Известия НАН Армении, Математика, том 54, н. 5, 2019, стр. 11 – 26

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВИНЕРА-ХОПФА С НЕСИММЕТРИЧЕСКИМ ЯДРОМ В ЗАКРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Л. Г. АРАБАДЖЯН

Институт математики НАН РА
Армянский Государственный Педагогический Университет им. Х. Абовяна
E-mail: *arabajyan@mail.ru*

Аннотация. Работа посвящена вопросам разрешимости интегрального уравнения Винера-Хопфа в случае, когда ядро K удовлетворяет условиям $0 \leq K \in L_1(\mathbb{R})$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t)dt > 1$, $K(\pm x) \in C^{(3)}(\mathbb{R}^+)$, $(-1)^n \cdot K(\pm x)^{(n)}(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^+$, $n = 1, 2, 3$. На основе вольтерровской факторизации оператора Винера-Хопфа и привлечения нелинейных функциональных уравнений строятся вещественные решения однородного и неоднородного уравнения, при вещественной и суммируемой функции g и вышеупомянутых условиях. Изучено также поведение этих решений в бесконечности.

MSC2010 number: 45A05; 45B05

Ключевые слова: интегральное уравнение Винера-Хопфа; несимметричное ядро, вольтерровская факторизация.

1. Введение

1.1. Теория интегральных уравнений вида

$$f(x) = g(x) + \int\limits_0^{\infty} K(x-t)f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \equiv (0, \infty), \tag{1.1}$$

где f - искомая функция, интенсивно развивалась, начиная с основополагающей работы Н. Винера и Е. Хопфа [1]. Основой для многочисленных исследований таких уравнений явилась существующая связь между уравнением (1.1) и его символом:

$$\rho(\omega) = 1 - \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t)e^{i\omega t}dt, \quad \omega \in \mathbb{R} \equiv (-\infty, \infty), \tag{1.2}$$

Наиболее глубокое исследование уравнений (1.1) и систем таких уравнений проведено в работах [2]–[4], где получено необходимое и достаточное условие нётеровости этих уравнений (и систем аналогических уравнений):

$$\rho(\omega) \neq 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

При нарушении условия (1.3) соответствующий оператор

$$(\Lambda f)(x) = f(x) - \int_0^\infty K(x-t) f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

действующий в любом из пространств $L_p(\mathbb{R}^+)$, $p \geqslant 1$, $M(\mathbb{R}^+)$ и $C(\mathbb{R}^+)$, не будет ни Φ^+, ни Φ^-- оператором (см. [5, с. 108]).

Интегральными уравнениями типа (1.1) описываются многие задачи математической физики, теоретической астрофизики, газовой динамики (см. [6]–[8]). Однако, во многих из этих уравнений условие (1.3) не выполняется. Такая ситуация имеет место, в частности, в классической проблеме Милна в теории переноса излучения (см. [6], [8]).

В настоящей работе рассматриваются уравнения вида (1.1) с вещественными ядрами K, для которых условие (1.3) не выполняется.

1.2. Одно из направлений развития теории уравнений (1.1), для которых нарушается условие (1.3), есть исследования вопросов разрешимости этих уравнений в тех или иных функциональных пространствах, в зависимости от порядка нулей символа $\rho(\omega)$ (см. [4], [5]). Иной подход для изучения уравнений вида (1.1) был развит в работах [9],[10]. Он основан на вольтерровскую факторизацию интегрального оператора, с привлечением нелинейных функциональных уравнений. Этот подход позволил в указанных работах подробно изучить вопросы разрешимости и построения решений уравнения вида (1.1) при $K \in L_1(\mathbb{R})$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |K(x)| dx \leq 1$.

Пусть в уравнении (1.1) ядро K-вещественная, неотрицательная и суммируемая на $\mathbb{R}$ функция, интеграл которого обозначим через μ:

$$0 \leq K \in L_1(\mathbb{R}), \quad \mu = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx.$$

Мы будем различать следующие классы уравнения (1.1), в зависимости от значения μ:

(α) при $\mu < 1$ – класс диссипативных уравнений;

(β) при $\mu = 1$ – класс консервативных уравнений;

(γ) при $\mu > 1$ – класс закритических уравнений.

Отметим, что в консервативном случае условие (1.3) нарушается в точке $\omega = 0$. Вопросы разрешимости уравнения (1.1) для классов (α) и (β) исследованы в [9],[10].

Ниже будет рассмотрен класс закритических уравнений (1.1), когда нарушается условие (1.3).

1.3. Пусть $E(\mathbb{R}^+)$ - одно из пространств $L_p(\mathbb{R}^+)$, $p \geq 1$, $M(\mathbb{R}^+)$ или $C(\mathbb{R}^+)$, а $\mathcal{J}$ - единичный оператор в $E(\mathbb{R}^+)$.

Представим уравнение (1.1) в операторной форме:

$$(\mathcal{J} - \mathcal{K})f = g, \tag{1.4}$$

где $\mathcal{K}$- интегральный оператор Винера-Хопфа, причем $0 \leq K \in L_1(\mathbb{R})$.

