Известия НАН Армении, Математика, том 54, н. 4, 2019, стр. 45 – 69

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ РЕГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Г. А. КАРАПЕТЯН, Г. А. ПЕТРОСЯН

Российско – Армянский Университет, Ереван, Армения[1]
E-mails: *garnik_karapetyan@yahoo.com*, *heghine.petrosyan@rau.am*

Аннотация. В работе изучается задача Дирихле в полупространстве для регулярных гипоэллиптических уравнений. Применяя специальное интегральное представление, строются приближенные решения для данной задачи, и тем самым доказывается корректная разрешимость.

MSC2010 number: 32Q40.

Ключевые слова: регулярное гипоэллиптическое уравнение; мультианизотропное расстояние; интегральное представление; мультианизотропное ядро; корректная разрешимость.

1. Введение

В работе рассматривается задача Дирихле в полупространстве для специальных (мультиоднородных) регулярных гипоэллиптических уравнений с нулевыми граничными условиями. Задачи такого типа появляются при изучении мультианизотропных процессов и трудность их изучения заключается в том, что соответствующий полный символ не обобщенно однородный, как для эллиптических или полуэллиптических уравнений (см. [1]-[10]), а мультиоднородный, и построение приближенного решения для таких уравнений представляет от себя трудность. Но, применяя специальное интегральное представление функций, которое охватывает все вершины вполне правильного многогранника Ньютона (см. [11]-[14]), удается построить приближенные решения через интегральные операторы. Аналогичные вопросы во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ были изучены в работе [15]. В данной работе изучается вопрос о разрешимости задачи Дирихле в соболевских пространствах $W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n_+)$ $(1 < p < \infty)$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета по науке Министерства образования и науки РА совместно с Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 18RF - 004).

Пусть $\mathbb{R}^n$ есть n-мерное евклидовое пространство, а $\mathbb{Z}_+^n$ – множество мультииндексов из $\mathbb{R}^n$. Элементы $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{Z}_+^n$ будем представлять в виде (ξ,τ), (α,α_n), где, соответственно, $\xi\in\mathbb{R}^{n-1}$, $\tau\in\mathbb{R}^1$, $\alpha\in\mathbb{Z}_+^{n-1}$, $\alpha_n\in\mathbb{Z}_+^1$.

Для мультииндекса $\alpha\in\mathbb{Z}_+^{n-1}$ обозначим $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}$, $D_k=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}$ $(k=1,\ldots,n)$. $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\ldots D_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$ есть обобщенная производная по С.Л. Соболеву порядка $|\alpha|$

Для данного набора мультииндексов из $\mathbb{Z}_+^{n-1}$ обозначим через $\mathfrak{N}$ наименьший выпуклый многогранник, содержащий все точки этого набора. Многогранник $\mathfrak{N}$ называется вполне правильным, если имеет вершину в начале координат и на всех координатных осях, а внешние нормали всех $(n-2)$-мерных некоординатных граней имеют положительные координаты. Пусть $\mathfrak{N}_i^{n-2}$ $(i=1,\ldots,I_{n-2})$ есть $(n-2)$-мерные некоординатные грани многогранника $\mathfrak{N}$, $\partial'\mathfrak{N}$ – множество всех тех мультииндексов, которые принадлежат хотя бы одной $(n-2)$-мерной некоординатной грани многогранника $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}^{(0)}=\mathfrak{N}\setminus\partial'\mathfrak{N}$, $\{\alpha^1,\alpha^2,\ldots,\alpha^M\}$ – множество всех вершин многогранника $\mathfrak{N}$ отличных от нуля. И пусть μ^i $(i=1,\ldots,I_{n-2})$ есть такая внешняя нормаль грани $\mathfrak{N}_i^{n-2}$, при которой уравнение гиперплоскости, содержащей данную грань, задается формулой $(\alpha,\mu^i)=1$. Предположим, что многогранник $\mathfrak{N}$ имеет $(n-2)$-мерные грани, содержащие точки $\{\alpha^1,\ldots,\alpha^{n-1}\}\setminus\{\alpha^i\}$ $(i=1,\ldots,n-1)$, где $\alpha^i=(0,\ldots,0,l_i,0,\ldots,0)$. Внешнюю нормаль данной грани обозначим через μ^i $(i=1,\ldots,n-1)$. Обозначим также через $\mu^0=\left(\mu_1^0,\ldots,\mu_{n-1}^0\right)=(1/l_1,\ldots,1/l_{n-1})$. Пусть $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_{n-1})$ есть точка пересечения гиперплоскостей, содержащих $(n-2)$-мерные грани с внешними нормалями $\mu^1,\ldots,\mu^{n-1}$, и для определенности предположим, что $\gamma_1<\gamma_2<\cdots<\gamma_{n-r}\le\gamma_{n-r+1}\le\cdots\le\gamma_{n-1}$, где $r=0,1,\ldots,n-2$. Предположим также, что $\max\limits_{i=1,\ldots,I_{n-2}}|\mu^i|-\min\limits_{i=1,\ldots,r+1}|\mu^i|<1$. Обозначим через $\mathfrak{M}\subset\mathbb{R}^n$ многогранник в $\mathbb{Z}_+^n$, имеющий вершины $\beta^1,\ldots,\beta^{M+1}$, где $\beta^i=(\alpha^i,0)$ $(i=1,\ldots,M)$, $\beta^{M+1}=(0,\ldots,0,2m)$ и в $\mathbb{R}_+^n$ рассмотрим дифференциальный оператор $P(D_x,D_{x_n})$ с постоянными действительными коэффициентами a_i $(i=1,\ldots,M)$

