Известия НАН Армении, Математика, том 54, н. 5, 2019, стр. 82 – 89

О ПОВЕДЕНИИ ДВУХ ТИПОВ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЖИДАНИЙ ДЛЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Г. С. СУКИАСЯН, М. Е. АЛАЕИ

Институт математики НАН РА, Ереван, Армения
E-mails: *haik@instmath.am*; *m_e_alaei@yahoo.com*

Аннотация. В статье изучаются функции, зависящие от реализации случайной величины с логарифмически нормальным распределением и двух типов математических ожиданий. Даются интерпретации этих функций и математических ожиданий в терминах актуарной математики. Проведен сравнительный анализ двух типов математических ожиданий с использованием формул Блэка-Шоулза. Выработаны критерии подчинения случайной величины стохастическому уравнению диффузии. Полученные критерии проверены на численном примере изменения цены на нефть и могут быть использованы для прогнозирования финансовых кризисов.

MSC2010 number: 60G51

Ключевые слова: стохастическое уравнение диффузии; формула Блэка-Шоулза; лог-нормальное распределение.

1. Введение

Пусть зафиксирована реализация $f(t)$ случайной величины $S(t)$ на конечном дискретном множестве точек $t_0 = 0 < t_1 < ... < t_n$, т.е. имеем выборку $f(t_0), f(t_1),..., f(t_n)$. Исследуется следующая задача: по значениям выборки $f(t_0), f(t_1),..., f(t_n)$ определить подчиняется ли $S(t)$ стохастическому уравнению диффузии. Так как стохастическое уравнение диффузии служит моделью многих случайных процессов изучаемых в финансовой математике, то становится ясным актуальность и важность данной задачи.

В статье изучаются функции, зависящие от выборки $f(t_0), f(t_1),..., f(t_n)$ и двух типов математических ожиданий. Найдены соотношения между этими функциями, выполняемые при условии, что выборка $f(t_0), f(t_1),..., f(t_n)$ взята из реализации случайной величины $S(t)$ подчиняющейся стохастическому уравнению диффузии.

Теоретические результаты проверены на примере изменения цены на нефть за период с 1.12.2006 по 28.2.2009. Проведенное численное сравнение подтвердило справедливость полученных свойств изученных функций от реализаций.

2. Предварительные сведения из теории стохастических уравнений

Моделью многих случайных процессов изучаемых в актуарной математике служит стохастическое уравнение диффузии

$$dS(t) = r(t)S(t)\,dt + \sigma(t)S(t)\,dW(t), \tag{2.1}$$

где случайная величина $S(t)$ с непрерывным аргументом t моделирует поведение цены какого-либо товара в момент времени t, функция $r(t)$ показывает скорость изменения банковской ставки (инфляция), $W(t)$ – броуновское движение (случайный гауссовский процесс с независимыми приращениями). Роль дисперсии играет функция $\sigma(t)$, называемая волатильностью процесса.

Известная лемма Ито [1] устанавливает правило дифференцирования функций от случайных величин, удовлетворяющих стохастическому уравнению (2.1): для любой дважды дифференцируемой функции $F(S,t)$ имеем

$$dF(S,t) = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma^2(t)S^2(t)\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\,dt.$$

Если принять $F(S,t) = \ln S$, то получим $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial S} = \frac{1}{S}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$ и уравнение (2.1) сводится к следующему стохастическому уравнению

$$d\ln S(t) = \left(r(t) - \frac{\sigma^2(t)}{2}\right)\,dt + \sigma(t)\,dW(t). \tag{2.2}$$

Теорема 2.1. [1] *В случае отсутствия инфляции $r(t) = 0$ и постоянной волатильности σ решением стохастического уравнения* (2.2) *с начальным условием $S(0) = S_0$ является случайная величина $S(t)$, у которой $\ln S(t)$ имеет нормальное распределение $N(a(t), \sigma(t))$ со средним $a(t) = \ln S_0 - \sigma^2 t/2$ и дисперсией $\sigma(t) = \sigma^2 t$.*

Теорема 2.1 служит мотивацией для рассмотрения в настоящей статье случайной величины $S(t)$, распределение которой предполагается логарифмически нормальным, т.е. случайная величина $\ln S(t)$ для каждого t имеет нормальное распределение $N(a(t), \sigma(t))$ со средним $a(t)$ и дисперсией $\sigma^2(t)$.