Пусть $\Omega^{\pm}$ - пространства вольтерровых операторов $\mathcal{V}_{\pm}$ вида

$$(\mathcal{V}_+ f)(x) = \int_0^x V_+(x-t)f(t)dt, \quad (\mathcal{V}_- f)(x) = \int_x^\infty V_-(t-x)f(t)dt,$$

где $x \in \mathbb{R}^+$, $V_{\pm} \in L_1(\mathbb{R}^+)$, действующие в $E(\mathbb{R}^+)$. Рассмотрим разложение

$$\mathcal{J} - \mathcal{K} = (\mathcal{J} - \mathcal{V}_-)(\mathcal{J} - \mathcal{V}_+), \quad \mathcal{V}_{\pm} \in \Omega^{\pm}. \tag{1.5}$$

Равенство (1.5) равносильно следующей нелинейной системе (уравнений Енгибаряна):

$$\begin{cases} V_+(x) = K_+(x) + \int\limits_0^\infty V_-(t)V_+(x+t)dt, \\ V_-(x) = K_-(x) + \int\limits_0^\infty V_+(t)V_-(x+t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{1.6}$$

где $K_{\pm}(x) = K(\pm x)$, $x \in \mathbb{R}^+$. Для четных функций K (симметрический случай) последняя система обращается в уравнение

$$V(x) = K(x) + \int_0^\infty V(t)V(x+t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{1.7}$$

В этом случае для решения (V_+, V_-) системы (1.6) имеем $V_{\pm} = V$.

В [9] доказана разрешимость системы (1.6), уравнения (1.7) и реализована факторизация (1.5) для классов (α) и (β) уравнения (1.1). (см. [9], §1, теорема1.2)

Ниже будет доказана возможность факторизации (1.5) для класса (γ) в случае, когда нарушается условие (1.3).

1.4. Уравнению (1.1) в случае, когда ядро K суммируемо на $\mathbb{R}$ и представлено в виде суперпозиции экспонент:

$$K_{\pm}(x)=\int\limits_a^b e^{-xp}d\sigma_{\pm}(p),\quad x\in\mathbb{R}^+,\quad [a,b)\subset[0,\infty), \tag{1.8}$$

где $\sigma_{\pm}$ – неубывающие непрерывные слева функции на $[a,b)$, удовлетворяющие условиям

$$\mu=\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(x)\,dx=\int\limits_a^b\frac{d\sigma_+(s)}{s}+\int\limits_a^b\frac{d\sigma_-(s)}{s}\le 1,$$

посвящено множество теоретических и прикладных исследований (см. [6] – [8], [10] – [12]). Такие уравнения имеют наиболее важные применения в теории переноса излучения и в кинетической теории газов (см. [5]-[7]).

Уравнению (1.1) с ядрами вида (1.8) в закритическом случае $\mu>1$ были посвящены работы [11]-[12]. В [11], используя теорию R-функций, доказана разрешимость однородного уравнения (1.1) при дополнительном условии $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|t|K(t)dt<\infty$. Задача факторизации (1.5) для интегрального оператора Винера-Хопфа при условиях $\mu>1$ и (1.8) была подробно изучена в [12]. На основе рассматриваемой факторизации в указанной работе построены вещественные решения как однородного, так и неоднородного закритического уравнения (1.1) с ядрами вида (1.8). Закритическое уравнение (1.1), когда величина μ близка к единице, рассматривалось в [13]. Отметим, что представление (1.8) эквивалентно вполне монотонности на $\mathbb{R}^+$ функций $K_{\pm}$, т.е. выполнению условий (см. [14], стр. 255.)

$$K_{\pm}\in C^{\infty}(\mathbb{R}^+)\ \text{ и }\ (-1)^nK_{\pm}^{(n)}(x)\ge 0,\quad x\in\mathbb{R}^+,\ n=1,2,3,.... \tag{1.9}$$

В работе автора [15] рассматривалась задача факторизации оператора Винера-Хопфа с симметричным ядром в закритическом случае $\mu>1$, при более общих, чем (1.9) условиях. Результаты настоящей работы обобщают и дополняют утверждения указанной работы.

1.5. Изложим некоторые факты по разрешимости системы (1.6) и по построению факторизации (1.5), полученные в [9] для класса (β). Эти факты будут использованы в настоящей работе.

Пусть $\overset{o}{K}$- есть ядро, удовлетворяющее условиям (консервативности)

$$0\le\overset{o}{K}\in L_1(\mathbb{R}),\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\overset{o}{K}(t)\,dt=1. \tag{1.10}$$

Через $(\overset{o}{V}_+, \overset{o}{V}_-)$ обозначим решение системы (1.6) при $K = \overset{o}{K}$:

$$\begin{cases} \overset{o}{V}_+ (x) = \overset{o}{K}_+ (x) + \int\limits_0^\infty \overset{o}{V}_- (t) \overset{o}{V}_+ (x+t)\, dt, \\ \overset{o}{V}_- (x) = \overset{o}{K}_- (x) + \int\limits_0^\infty \overset{o}{V}_+ (t) \overset{o}{V}_- (x+t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \end{cases} \tag{1.11}$$

(Здесь $\overset{o}{K}_\pm (x) = \overset{o}{K} (\pm x)$, $x \in \mathbb{R}^+$). Из [9] и [10] имеем

$$0 \leq \overset{o}{V}_\pm \in L_1(\mathbb{R}^+) \quad \overset{o}{\gamma}_\pm \equiv \int\limits_0^\infty \overset{o}{V}_\pm (t) dt \leq 1, \quad (1 - \overset{o}{\gamma}_-)(1 - \overset{o}{\gamma}_+) = 0, \tag{1.12}$$

причем в случае сходимости интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |t| \ \overset{o}{K} \ (t)dt$, из $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \ \overset{o}{K} \ (x)dx = 0$ следует $\overset{o}{\gamma}_\pm = 1$ (см. [10]). При дополнительном условии $\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2 \ \overset{o}{K} \ (t)dt < \infty$ имеет место $\int\limits_0^\infty t \, \overset{o}{V}_\pm (t)dt < \infty$, что равносильно суммируемости на $\mathbb{R}^+$ функций $\psi_\pm(x) = \int\limits_x^\infty \overset{o}{V}_\pm (t)dt$.