$$P(D_x,D_{x_n})=D_{x_n}^{2m}+\sum_{i=1}^{M}a_iD^{\alpha^i} \tag{1.1}$$

с полным символом $P(\xi,\xi_n)=\xi_n^{2m}+\sum\limits_{i=1}^{M}a_i\xi^{\alpha^i}$.

Предположим, что оператор (1.1) есть регулярный оператор, то есть существует постоянная $C>0$ такая, что для любого $(\xi,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$|P(\xi,\xi_n)|\geq C\left(\sum_{i=1}^{M}\left|\xi^{\alpha^i}\right|+\xi_n^{2m}\right). \tag{1.2}$$

Примерами регулярных операторов являются эллиптические, квазиэллиптические операторы, а также операторы типа $P(D)=\sum\limits_{\alpha\in\partial'\mathfrak{N}}D^{\alpha}$, где $\mathfrak{N}$ – произвольный вполне правильный многогранник с вершинами, имеющие четные координаты. Для вполне правильного многогранника $\mathfrak{M}$ обозначим через $W_p^{\mathfrak{M}}\left(\mathbb{R}_+^n\right)=\{f:$ $f\in L_p\left(\mathbb{R}_+^n\right),D^{\beta^i}f\in L_p\left(\mathbb{R}_+^n\right),i=1,\ldots,M+1\}$ и называем мультианизотропным пространством Соболева с нормой $\|f\|_{W_p^{\mathfrak{M}}(\mathbb{R}_+^n)}=\sum\limits_{i=1}^{M+1}\left\|D^{\beta^i}f\right\|_{L_p\left(\mathbb{R}_+^n\right)}+\|f\|_{L_p(\mathbb{R}_+^n)}$.

Из регулярности следует, что вершины многогранника $\mathfrak{N}$ имеют четные координаты, и при действительных коэффициентах a_i $(i=1,\ldots,M)$ многочлен $P(\xi,\tau)$ по τ имеет ровно m корней с положительными и отрицательными мнимыми частями. Для любого фиксированного ξ обозначим через $\tau_i^{\pm}(\xi)$ $(i=1,\ldots,m)$ эти корни. Обозначим также

$$M^+(\xi,\tau)=\prod_{j=1}^{m}(\tau-\tau_j^+(\xi))=\sum_{i=0}^{m}b_i(\xi)\tau^{m-i},$$

$$M_k^+(\xi,\tau)=\sum_{i=0}^{k}b_i(\xi)\tau^{m-i},\quad \chi=\left(|\mu^0|+\frac{1}{2m}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right),$$

где $p>1$ некоторое число. В $\mathbb{R}_+^n$ рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$P(D_x,D_{x_n})U = f(x,x_n),\quad x_n>0,\ x\in\mathbb{R}^{n-1}, \tag{1.3}$$

$$\left.\frac{\partial^i U}{\partial x_n^i}\right|_{x_n=0} = 0,\quad i=0,1,\ldots,m-1. \tag{1.4}$$

В настоящей работе изучается разрешимость задачи (1.3)-(1.4), а именно будут доказаны следующие теоремы, которые суть основные результаты статьи.

Теорема 1.1. *Если $f\in L_p(\mathbb{R}_+^n)$ $(1<p<\infty)$ и имеет компактный носитель, то при $\chi>1$ задача (1.3)-(1.4) имеет единственное решение U из класса $W_p^{\mathfrak{M}}(\mathbb{R}_+^n)$, и для некоторой постоянной $C>0$ (не зависящей от f) имеет место оценка*

$$\|U\|_{W_p^{\mathfrak{M}}(\mathbb{R}_+^n)}\leq C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}_+^n)}. \tag{1.5}$$

А при $\chi\leq 1$ имеет место следующая теорема.