3. Два типа математических ожиданий и формулы Блэка-Шоулза

Мы исследуем математическое ожидание следующей функции от $S(t)$:

$$\mathbf{M}_e(t, K) = E[S(t) - K]_+,$$

где K – произвольная положительная константа и

$$X_+ = \begin{cases} X, & \text{если } X \geq 0, \\ 0 & \text{если } 0 \geq X. \end{cases}$$

Пусть $\vec{t} = (t_1, t_2, ..., t_m)$ - последовательность моментов времени $t_1 < t_2 < ... < t_m$. Поведение величины $\mathbf{M}_e$ мы будем сравнивать при тех же значениях параметров K и t с математическим ожиданием похожей функции от той же случайной величины $S(t)$:

$$\mathbf{M}_a\left(\vec{t}, K\right) = E[G\left(m, \vec{t}\right) - K]_+,$$

где $G\left(m, \vec{t}\right)$ есть среднее геометрическое m случайных величин $S(t_i)$, $i = 1, 2, ..., m$, т.е.

$$G\left(m, \vec{t}\right) = \left[S(t_1) \cdot S(t_2) \cdots S(t_m)\right]^{1/m}, \quad \vec{t} = (t_1, t_2, ..., t_m)$$

Эти математические ожидания представляют интерес в финансовой математике, так как если принять, что случайная величина $S(t)$ моделирует поведение цены какого-либо товара в момент времени t, то $\mathbf{M}_e$ можно интерпретировать как ожидаемую цену европейского опциона, а $\mathbf{M}_a$ можно интерпретировать как ожидаемую цену азиатского опциона (см. [1]).

Обозначим через $\Phi(.)$ функцию распределения стандартной нормальной случайной величины $N(0, 1)$.

Теорема 3.1. (Формула Блэка-Шоулза для европейского опциона) *Пусть $S(t)$ – случайная величина, у которой $\ln S(t)$ имеет нормальное распределение $N(a, \sigma)$ со средним $a(t) = \ln S_0 - \sigma^2 t/2$ и дисперсией $\sigma(t) = \sigma^2 t$. Тогда*

$$\mathbf{M}_e(t, K) = E[S(t) - K]_+ = S_0 \Phi(d_1) - K\Phi(d_2), \tag{3.1}$$

где

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\left(\ln S_0 - \ln K + \frac{\sigma^2 t}{2}\right),$$
$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\left(\ln S_0 - \ln K - \frac{\sigma^2 t}{2}\right).$$

Заметим, что если случайная величина $S(t)$, моделирует поведение цены какого-либо товара в момент времени t, то (не случайную) величину S_0 можно интерпретировать как цену товара в момент времени $t = 0$.

Теорема 3.2. (Формула Блэка-Шоулза для азиатского опциона) *Пусть* $S(t)$ – *случайная величина, у которой* $\ln S(t)$ *имеет нормальное распределение* $N(a, \sigma)$ *со средним* $a(t) = \ln S_0 - \sigma^2 t/2$ *и дисперсией* $\sigma(t) = \sigma^2 t$. *Тогда*
(3.2)

$$\mathbf{M}_a\left(\vec{t}, K\right) = E[G\left(m, \vec{t}\right) - K]_+ = \exp\left(-\frac{m-1}{2m^2}T\sigma^2\right) S_0\Phi(d_1(m)) - K\Phi(d_2(m)),$$

где

$$d_1(m) = \frac{m}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln S_0 - \ln K + \frac{T\sigma^2}{2m^2}(2-m)\right),$$

$$d_2(m) = \frac{m}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln S_0 - \ln K - \frac{T\sigma^2}{2m}\right), \quad T = t_1 + t_2 + ... + t_m.$$

Формула (3.1) хорошо известна, см. например, [1], [2]. Формула же (3.2) менее известна, в [1] она приведена без доказательства. Доказательство формулы (3.2) приведено в [3] и [4].