1.6. Задача факторизации (1.5) для операторов $\mathcal{K}$ с неотрицательным ядром в закритическом случае $\mu > 1$ исследована в [12],[15]. В работе [12] подробно изучена задача (1.5), когда ядро K-суммируемая на $\mathbb{R}$ вполне монотонная функция (т.е. $K_\pm(x) \equiv K(\pm x)$, $x \in \mathbb{R}^+$ представляются в виде (1.8)) при $\mu > 1$.

Как было отмечено выше в консервативном случае $\mu = 1$ условие (1.3) нарушается в точке $\omega = 0$. В [15] показана, что в закритическом случае $\mu > 1$ для любого суммируемого симметричного (четного) ядра K условие (1.3) нарушается в двух точках $\omega = \pm\omega_o$, где $\omega_o \neq 0$. Нижеприведенный пример показывает, что условие (1.3) может нарушиться и для несимметричных ядер K. Именно, задача (1.5) для таких операторов $\mathcal{K}$ будет предметом изучения настоящей работы.

Пример. Для несимметричного ядра

$$K(x) = \begin{cases} 4e^{-2x}, & \text{при} \quad x \geq 0, \\ 3e^{x}, & \text{при} \quad x < 0, \end{cases} \tag{1.13}$$

интегрального оператора Винера-Хопфа $\mathcal{K}$ имеет место

$$0 \leq K \in L_1(\mathbb{R}), \quad \mu \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 5 \quad \text{и} \quad \rho(2\sqrt{2}) = 0,$$

где $\rho(\omega)$ определяется согласно (1.2), (см. Замечание к теореме 2.1).

2. Факторизация оператора Винера-Хопфа с несимметрическим ядром в закритическом случае

Рассмотрим задачу (1.5) и соответствующую систему (1.6) для оператора с закритическим ядром K а также систему (1.11), где функция $\overset{o}{K}$ удовлетворяет условиям (1.10) и условию $\int\limits_{-\infty}^{\infty} t \overset{o}{K}(t)dt = 0$. Обобщая утверждения лемм 1 и 2 работы [15], можно аналогичными рассуждениями доказать следующие леммы.

Лемма 2.1. *Пусть функция* $\overset{o}{K}$ *удовлетворяет* (1.10), *причем* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \overset{o}{K}(x)dx < \infty$ *(тогда и* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x| \overset{o}{K}(x)dx < \infty$*) и пусть* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \overset{o}{K}(x)dx = 0$. *Тогда для любого действительного* ω *функции* $K_\pm$ *и* $V_\pm$, *определяемые на* $\mathbb{R}^+$ *равенствами*

$$K_\pm(x) = \overset{o}{K}_\pm(x) + \omega^2 \int\limits_x^\infty dt \int\limits_t^\infty \overset{o}{K}_\pm(u)du, \quad V_\pm(x) = \overset{o}{V}_\pm(x) + i\omega \int\limits_x^\infty \overset{o}{V}_\pm(t)dt, \tag{2.1}$$

$x \in \mathbb{R}^+$, *а* $(\overset{o}{V}_+, \overset{o}{V}_-)$ – *решение системы* (1.11), *будут удовлетворять системе* (1.6).

Доказательство. Из условия $\int\limits_{-\infty}^{\infty} t \overset{o}{K}(t)dt = 0$ следует $\overset{o}{\gamma}_\pm = 1$. Рассмотрим первое из уравнений системы (1.11). Интегрируя это равенство в пределах от $x \geq 0$ до ∞ и используя теорему Фубини (см. [16, с. 317]), получаем

$$\int\limits_x^\infty \overset{o}{V}_+(t)dt = \int\limits_x^\infty \overset{o}{K}_+(t)dt + \int\limits_0^\infty \overset{o}{V}_-(t)dt \int\limits_{x+t}^\infty \overset{o}{V}_+(u)du,$$

откуда с учетом $\overset{o}{\gamma}_- = 1$ следует

$$\int\limits_x^\infty \overset{o}{K}_+(t)dt = \int\limits_0^\infty \overset{o}{V}_+(x+t)dt \int\limits_t^\infty \overset{o}{V}_-(u)du.$$

Умножив полученное равенство на $i\omega$, где ω - произвольное действительное число и сложив с первым из равенств (1.11), приходим к

$$\overset{o}{V}_+(x) = (\overset{o}{K}_+(x) - i\omega \int\limits_x^\infty \overset{o}{K}_+(t)dt) + \int\limits_0^\infty V_-(t) \overset{o}{V}_+(x+t)dt, \tag{2.2}$$

где через $V_-(x)$ обозначена функция

$$V_-(x) = \overset{o}{V}_-(x) + i\omega \cdot \int\limits_x^\infty \overset{o}{V}_-(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.3}$$

