) = \langle X \mid A^n = 1,\ A \in \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \mathcal{E}_\alpha \rangle. \tag{3.6}$$

Для доказательства предложения 3.1 нам понадобятся некоторые леммы.

Следующая лемма доказывается точно так, как лемма VI.2.8 монографии [1], только в этом доказательстве везде группу $B(m,n,\alpha)$ нужно заменить на группу $\Gamma_G(X,\alpha)$.

Лемма 3.1. *Для любых двух слов* $C, D \in \mathcal{R}_\alpha$ $(\alpha \geq 0)$ *выполнено соотношение*

$$C \overset{\alpha}{\sim} D \;\; \Leftrightarrow C = D \text{ в } \Gamma_G(X, \alpha).$$

Лемма 3.2. *Для любого ранга* α *и любого слова* C *в* $\Gamma_G(X, \alpha)$ *имеет место равенство*

$$C = [C]_\alpha.$$

Доказательство. Индукция по длине C. При $\partial(C) = 0$ все ясно. Пусть $C \equiv C_1 x_k$, где $x_k \in X$. Согласно определению имеем $[C]_\alpha = [[C_1]_\alpha, x_k]_\alpha$. По индуктивному предположению имеем $[C_1]_\alpha = C_1$ в $\Gamma_G(X, \alpha)$. В силу леммы V.1.4 [1] найдется такое слово $C_2 \in \mathcal{K}_\alpha$, что $[C_1]_\alpha \overset{\alpha}{\sim} C_2$ и $[[C_1]_\alpha, x_k]_\alpha = [C_2, x_k]_0$. Тогда, в силу леммы 3.1 $[C_1]_\alpha = C_2$ в $\Gamma_G(X, \alpha)$ и, следовательно в $\Gamma_G(X, \alpha)$ имеем:

$$C = C_1 x_k = [C_1]_\alpha x_k = C_2 x_k = [[C_1]_\alpha, x_k]_\alpha = [C]_\alpha.$$

□

Лемма 3.3. *Для любого ранга* α *и любого слова* C *можно указать такое слово* $D \in \mathcal{K}_\alpha$, *что* $C = D$ *в* $\Gamma_G(X, \alpha)$. *Если* $\alpha \geq \partial(C)$, *то такое* D *можно указать в* $\mathcal{A}_{\alpha+1}$.

Доказательство. Доказывается индукцией по длине $\partial(C)$ слова C по аналогии доказательства леммы VI.2.4 из [1]. □

Лемма 3.4. *Период* E *является отмеченным элементарным периодом ранга* α *тогда и только тогда, когда можно указать такое слово* $R \in \mathcal{R}$ *и такое слово* B, *что*

$$R = B A^j B^{-1}$$

в группе $\Gamma_G(X, \alpha - 1)$ *для некоторого целого* j.

Доказательство. Следует из определения отмеченного элементарного периода, эквивалентности (3.3) и из лемм 3.1, 3.2. □

Лемма 3.5. *Каждый элементарный период* E *ранга* $\alpha \geq 1$ *сопряжен в группе* $\Gamma_G(X, \alpha - 1)$ *некоторому элементарному периоду* A *ранга* α *такому, что для некоторых слов* P *и* Q *имеет место включение* $PA^nQ \in \overline{\mathcal{M}}_{\alpha-1}$. *При этом, если* E *– отмеченный (неотмеченный) элементарный период ранга* α, *то и* A *является отмеченным (неотмеченным) элементарным периодом ранга* α.