4. Основные результаты

Сравнивая формулы (3.1) и (3.2), нетрудно видеть, что при $m = 1$, $T = t_1 = t$ получаем

$$\mathbf{M}_e(t, K) = \mathbf{M}_a(t, K), \quad \text{для всех } t, K > 0,$$

что согласуется с равенством случайных величин $S(t)$ и $G(1, t)$.

Рассмотрим теперь среднее геометрическое $G(2, t_1, t_2)$ двух случайных величин $S(t_1)$ и $S(t_2)$. Обозначим $dt = t_2 - t_1$.

Теорема 4.1. Пусть случайная величина $S(t)$ подчиняется стохастическому уравнению диффузии. Тогда для всех $t, K > 0$ при $dt \to 0$ имеет место

$$\mathbf{M}_a(t, K) = E[G(2, t - dt, t) - K]_+ = \mathbf{M}_e(t, K) + O(dt),$$

Доказательство. И меем

$$G(2, t - dt, t) = \sqrt{S(t - dt) \cdot S(t)} = \sqrt{[S(t - dt) - S(t) + S(t)] \cdot S(t)}.$$

Разлагая по степеням $dS = |S(t - dt) - S(t)|$, получим

$$G(2, t, t + dt) = S(t)\sqrt{1 + \frac{dS}{S(t)}} = S(t)\left(1 + \frac{dS}{2S(t)}\right) + o(dS). \tag{4.1}$$

Так как случайная величина $S(t)$ имеет логарифмически нормальное распределение с конечной дисперсией, то можем поменять местами операции предельного перехода и усреднения и при $dt \to 0$ имеем

$$\lim_{dt \to 0} E|S(t - dt) - S(t)| = 0.$$

Отсюда в силу (4.1) получаем

$$E|G(2,t,t+dt)-S(t)|=O(dt).$$

Следовательно,

$$\mathbf{M}_a(t,K)=E[G(2,t-dt,t)-K]_+=E[S(t)-K]_++O(dt)=\mathbf{M}_e(t,K)+O(dt).$$

Теорема 4.1 доказана.

Пусть зафиксирована реализация $f(t)$ случайной величины $S(t)$ на конечном дискретном множестве точек $t_0=0<t_1<...<t_n=t$, т.е. имеем выборку $f(t_0)=S_0$, $f(t_1)$,...,$f(t_n)$. Числа $t_0,t_1,...,t_n$ полагаем целыми, а числа $f(t_i)$ полагаем положительными. Для фиксированной реализации $f(t)$ рассмотрим (неслучайную) функцию от K и t

$$L_e(t,K)=\mathbf{M}_e(t,K)-[f(t)-K]_+.$$

Отметим, что $L_e(t,K)$ можно интерпретировать как величину прибыли (или убытков) от европейского опциона, купленного когда цена товара была S_0, при условии, что в момент времени t цена товара стала $f(t)$.

Для фиксированной реализации $f(t)$ поведение функции $L_e(t,K)$ мы будем сравнивать при тех же значениях аргументов K и t с аналогичной функцией

$$L_a(t,K)=\mathbf{M}_a(t,K)-\left[G(m,f(\vec{t}))-K\right]_+,$$

где $G\left(m,f(\vec{t})\right)$ есть среднее геометрическое m значений $f(t_i)$, $i=1,2,...,m$, т.е.

$$G\left(m,f(\vec{t})\right)=\left[f(t_1)\cdot f(t_2)\cdots f(t_m)\right]^{1/m}, \quad \vec{t}=(t_1,t_2,...,t_m)$$

Отметим, что $L_a(t,K)$ можно интерпретировать как величину прибыли (или убытков) от азиатского опциона, купленного когда цена товара была S_0, при условии, что в моменты времени t_i цена товара становилась $f(t_i)$, $i=1,2,...,m$.