Интегрирование равенства (2.2) в пределах от $x \geq 0$ до ∞ дает

$$\int_x^\infty \overset{o}{V}_+(t)dt = \left(\int_x^\infty \overset{o}{K}_+(t)dt - i\omega \cdot \int_x^\infty dt \int_t^\infty \overset{o}{K}_+(u)du\right) + \int_0^\infty V_-(t)dt \int_{x+t}^\infty \overset{o}{V}_+(u)du.$$

Умножив последнее равенство на $i\omega$ и сложив с (2.2), получаем

$$V_+(x) = K_+(x) + \int_0^\infty V_-(t)V_+(x+t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

где

$$(2.4)\quad K_+(x) = \overset{o}{K}_+(x) + \omega^2 \cdot \int_x^\infty dt \int_t^\infty \overset{o}{K}_+(u)du, \quad V_+(x) = \overset{o}{V}_+(x) + i\omega \cdot \int_x^\infty \overset{o}{V}_+(t)dt.$$

Аналогичные преобразования второго из равенств (1.11) приводят к равенству

$$V_-(x) = K_-(x) + \int_0^\infty V_+(t)V_-(x+t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

где функции $V_\pm$ определены в (2.3) и (2.4), а

$$K_-(x) = \overset{o}{K}_-(x) + \omega^2 \cdot \int_x^\infty dt \int_t^\infty \overset{o}{K}_-(u)du, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Заметим, что при условии $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \overset{o}{K}(x)dx < \infty$ имеем $\int\limits_0^\infty x \overset{o}{V}_\pm(x)dx < \infty$, (см. [10, §4, n.1]) и оба эти условия обеспечивают суммируемость $K_\pm$ и $V_\pm$ на $\mathbb{R}^+$. □

Лемма 2.2. *Пусть каждая из функций $K_\pm$ удовлетворяет условиям*

$$(2.5)\qquad 0 \leq K_\pm \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap C^{(1)}(\mathbb{R}^+), \quad K_\pm^{(1)} \leq 0 \quad \text{на} \quad \mathbb{R}^+,$$

а $\omega \in R^+$. Тогда функции $\overset{o}{K}_\pm$, определяемые равенствами

$$(2.6)\qquad \overset{o}{K}_\pm(x) = K_\pm(x) - \omega \cdot \int_0^\infty K_\pm(x+t)\sin\omega t dt, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

суммируемы на $\mathbb{R}^+$, причем $\int\limits_0^\infty t \overset{o}{K}_\pm(t)dt < \infty$ и удовлетворяют соответствующим уравнениям

$$(2.7)\qquad K_\pm(x) = \overset{o}{K}_\pm(x) + \omega^2 \cdot \int_x^\infty dt \int_t^\infty \overset{o}{K}_\pm(u)du, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 2 из [15].

Теорема 2.1. *Пусть $\mathcal{K}$-оператор Винера-Хопфа, удовлетворяющий условиям:*

(a) *для ядра K имеет место*

$$0 \leq K \in L_1(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(t)dt > 1;$$

(b) *символ $\rho(\omega)$ оператора (см.(1.2)) имеет вещественный корень: $\rho(\overset{o}{\omega}) = 0$, $\overset{o}{\omega} \in \mathbb{R}$, причем $\overset{o}{\omega} \neq 0$; (это условие выполняется в частности, если ядро K есть четная функция, удовлетворяющая условиям (a))*

(c) *для функций $K_\pm(x) = K(\pm x)$, $x \in \mathbb{R}^+$ имеют место*

$$K_\pm \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap C^{(3)}(\mathbb{R}^+), \quad (-1)^n K_\pm^{(n)} \geq 0 \quad \text{на} \quad \mathbb{R}^+, \quad n = 1, 2, 3. \tag{2.8}$$

Тогда существует факторизация (1.5), причем ядра $V_\pm$ соответствующих операторов являются суммируемыми на $\mathbb{R}^+$ комплекснозначными функциями вида

$$V_\pm(x) = \overset{o}{V}_\pm(x) + i\,\overset{o}{\omega} \cdot \int_x^{\infty} \overset{o}{V}_\pm(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.9}$$

Здесь $\overset{o}{\omega}$ - вещественный корень символа $\rho(\omega)$, а вещественные функции $\overset{o}{V}_\pm$ определяются из системы (1.11), где $\overset{o}{K}_\pm$ выражаются через данные функции $K_\pm$ посредством равенств

$$\overset{o}{K}_\pm(x) = K_\pm(x) - \overset{o}{\omega} \cdot \int_0^{\infty} K_\pm(x+t) \sin \overset{o}{\omega} t dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{2.10}$$

причем при выполнении (2.8) эти функции удовлетворяют условиям консервативности

$$0 \leq \overset{o}{K}_\pm \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad \mu = \int_0^{\infty} \overset{o}{K}_+(t)dt + \int_0^{\infty} \overset{o}{K}_-(t)dt = 1 \tag{2.11}$$

и условиям $\int_0^{\infty} x^2\, \overset{o}{K}_\pm(x)dx < \infty$.

Доказательство. Во-первых покажем, что если $\overset{o}{\omega}$ - вещественный корень символа $\rho(\omega)$, а функции $K_\pm$ удовлетворяют условиям (2.8), то определяемые из (2.10) функции $\overset{o}{K}_\pm$ будут удовлетворять условиям (2.11), причем $\int_{-\infty}^{\infty} tK(t)dt = 0$. Следовательно для решения $(\overset{o}{V}_+, \overset{o}{V}_-)$ соответствующей системы (1.11) будут выполняться равенства $\overset{o}{\gamma}_\pm = 1$, где $\overset{o}{\gamma}_\pm = \int_0^{\infty} \overset{o}{V}_\pm(t)dt$.