Доказательство. Пусть E – произвольный элементарный период ранга $\alpha \geq 1$ и $P * F * Q$ – нормальное порождающее вхождение в некоторое слово $Y \in \mathrm{Integ}(X, \alpha, E)$). По лемме IV.3.12 [1] найдем такое слово $Z \in \overline{\mathcal{M}}_{\alpha-1}$, что $Z \overset{\alpha-1}{\sim} Y$. Согласно II.2.16 из [1] с точностью до циклического сдвига периода E можно считать, что вхождение $P * F * Q$ имеет вид $P_1 * E^k E_1 * Q_1$, где E_1 – начало E. В силу II.4.1 из [1] вхождение $f_{\alpha-1}(P * F * Q; Y, Z)$ имеет вид $P_2 * A^k A_1 * Q_2$, где A есть образ периода E в $f_{\alpha-1}(P * F * Q; Y, Z)$. Тогда в силу II.4.3 из [1] слово A есть период ранга α и найдется такое порождающее вхождение $P' * F * Q'$ в некоторое слово $Y' \in \mathrm{Per}(\alpha, E)$, что $\rho_{\alpha,E}(X) = \rho_{\alpha,A}(Y')$ и $\mathrm{wnorm}_{\alpha-1}(P * F * Q, P' * F * Q')$.

По лемме 2.6 работы [22] (усиление леммы II.7.15 из [1]) периоды E и A сопряжены в $\Gamma_G(X, \alpha-1)$. Из $Z \in \overline{\mathcal{M}}_{\alpha-1}$ в силу II.7.10 из [1] следует, что период A^n входит в некоторое слово из $\overline{\mathcal{M}}_{\alpha-1}$. Первое утверждение леммы доказано.

Пусть $E = TAT^{-1}$ в $\Gamma_G(X, \alpha-1)$ и E – отмеченный элементарный период ранга α. По лемме 3.4 можно указать такое слово $R \in \mathcal{R}$ и такое слово B, что $R = BE^j B^{-1}$ в группе $\Gamma_G(X, \alpha-1)$ для некоторого целого j. Тогда $R = (BT)A^j(BT)^{-1}$ в группе $\Gamma_G(X, \alpha-1)$ и A является отмеченным в силу леммы 3.4. $\square$

Лемма 3.6. *Если E есть отмеченный элементарный период некоторого ранга $\gamma \geq 1$ (или если $E \in \mathcal{E}_\gamma$), то E имеет порядок n в группе $\Gamma_G(X, \gamma)$ (и в группе $\Gamma_G(X)$).*

Доказательство. По определению, всякий отмеченный элементарный период E ранга $\gamma \geq 1$ сопряжен в группе $\Gamma_G(X, \gamma-1)$ некоторому элементарному периоду $A \in \mathcal{E}_\gamma$ или его обратному. Поскольку $A^n = 1$ является одним из определяющих соотношений группы $\Gamma_G(X, \gamma)$, то и $E^n = 1$ в $\Gamma_G(X, \gamma)$.

То, что порядок элементарного периода $A \in \mathcal{E}_\gamma$ не меньше n в группе $\Gamma_G(X)$ стандартным образом следует из леммы IV.2.16 из [1]. $\square$

Лемма 3.7. *Если E есть неотмеченный элементарный период некоторого ранга γ, то E имеет бесконечный порядок в $\Gamma_G(X)$.*

Доказательство. По лемме 3.5 элементарный периода E ранга $\gamma \geq 1$ сопряжен в группе $\Gamma_G(X, \alpha-1)$ некоторому элементарному периоду A ранга γ такому, что при некоторых слов P и Q имеет место включение $PA^nQ \in \overline{\mathcal{M}}_{\gamma-1}$. В силу леммы IV.2.1 из [1] справедливо включение $A^q \in \mathcal{K}_{\gamma-1}$. Если E есть неотмеченный элементарный период ранга γ, то по лемме VII.2.9 из [1] при любом $i > 10$ и $\alpha \geq \gamma$

имеем $A^i \in \mathcal{R}_\alpha$. В силу леммы IV.2.16 из [1] и леммы 3.1 получаем, что период A имеет бесконечный порядок в группе $\Gamma_G(X, \alpha)$ для любого $\alpha \geq \gamma$. $\square$

Лемма 3.8. *Для любого слова C, которое не равно 1 в группе $\Gamma_G(X)$, можно указать такие слова T и E, что $C = TE^rT^{-1}$ в $\Gamma_G(X)$ при некотором целом r, где либо $E \in \mathcal{E}$, либо E – неотмеченный элементарный период некоторого ранга γ и слово E^q входит в некоторое слово из класса $\overline{\mathcal{M}}_{\gamma-1}$.*