Рассмотрим случай $m=2$. Назовем ***скачком*** в точке t разность

$$dJ(t)=f(t+dt)-f(t).$$

Теорема 4.2. Пусть случайная величина $S(t)$ подчиняется стохастическому уравнению диффузии. Тогда для всех $t,K>0$ разность $L_e(t,K)-L_a(t,K)$ представима в виде суммы двух слагаемых, причем при $dt\to 0$ одно слагаемое имеет порядок $O(dt)$, а второе имеет порядок $O(dJ)$:

$$L_e(t,K)-L_a(t,K)=O(dt)+O(dJ).$$

Доказательство. Имеем

$$G(2,t,t+dt) = \sqrt{f(t+dt)\cdot f(t)} = \sqrt{dJ(t)f(t) + (f(t))^2}.$$

Разлагая по степеням dJ, получим

$$G(2,t,t+dt) = f(t)\sqrt{1+\frac{dJ}{f(t)}} = f(t)\left(1+\frac{dJ}{2f(t)}\right) + o(dJ).$$

Следовательно,

$$|G(2,t,t+dt) - f(t)| = O(dJ). \tag{4.2}$$

Учитывая положительность чисел $f(t)$, имеем

$$L_e(t,K) - L_a(t,K) = \mathbf{M}_e(t,K) - \mathbf{M}_a(t,K) - [f(t)-K]_+ + [G(2,t,t+dt)-K]_+$$

$$= \mathbf{M}_e(t,K) - \mathbf{M}_a(t,K) + G(2,t,t+dt) - f(t).$$

Отсюда в силу соотношения (4.2) и Теоремы 4.1, следует утверждение Теоремы 4.2.

Скачок dJ назовем малым, если он имеет порядок $O(dt)$, т.е. $dJ \approx dt$. Скачок dJ назовем большим, если $dt = o(dJ)$. Из Теоремы 4.2 сразу следует:

Предложение 4.1. Малый скачок $dJ \approx dt$ влечет малость разности

$$|L_e(t,K) - L_a(t,K)| = O(dt).$$

Предложение 4.2. Большой скачок $dJ >> dt$ влечет большую разность

$$|L_e(t,K) - L_a(t,K)| = O(dJ) >> dt.$$

Отметим, что Предложения 4.1, 4.2 справедливы при условии, что выборка $f(t_0)$, $f(t_1)$,..., $f(t_n)$ взята из реализации случайной величины $S(t)$ подчиняющейся стохастическому уравнению диффузии (2.2).

В силу того, что при увеличении числа m случайных величин $S(t_i)$, $i = 1,2,...,m$ увеличивается их разброс от среднего геометрического $G\left(m,\vec{t}\right)$ получаем следующее утверждение.

Предложение 4.3. Увеличение величины $m > 1$ влечет увеличение разности $|\mathbf{M}_e(t,K) - \mathbf{M}_a(t,K)|$.

5. Численный пример

Предложения 4.1 – 4.3 проверены на примере изменения цены на нефть за период с 1.12.2006 по 28.2.2009 для $K = 65$, $t = 20$ (см. [5]). На рис. 1 дате

1.12.2006 соответствует точка 0 на оси абсцисс, а дате 28.2.2009 соответствует точка 609.

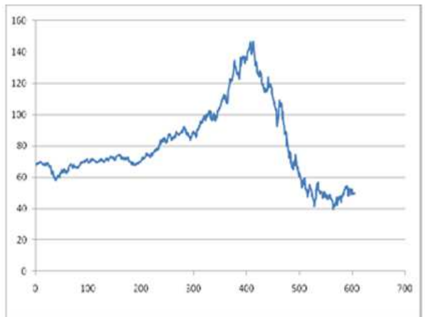

Рис. 1

Проведенное численное сравнение (см. Таблицы 1 и 2) подтвердило в основном справедливость Предложений 4.1 – 4.3.