Если функции $K_\pm$ удовлетворяют условиям (2.8), то очевидно, что $K_\pm(\infty) = \lim_{x\to\infty} K_\pm(x) = 0$. Также легко убедиться, что $K_\pm^{(1)}(\infty) = \lim_{x\to\infty} K_\pm^{(1)}(x) = 0$, ибо функции $K_\pm^{(1)}$ монотонны на R^+ и

$$\int_\tau^\infty \left|K_\pm^{(1)}(t)\right| dt = -\int_\tau^\infty K_\pm^{(1)}(t)\, dt = K_\pm(\tau) < +\infty,$$

при $\tau > 0$. Интегрируя по частям интегралы в правой части равенства (2.10), с учетом $K_\pm(\infty) = K_\pm^{(1)}(\infty) = 0$, последовательно получаем

$$\overset{o}{K}_\pm(x) = -\int_0^\infty K_\pm^{(1)}(x+t)\cos\overset{o}{\omega}\, t dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{2.12}$$

и

$$\overset{o}{K}_\pm(x) = \frac{1}{\overset{o}{\omega}}\cdot\int_0^\infty K_\pm^{(2)}(x+t)\sin\overset{o}{\omega}\, t dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.13}$$

Поскольку $0 \le K_\pm^{(2)} \downarrow$ на R^+, то из (2.13) для любого $x \in R^+$ имеем $\overset{o}{K}_\pm(x) \ge 0$ (см. [17, с. 544]). Из (2.12) получаем

$$\int_0^\infty \overset{o}{K}_\pm(x)\, dx \le \int_0^\infty\int_0^\infty \left|K^{(1)}(x+t)\right| dx\, dt = -\int_0^\infty\int_0^\infty K^{(1)}(x+t)\, dx\, dt = \int_0^\infty K(x)\, dx < +\infty,$$

т.е. $\overset{o}{K}_\pm \in L_1(\mathbb{R}^+)$. Интегрирование равенств (2.12) в пределах от $x \ge 0$ до ∞ с использованием теоремы Фубини дает

$$\int_x^\infty \overset{o}{K}_\pm(t) dt = -\frac{1}{\overset{o}{\omega}}\cdot\int_0^\infty K^{(1)}(x+t)\sin\overset{o}{\omega}\, t dt. \tag{2.14}$$

(Существование всех интегралов в правых частях (2.12) – (2.14) обеспечивают условия (2.8)).

По условию теоремы символ (1.2) оператора имеет вещественный корень $\overset{o}{\omega} \in \mathbb{R}^+$, $\overset{o}{\omega} \neq 0$. Тогда из (1.2) имеем

$$1 - \int_{-\infty}^\infty K(t)\cos\overset{o}{\omega}\, t dt = 1 - \int_0^\infty K_+(t)\cos\overset{o}{\omega}\, t dt - \int_0^\infty K_-(t)\cos\overset{o}{\omega}\, t dt = 0 \tag{2.15}$$

и

$$\int_{-\infty}^\infty K(t)\sin\overset{o}{\omega}\, t dt = \int_0^\infty K_+(t)\sin\overset{o}{\omega}\, t dt - \int_0^\infty K_-(t)\sin\overset{o}{\omega}\, t dt = 0.$$

Учитывая соотношение (2.15), из равенств (2.12) получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overset{o}{K}(t)dt = \int_{0}^{\infty} \overset{o}{K}_{+}(t)dt + \int_{0}^{\infty} \overset{o}{K}_{-}(t)dt =$$

$$= \int_{0}^{\infty} K_{+}(t)\cos \overset{o}{\omega} t dt + \int_{0}^{\infty} K_{-}(t)\cos \overset{o}{\omega} t dt = 1.$$

Интегрирование на $\mathbb{R}^{+}$ равенств (2.14) дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} t \overset{o}{K}(t)dt = \int_{0}^{\infty} t \overset{o}{K}_{+}(t)dt - \int_{0}^{\infty} t \overset{o}{K}_{-}(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\overset{o}{\omega}} \int_{0}^{\infty} K_{+}(t)\sin \overset{o}{\omega} t dt - \frac{1}{\overset{o}{\omega}} \int_{0}^{\infty} K_{-}(t)\sin \overset{o}{\omega} t dt = \frac{1}{\overset{o}{\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} K(t)\sin \overset{o}{\omega} t dt = 0.$$

Таким образом, для функций $\overset{o}{K}$ и $\overset{o}{K}_{\pm}(x) = \overset{o}{K}(\pm x)$, $x \in \mathbb{R}^{+}$ имеем

$$0 \leq \overset{o}{K}_{\pm} \in L_1(\mathbb{R}^{+}), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \overset{o}{K}(t)dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} t \overset{o}{K}(t)dt = 0. \tag{2.16}$$

Поэтому для решения $(\overset{o}{V}_{+}, \overset{o}{V}_{-})$ системы (1.11) имеет место $\overset{o}{\gamma}_{\pm} = \int_{0}^{\infty} \overset{o}{V}_{\pm}(t)dt = 1$ (см. [10, Теорема 4.1]).