Доказательство. Нужно повторить доказательство леммы VI.2.5 монографии [1], только везде вместо группы $B(m,n)$ нужно рассматривать группу $\Gamma_G(X)$, а ссылки на леммы 1.2, 2.3 и 2.4 главы VI из [1] нужно заменить ссылками на лемму VII.2.7 из [1] и на леммы 3.1 и 3.3 соответственно. $\square$

Лемма 3.9. *Группа $\Gamma_G(X)$ является n-крученой группой.*

Доказательство. Является непосредственным следствием лемм 3.8, 3.6 и 3.7. $\square$

Перейдем к доказательству предложения 1.1. Докажем, что в группах G и $\Gamma_G(X)$ выполняются одни и те же определяющие соотношения.

Пусть $R \in \mathcal{R}$. Согласно лемме 3.8, если слово R не равно 1 в группе $\Gamma_G(X)$, то можно указать такие слова T и E, что $C = TE^rT^{-1}$ в $\Gamma_G(X)$ при некотором целом r, где либо $E \in \mathcal{E}$, либо E – неотмеченный элементарный период некоторого ранга γ и слово E^q входит в некоторое слово из класса $\overline{\mathcal{M}}_{\gamma-1}$. Из равенства $R = TE^rT^{-1}$ в $\Gamma_G(X)$ следует равенство $T^{-1}RT = E^r$ в $\Gamma_G(X, \alpha)$ для некоторого $\alpha \geq \gamma$. Согласно лемме 3.3 можно считать, что $T^{-1}RT, E^r \in \mathcal{A} = \bigcup_{\beta=1}^{\infty} \mathcal{A}_\beta = \bigcap_{\beta=1}^{\infty} \mathcal{R}_\beta$. Тогда в силу леммы 3.1 имеем $T^{-1}RT \overset{\alpha}{\sim} E^r$.

Период E является элементарным периодом ранга $\gamma \leq \alpha$. Следовательно в E^r не входят активные ядра рангов $\geq \gamma$. Поэтому, в силу леммы IV.2.13 из [1] и из эквивалентности $T^{-1}RT \overset{\alpha}{\sim} E^r$ вытекает $T^{-1}RT \overset{\gamma-1}{\sim} E^r$. По лемме 3.1 получаем $T^{-1}RT = E^r$ в $\Gamma_G(X, \gamma - 1)$. Значит, в силу леммы 3.4, E является отмеченным элементарным периодом ранга γ. По лемме 3.6 в группе $\Gamma_G(X)$ выполняется соотношение $E^n = 1$, следовательно, в силу равенства $R = TE^rT^{-1}$, в группе $\Gamma_G(X)$ также выполняется соотношение $R^n = 1$.

Теперь докажем обратное. Индукцией по рангу $\alpha \geq 1$ докажем, что если $A^n = 1$ – произвольное определяющее соотношение группы $\Gamma_G(X)$, то соотношение $A^n = 1$ также выполняется в группе G. Поскольку $A \in \mathcal{E}_\alpha$, то A – отмеченный элементарный период ранга α. Согласно лемме 3.4 найдется слово $R \in \mathcal{R}$ такое, что $R = BA^jB^{-1}$ в группе $\Gamma_G(X, \alpha - 1)$ для некоторого слова B и целого j.

При $\alpha = 1$ получаем $R = BA^{\pm 1}B^{-1}$ в свободной группе $\Gamma_G(X, 0)$ из-за простоты слова R. Так как $R^n = 1$ в G, то немедленно получаем, что и $A^n = 1$ в G.

Пусть $\alpha \geq 2$ и утверждение верно для всех определяющих соотношений вида $A_1^n = 1$ с элементарными периодами $A_1 \in \mathcal{E}$ ранга $\leq \alpha - 1$. Поскольку в $\Gamma_G(X, \alpha - 1)$ выполняется равенство $R = BA^jB^{-1}$, то по индуктивному предположению оно выполняется и в группе G. В силу соотношения $R^n = 1$ в G имеем $A^{jn} = 1$. Значит A имеет конечный порядок в G. Так как G является n-крученой группой, то $A^n = 1$ в G. Предложение 3.1 доказано.