T	t_0	S_0	$Jumps$	$\lvert L_e - L_a \rvert$
2007/02/07	53	62.97	1.00	0.36
2007/08/03	176	72.49	0.29	0.18
2007/12/31	279	88.87	0.04	0.05
2008/03/03	321	99.15	0.62	0.15
2008/03/04	322	96.09	3.06	1.75
2008/03/14	330	101.75	0.79	0.88
2008/03/17	331	97.83	3.92	2.45
2008/03/18	332	102.18	4.35	6.32
2008/04/01	341	96.03	0.51	0.39
2008/05/01	363	107.04	0.59	0.68
2008/05/02	364	110.98	3.94	1.54
2008/05/20	376	130.16	3.97	1.71
2008/05/21	377	134.42	4.26	1.81
2008/06/05	387	127.40	4.79	1.09
2008/06/10	390	131.12	1.91	2.30
2008/07/29	424	124.06	2.50	1.54
2008/08/21	441	123.71	6.16	2.06
2008/08/29	447	117.38	0.32	0.74
2008/09/12	456	103.36	0.44	0.03
2008/09/18	460	98.57	0.96	0.33
2008/10/13	477	83.63	3.41	1.01
2008/10/31	491	71.18	1.95	4.25

Таблица 1.

T	$Jumps$	$\lvert\mathbf{M}_e - \mathbf{M}_a\rvert$ $for: m = 10$	$\lvert\mathbf{M}_e - \mathbf{M}_a\rvert$ $for: m = 6$	$\lvert\mathbf{M}_e - \mathbf{M}_a\rvert$ $for: m = 4$	$\lvert\mathbf{M}_e - \mathbf{M}_a\rvert$ $for: m = 2$
2008/10/31	1.95	9.6	9.2	8.2	5.2
2008/11/10	1.18	9.5	8.6	7.5	4.8
2008/11/14	1.64	7.5	7.0	6.2	3.9

Таблица 2.

Заключение. В обычных условиях стохастическое уравнение (2.1) хорошо описывает поведение цены на нефть. В условиях финансового кризиса цена на нефть не подчиняется стохастическому уравнению (2.1).

Откуда можно сделать важный практический вывод: Ситуация "большой скачок $J(t)$ в сочетании с малой разностью $|L_e(t,K) - L_a(t,K)|$" является предвестником острого финансового кризиса.

Abstract. The paper considers some functions depending on the realizations of a random process with log-normal distribution and two types of expectations. The interpretations of these functions and expectations are given in terms of actuarial mathematics. The comparison of the behavior of these two types of expectations is given using the Black-Scholes formulas. Criteria for a random process to obey a stochastic equation of diffusion are elaborated. The obtained criteria are verified on a numerical example on the change in the price of oil, and can be used to predict financial crises.

Список литературы

[1] J. C. Hull, Options, Futures and Other Derivatives, Prentice Hall, London (2008).

[2] F. Black, M. Scholes, "The pricing of options and corporative Liabilities", Journal of Political Economy, **4**, 637 – 659 (1973).

[3] M. E. Alaei, "Black-Scholes Formula for Asian Option with Several Futures", Armen. J. Math., **9** (2), 84 – 92 (2017).

[4] M. E. Alaei, "On numerical comparison between European and Asian options", Caspian Journal of Computational & Mathematical Engineering, **1**, 44 – 57 (2017).

[5] К. Р. Енокян, М. Е. Алаеи, Г. С. Сукиасян, "Об автоматическом построении кусочно-линейной аппроксимации с нерегулярной решеткой", Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН, **70** (4), 255 – 262 (2017).

Поступила 15 февраля 2019

После доработки 25 июня 2019

Принята к публикации 21 августа 2019