При выполнении условий (2.8) функции $\overset{o}{K}_{\pm}$ из (2.10), в силу леммы 2.2, будут удовлетворять равенствам (2.7) при $\omega = \overset{o}{\omega}$. Откуда следует

$$\int_{x}^{\infty} dt \int_{t}^{\infty} \overset{o}{K}_{\pm}(u)du \leq (\overset{o}{\omega})^{-2} \cdot K_{\pm}(x),$$

что совместно с условием $0 \leq K_{\pm} \in L_1(\mathbb{R}^{+})$ дает $\int_{0}^{\infty} x^2 \overset{o}{K}_{\pm} dx < \infty$.

Итак, при выполнении условий (a)-(c) теоремы 2.1 функции $\overset{o}{K}_{\pm}$, определяемые равенствами (2.6) удовлетворяют уравнениям (2.7). Если $(\overset{o}{V}_{+}, \overset{o}{V}_{-})$ - решение системы (1.11), соответствующий построенным функциям $\overset{o}{K}_{\pm}$, то функции $V_{\pm}$ из (2.9) в силу леммы 2.1 будут удовлетворять системе (1.6). □

Свойство 2.1. *Если оператор Винера-Хопфа удовлетворяет условиям (a)-(c) теоремы 2.1, то существует факторизация* (1.5), *где ядра операторов* $\mathcal{V}_{\pm}$ *являются комплекснозначными суммируемыми на* $\mathbb{R}^{+}$ *функциями* $V_{\pm}$.

Замечание 2.1. *Используя результат доказанной теоремы, мы можем построить ядра операторов $\nu_\pm$ факторизации* (1.5) *для оператора Винера-Хопфа с ядром* (1.13).

В указанном случае имеем $\overset{o}{\omega} = 2\sqrt{2}$. *Для функций* $\overset{o}{K}_\pm$ *из* (2.10) *получаем:* $\overset{o}{K}_+(x) = \frac{4}{3}e^{-2x}$, $\overset{o}{K}_-(x) = \frac{1}{3}e^{-x}$, $x \in R^+$. *Далее определим решение* $\left(\overset{o}{V}_+, \overset{o}{V}_-\right)$ *системы* (1.11), *имеющее вид* $\overset{o}{V}_+(x) = A \cdot e^{-2x}$, $\overset{o}{V}_-(x) = B \cdot e^{-x}$, $x \in R^+$. *Простые вычисления дают* $A = 2, B = 1$. *Итак,* $\overset{o}{V}_+(x) = 2 \cdot e^{-2x}$, $\overset{o}{V}_-(x) = e^{-x}$, $x \in R^+$. *Наконец, из равенств* (2.9) *получаем*

$$\begin{cases} V_+(x) = 2\left(1 + i\sqrt{2}\right) \cdot e^{-2x}, \\ V_-(x) = \left(1 + i \cdot 2\sqrt{2}\right) \cdot e^{-x}, \quad x \in R^+, \end{cases}$$

которые вместе дают решение системы (1.6) *в случае* (1.13).

3. Уравнение Винера-Хопфа с несимметричным ядром в закритическом случае

3.1. Однородное уравнение. Рассмотрим уравнение

$$S(x) = \int_0^\infty K(x-t)S(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.1}$$

где ядро K удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Факторизация (1.5) сводит решение этого уравнения к последовательному решению следующих двух уравнений:

$$\varphi(x) = \int_x^\infty V_-(t-x)\varphi(t)dt, \tag{3.2}$$

$$S(x) = \varphi(x) + \int_0^x V_+(x-t)S(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.3}$$

где (V_+, V_-) - решение системы (1.6) и представляется в виде (2.9) посредством решения $(\overset{o}{V}_+, \overset{o}{V}_-)$ соответствующей системы (1.11). Тогда решение уравнения (3.1) может быть определено из уравнения

$$S(x) = e^{-i\overset{o}{\omega}x} + \int_0^x V_+(x-t)S(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.4}$$

поскольку уравнение (3.2) обладает очевидным решением $\varphi(x) = e^{-i\overset{o}{\omega}x}$. Уравнению (3.4) удовлетворяет вещественное решение соответствующего консервативного уравнения

$$S(x) = \cos \overset{o}{\omega} x + \int_0^x \overset{o}{V}_+ (x-t)S(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.5}$$

Учитывая асимптотическое поведение решения S уравнения (3.5) приходим к следующей теореме (см. [15, Теорема 2]).

Теорема 3.1. *Однородное уравнение* (3.1) *в случае, когда выполняются условия (a)-(c) теоремы 2.1 обладает вещественным решением S, причем*

$$S(x) = O(x), \quad \textit{при} \;\; x \to \infty.$$

3.2. Неоднородное уравнение. Рассмотрим теперь неоднородное уравнение (1.1) в случае, когда данные функции K и g принимают действительные значения, причем $g \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $0 \le K \le\in L_1(\mathbb{R})$ и нарушается условие (1.3). Если ядро K удовлетворяет условиям теоремы 2.1, то существует факторизация (1.5), что позволяет получить решение уравнения (1.1) последовательным решением следующих двух вольтерровских уравнений:

$$\varphi(x) = g(x) + \int_x^\infty V_-(t-x)\varphi(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.6}$$

$$f(x) = \varphi(x) + \int_0^x V_+(x-t)f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.7}$$