Предложение 3.2. *Система определяющих соотношений* $\{A^n = 1,\ A \in \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \mathcal{E}_\alpha\}$ *группы* G (3.6) *является независимой системой соотношений, т.е. ни один из этих соотношений не следует из остальных.*

Доказательство. Чтобы показать, что система определяющих соотношений n-крученой группы G из представления (3.6) является независимой воспользуемся доказательством независимости построенной в VI.2.2. из [1] системы определяющих соотношений группы $B(m, n)$. Это доказательство приведено в работе [23]. Мы буквально повторим доказательство из [23] лишь везде заменив группу $B(m, n)$ на группу $\Gamma_G(X)$, а множество $\mathcal{E} = \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \mathcal{E}_\alpha$ из VI.2.1 из [1] нужно заменить на определенное равенством (3.4) множество $\mathcal{E}$. $\square$

4. Доказательство теоремы 1.2

Покажем, что любая n-крученая группа может быть задана с помощью некоторой независимой системы определяющих соотношений $\{A^n = 1 : A \in \mathcal{A}\}$, так что при этом каждый элемент конечного порядка из G будет сопряжен некоторой степени какого-либо элемента $A \in \mathcal{A}$.

В силу предложения 3.1 любая n-крученая группа имеет представление вида (3.6) . Согласно предложению 3.2 система определяющих соотношений $\{A^n = 1,\ A \in \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \mathcal{E}_\alpha\}$ группы G из (3.6) является независимой системой соотношений. По лемме 3.8 для каждого нетривиального элемента C из G можно указать такие слова T и E, что $C = TE^rT^{-1}$ в G при некотором целом r, где либо $E \in \mathcal{E}$, либо E – неотмеченный элементарный период некоторого ранга γ и слово E^q входит в некоторое слово из класса $\overline{\mathcal{M}}_{\gamma-1}$. При этом, в силу лемм 3.6, 3.7, если C имеет конечный порядок. то $E \in \mathcal{E} = \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \mathcal{E}_\alpha$. Выбрав в качестве указанной в теореме 1.3 множества слов $\mathcal{A}$ множество $\mathcal{E}$, мы завершим доказательство теоремы 1.3.

5. Доказательство теорем 1.3 и 1.4

Для того, чтобы доказать теорему 1.3, достаточно повторить доказательство теоремы 1 работы [19], в которой утверждается, что централизатор любого неединичного элемента относительно свободной группы $\Gamma = \Gamma(m, n, \Pi)$ – циклическая группа. При этом нужно лишь ссылки на леммы из §2 работы [19] заменить на соответствующие леммы из §3 настоящей работы, группу $\Gamma(m, n, \Pi)$ заменить на $\Gamma_G(X)$, а $\Gamma(m, n, \Pi, \alpha)$ – на $\Gamma_G(X, \alpha)$.

Разрешимость проблемы распознавания равенства слов во всех построенных нами промежуточных группах $\Gamma_G(X, \alpha)$ и в $G = \Gamma_G(X)$ естественно вытекает из рекурсивности множества соотношений в представлении 3.6 и алгоритмической эффективности (см. принцип эффективности в I.5.4 из [1]) всех определений аналогично тому, как это было получено в [1] для групп $B(X, n, \alpha)$.

Разрешимость проблемы сопряженности для группы G получим на основе найденного нами представления 3.6 группы G точно так же, как в VI.3.5 из [1] была доказана разрешимость проблемы сопряженности для свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$.

Abstract. A group is called an n-torsion group if it has a system of defining relations of the form $r^n = 1$ for some elements r, and for any of its finite order element a the defining relation $a^n = 1$ holds. It is assumed that the group can contain elements of infinite order. In this paper, we show that for every odd $n \geq 665$ for each n-torsion group can be constructed a theory similar to that of constructed in S. I. Adian's well-known monograph on the free Burnside groups. This allows us to explore the n-torsion groups by methods developed in that work. We prove that every n-torsion group can be specified by some independent system of defining relations; the center of any non-cyclic n-torsion group is trivial; the n-periodic product of an arbitrary family of n-torsion groups is an n-torsion group; in any recursively presented n-torsion group the word and conjugacy problems are solvable.