где функции $V_\pm$ определяются посредством равенств (2.9), причем $\overset{o}{V}_\pm$ удовлетворяют условиям $\int_0^\infty \overset{o}{V}_\pm (t)dt = 1$. Поскольку в работе [15] не было рассмотрено неоднородное уравнение в закритическом случае, в этом параграфе будут рассмотрены как симметрический, так и несимметрический случаи. В симметрическом случае имеем $K_+(x) = K_-(x) = K(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, $\overset{o}{K}_+ (x) =\overset{o}{K}_- (x) =\overset{o}{K} (x)$, $x \in \mathbb{R}^+$ и $\overset{o}{V}_+ (x) =\overset{o}{V}_- (x) =\overset{o}{V} (x)$, где $\overset{o}{V}$ определяется из уравнения

$$\overset{o}{V} (x) =\overset{o}{K} (x) + \int_0^\infty \overset{o}{V} (t) \overset{o}{V} (x+t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Обсудим вопросы разрешимости уравнения (3.6). Наряду с этим уравнением рассмотрим соответствующее консервативное уравнение

$$\overset{o}{\varphi}(x) = \overset{o}{g}(x) + \int_x^\infty \overset{o}{V}_-(t-x)\overset{o}{\varphi}(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.8}$$

и выберем функцию $\overset{o}{g}$ так, чтобы его решение $\overset{o}{\varphi}$ удовлетворяло также уравнению (3.6). В [10] доказано, что если $\overset{o}{g}$ есть вещественная суммируемая на $\mathbb{R}^+$ функция, то (3.8) обладает локально-интегрируемым на $\mathbb{R}^+$ решением $\overset{o}{\varphi}$, причем $\overset{o}{\varphi} \in L_1(\mathbb{R}^+)$, если $\int_0^\infty x|\overset{o}{g}(x)|dx < \infty$. Это утверждение справедливо также для комплекснозначных функций $\overset{o}{g}$.

Пусть $\int_0^\infty x|g(x)|\,dx < +\infty$. Интегрируя равенство (3.8) в пределах от $x \geq 0$ до ∞, получаем

$$\int_x^\infty \overset{o}{\varphi}(u)du = \int_x^\infty \overset{o}{g}(u)du + \int_0^\infty \overset{o}{V}_-(t)dt \int_{x+t}^\infty \overset{o}{\varphi}(u)du,$$

откуда с учетом $\overset{o}{\gamma}_- = 1$ следует

$$\int_x^\infty \overset{o}{g}(u)du = \int_0^\infty \overset{o}{\varphi}(x+t)dt \int_t^\infty \overset{o}{V}_-(u)du.$$

Умножив последнее равенство на $i\,\overset{o}{\omega}$ и сложив с (3.8), получаем

$$\overset{o}{\varphi}(x) = (\overset{o}{g}(x) - i\,\overset{o}{\omega} \cdot \int_x^\infty \overset{o}{g}(u)du) + \int_x^\infty V_-(t-x)\overset{o}{\varphi}(t)dt, \tag{3.9}$$

где V_- определяется вторым из равенств (2.9).

Таким образом, функцию $\overset{o}{g}$ надо выбрать так, чтобы

$$\overset{o}{g}(x) - i\,\overset{o}{\omega} \cdot \int_x^\infty \overset{o}{g}(u)du = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

откуда получаем

$$\overset{o}{g}(x) = g(x) + i\,\overset{o}{\omega} \cdot \int_0^\infty g(x+t)e^{i\overset{o}{\omega}t}dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.10}$$

Пусть $\tilde{\varphi}$- решение уравнения

$$\tilde{\varphi}(x) = g(x) + \int_x^\infty \overset{o}{V}_-(t-x)\tilde{\varphi}(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.11}$$

где g есть свободный член уравнения (1.1). (Мы полагаем, что g-вещественная и суммируемая на $\mathbb{R}^+$ функция). Согласно [10], это решение представляется в виде

$$\tilde{\varphi}(x) = g(x) + \int\limits_0^\infty \Phi_-(t) g(x+t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.12}$$

где резольвентная функция Φ_- определяется из уравнения

$$\Phi_-(x) = \overset{o}{V}_-(x) + \int\limits_0^x \overset{o}{V}_-(x-t)\Phi_-(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

В работе [10] не только доказана разрешимость последнего уравнения, но и изучены асимптотические поведения функций $\tilde{\varphi}$ и Φ_- в $+\infty$. Тогда, легко убедиться, что решением уравнения (3.8) (и решением уравнения (3.6)), где $\overset{o}{g}$ имеет вид (3.10) является функция

$$\varphi(x) = \overset{o}{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(x) + i\,\overset{o}{\omega} \int\limits_0^\infty \tilde{\varphi}(x+t)e^{i\overset{o}{\omega}t}dt, \tag{3.13}$$

где $\tilde{\varphi}$ -вещественная функция, которая определяется из (3.12). Поэтому решение уравнения (1.1) можно определить из уравнения (3.7), где φ имеет вид (3.13):

$$f(x) = (\tilde{\varphi}(x) + i\,\overset{o}{\omega} \cdot \int\limits_0^\infty \tilde{\varphi}(x+t)e^{i\overset{o}{\omega}t}dt) + \int\limits_0^x V_+(x-t)f(t)dt, \tag{3.14}$$

здесь функция V_+ определяется согласно (2.9).

Наряду с (3.14) рассмотрим консервативное уравнение

$$f(x) = \varphi_*(x) + \int\limits_0^x \overset{o}{V}_+(x-t)f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{3.15}$$

и выберем функцию φ_* так, чтобы его решение удовлетворяло также (3.14). Легко показать, что для этого достаточно, чтобы

$$\varphi_*(x) - i\,\overset{o}{\omega} \cdot \int\limits_0^x \varphi_*(u)du = \tilde{\varphi}(x) + i\,\overset{o}{\omega} \cdot \int\limits_0^\infty \tilde{\varphi}(x+t)e^{i\overset{o}{\omega}t}dt \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

откуда следует

$$\varphi_*(x) = \tilde{\varphi}(x) + i\,\overset{o}{\omega} \cdot \int\limits_0^\infty \tilde{\varphi}(x+t)e^{i\overset{o}{\omega}t}dt + i\,\overset{o}{\omega}\, e^{i\overset{o}{\omega}x} \cdot \int\limits_0^x e^{-i\overset{o}{\omega}t}\tilde{\varphi}(t)\,dt +$$

$$+(\overset{o}{\omega})^2 \cdot e^{i\overset{o}{\omega}x} \cdot \int\limits_0^x e^{-i\overset{o}{\omega}t}dt \int\limits_0^\infty \tilde{\varphi}(t+u)e^{i\overset{o}{\omega}u}du. \tag{3.16}$$

Решение уравнения (3.15) представимо в виде (см. [10, §3, п.1])

$$f(x) = \varphi_*(x) + \int_0^x \Phi_+(x-t)\varphi_*(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

где Φ_+ определяется из уравнения

$$\Phi_+(x) = \overset{o}{V}_+(x) + \int_0^x \overset{o}{V}_+(x-t)\Phi_+(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Решив уравнение (3.15) при функции φ_*, которая определяется посредством (3.16), получаем комплексное решение f уравнения (1.1). Поскольку K и g - вещественные функции, а уравнение (1.1) - линейное, то действительная функция $f^*(x) = Ref(x)$ также будет удовлетворять уравнению (1.1).

Учитывая асимптотическое поведение функции Φ_+ (см. [10, §3]), получаем следующую теорему.

Теорема 3.2. *Если в неоднородном уравнении* (1.1) *ядро* K *удовлетворяет условиям (a)-(c) теоремы 2.1, а функция* g *- условиям*

$$g \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad \int_0^\infty x|g(x)|\,dx < \infty,$$

то это уравнение обладает вещественным решением f*, причем*

$$f(x) = O(x), \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Автор выражает благодарность проф. Н.Б. Енгибаряну за обсуждения результатов работы.

Abstract. The paper is devoted to the solvability questions of the following Wiener-Hopf integral equation in the case where the kernel K satisfies the conditions $0 \le K \in L_1(\mathbb{R})$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t)dt > 1$, $K_\pm \in C^{(3)}(\mathbb{R}^+)$, $(-1)^n \cdot K_\pm^{(n)}(x) \ge 0$, $x \in \mathbb{R}^+$, $n = 1, 2, 3$. Based on Volterra factorization of the Wiener-Hopf operator, and invoking the technique of nonlinear functional equations, we construct real-valued solutions both for homogeneous and non-homogeneous equations, assuming that the function g is real-valued and summable, and the corresponding conditions are satisfied. The behavior at infinity of the corresponding solutions is also studied.

Список литературы

[1] N. Wiener, E. Hopf, Über eine Klasse singular Integralgleichungen", Sitzung Preuss. Akad. Wiss, 699 – 706 (1933).

[2] М. Г. Крейн, "Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргуметов", Успехи мат. наук, **13**, no. 5, 3 – 120 (1958).

[3] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, "Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргуметов", Успехи мат. наук, **13**, no. 2, 3 – 72 (1958).

[4] Ф. Д. Гахов, Ю. Д. Черский, Уравнения Типа Свертки, Наука, Москва (1978).

[5] З. Прёсдорф, Некоторые Классы Сингулярных Уравнений, Наука (1979).

[6] В. А. Амбарцумян, Научные Труды, Ереван (1979).

[7] К. Черчиняни, Теория и Приложения Уравнения Больцмана, Мир, Москва (1978).

[8] В. В. Соболев, Курс Теоретической Астрофизики, Наука, Москва (1967).

[9] Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян, "Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения", Матем. сборник, **97** (139), no. 1(5), 35 – 58 (1975).

[10] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги науки и техники", Матем. анализ **22**, 175 – 244 (1984).

[11] М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмульян, "Уравнения Винера-Хопфа, ядра которых допускают интегральное представление через экспоненты", Изв. АН Арм ССР. Сер. математика, **17**, no. 4, 307 – 327 (1982). Изв. АН Арм ССР. Сер. математика, **17**, no. 5, 335 – 374 (1982).

[12] Н. Б. Енгибарян, Б. Н. Енгибарян, "Интегральные уравнения свертки на полупрямой со вполне монотонными ядрами", Матем. сборник, **187**, no. 10, 53 – 72 (1996).

[13] Г. А. Григорян, "Уравнения Винера-Хопфа в закритическом случае", Изв. НАН Армении. Сер. матем., **32**, no. 1, (1997).

[14] Н. И. Ахиезер, "Классическая проблема моментов", ГИФМЛ, Москва (1961).

[15] Л. Г. Арабаджян, "Об интегральном уравнении Винера-Хопфа в закритическом случае", Матем. заметки, **76**, вып. 1, 11 – 19 (2004).

[16] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы Теории Функции и Функционального Анализа, Наука, Москва (1976).

[17] Г. М. Фихтенгольц, Курс Дифференционального и Интегрального Исчисления, Наука, Москва, **3** (1973).

Поступила 25 декабря 2018

После доработки 25 февраля 2019

Принята к публикации 25 апреля 2019