Список литературы

[1] С. И. Адян, Проблема Бернсайда и Тождества в Группах, Наука, М. (1975).
[2] A. Karrass, W. Magnus, D. Solitar, "Elements of finite order in groups with a single defining relation", Comm. Pure Appl. Math. **13**, 57 – 66 (1960).

[3] S. I. Adian, “On the word problem for groups defined by periodic relations”, Burnside groups (Proc. Workshop, Univ. Bielefeld, 1977)”, Lecture Notes in Math., **806**, Springer, Berlin, 41 – 46 (1980).
[4] S. I. Adian, “Groups with periodic defining relations”, Math. Notes, **83:3**, 293 – 300 (2008).
[5] S. I. Adian, “New Estimates of odd exponents of infinite Burnside groups”, Proc. Steklov Inst. Math., **289**, 33 – 71 (2015).
[6] S. I. Adyan, “Groups with periodic commutators”, Dokl. Math., **62:2**, 174 – 176 (2000).
[7] A. Yu. Olshanskii, The Geometry of Defning Relations in Groups, Kluwer Academic Publishers (1991).
[8] S. V. Ivanov, “The free Burnside groups of sufficiently large exponents”, Int. J. of Algebra and Computation, **4**, 1 – 307 (1994).
[9] I. G. Lysenok, “Infinite Burnside groups of even exponent”, Izv. Math., **60:3**, 453 – 654 (1996).
[10] S. V. Ivanov, A. Yu. Olshanskii, “On finite and locally finite subgroups of free Burnside groups of large even exponents”, J. Algebra, **195:1**, 241 – 284 (1997).
[11] A. Yu. Ol’shanskii, “Self-normalization of free subgroups in the free Burnside groups”, Groups, rings, Lie and Hopf algebras (St. John’s, NF, 2001), Math. Appl., **555**, Kluwer, Dordrecht, 179 – 187 (2003).
[12] A. Yu. Ol’shanskii, D. Osin, “C*-simple groups without free subgroups”, Groups, Geometry and Dynamics, **8**, 933 – 983 (2014).
[13] S. I. Adian, “Periodic products of groups”, Proc. Steklov Inst. Math., **142**, 1 – 19 (1979).
[14] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, “The Hopfian Property of n-Periodic Products of Groups, Math. Notes, **95:4**, 443 – 449 (2014).
[15] V. S. Atabekyan, “On normal subgroups in the periodic products of S.I.Adian”, Proc. Steklov Inst. Math., **274**, 9 – 24 (2011).
[16] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, “Characteristic properties and uniform non-amenability of n-periodic products of groups”, Izv. RAN. Ser. Mat., **79:6**, 3 – 17 (2015).
[17] V. S. Atabekyan, A. L. Gevorgyan, Sh. A. Stepanyan, “The unique trace property of n-periodic product of groups”, Journal of Contemporary Mathematical Analysis, **52**:4, 161 – 165 (2017).
[18] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, “Periodic product of groups”, Journal of Contemporary Mathematical Analysis, **52**:3, 111 – 117 (2017).
[19] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, “On free groups in the infinitely based varieties of S. I. Adian”, Izv. RAN. Ser. Mat., **81:5**, 3 – 14 (2017).
[20] C. Delizia, H. Dietrich, P. Moravec, C. Nicotera, “Groups in which every non-abelian subgroup is self-centralizing”, Journal of Algebra, **462**, 23 – 36 (2016).
[21] V. S. Atabekyan, “The automorphisms of endomorphism semigroups of relatively free groups”, Internat. J. Algebra Comput., **28:1**, 207 – 215 (2018).
[22] S. I. Adian, I. G. Lysenok, “On groups all of whose proper subgroups of which are finite cyclic”, Math. USSR-Izv., **39:2**, 905 – 957 (1992).
[23] V. L. Shirvanjan, “Embedding the group $B(\infty, n)$ in the group $B(2, n)$”, Math. USSR-Izv., **10:1**, 181 – 199 (1976).

Поступила 27 февраля 2019

После доработки 17 апреля 2019

Принята к публикации 25 апреля 2019