Теорема 1.2. *Пусть* $\chi \leq 1$ *и* $f \in L_p(\mathbb{R}^n_+)$ $(1 < p < \infty)$ *с компактным носителем удовлетворяет следующим условиям ортогональности:*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} x^s f(x, x_n) dx = 0 \tag{1.6}$$

при $|s| = 0, 1, \dots, L-1$, *где* L *– натуральное число, определяемое из неравенств*

$$\chi + L\mu^0_{min} > 1 \geq \chi + (L-1)\mu^0_{min}, \tag{1.7}$$

где $\mu^0_{min} = \min\limits_{i=1,\dots,n-1} \mu^0_i$. *Тогда для любой такой функции* f *задача (1.3)-(1.4) имеет единственное решение из класса* $W^{\mathfrak{M}}_p(\mathbb{R}^n_+)$, *для которой имеет место неравенство (1.5).*

2. Построение приближенного решения задачи Дирихле в $\mathbb{R}^n_+$

Как и в работах [12]-[15], для параметра $\nu > 0$ и натурального числа k обозначим

$$\rho_{\mathfrak{N}}(\xi) = \left(\xi^{2\alpha^1} + \dots + \xi^{2\alpha^M}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad G_0(\xi, \nu) = e^{-(\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{2k}},$$
$$G_1(\xi, \nu) = (-2k)(\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{2k-1} e^{-(\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{2k}},$$
$$G_2(\xi, \nu) = (-2k)\nu^{2k-1}(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{2k} e^{-(\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{2k}},$$

а $\hat{G}_i(t, \nu)$ $(i = 0, 1, 2)$ есть преобразования Фурье для соответствующих функций.

В работах [12]-[14] изучено усреднение функции $f \in L_p(\mathbb{R}^{n-1})$ через ядро $G_0(\xi, \nu)$:

$$f_\nu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f(t)\hat{G}_0(t - x, \nu) dt$$

и почти для всех $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ получено интегральное представление

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int\limits_h^{h^{-1}} d\nu \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f(t)\hat{G}_2(t - x, \nu) dt. \tag{2.1}$$

Применяя (2.1), построим приближенное решение задачи (1.3)-(1.4).

Так как оператор $P(D_x, D_{x_n})$ регулярный (см. неравенство (1.2)), то корни многочлена $P(\xi, \tau)$ по τ имеют вид $\tau^\pm_k(\xi) = \sqrt[2m]{\sum\limits_{i=1}^M a_i \xi^{\alpha^i}} \cdot \omega^\pm_k$ $(k = 1, \dots, m)$, где $\omega^\pm_k$ $(k = 1, \dots, m)$ – корни $\sqrt[2m]{-1}$, следовательно, для некоторых положительных постоянных δ и δ_1 имеют места соотношения

$$\delta \sqrt[2m]{\rho_{\mathfrak{N}}(\xi)} \leq |Im\tau_k(\xi)| \leq \delta_1 \sqrt[2m]{\rho_{\mathfrak{N}}(\xi)} \quad (k = 1, \dots, m), \tag{2.2}$$

так как $\sum\limits_{i=1}^{M} a_i\xi^{\alpha^i}$ эквивалентно выражению $\rho_{\mathfrak{N}}(\xi)$.

Как и в работе [8], обозначим

$$G^+(\xi) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| < 2\rho_{\mathfrak{N}}^{\frac{1}{2m}}(\xi); Im(\lambda) > \delta\rho_{\mathfrak{N}}^{\frac{1}{2m}}(\xi)\},$$
$$G^-(\xi) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| < 2\rho_{\mathfrak{N}}^{\frac{1}{2m}}(\xi); Im(\lambda) < -\delta\rho_{\mathfrak{N}}^{\frac{1}{2m}}(\xi)\},$$

а $\Gamma^+(\xi)$ и $\Gamma^-(\xi)$ соответствующие границы этих областей. Рассмотрим следующие контурные интегралы:

$$J_+(\xi, x_n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^+(\xi)} \frac{e^{ix_n\lambda}}{P(\xi,\lambda)}d\lambda, \quad J_-(\xi, x_n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^-(\xi)} \frac{e^{ix_n\lambda}}{P(\xi,\lambda)}d\lambda,$$

$$J_j(\xi, x_n) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^+(\xi)} \frac{e^{ix_n\lambda}M^+_{m-j}(\xi,\lambda)}{M^+(\xi,\lambda)}d\lambda,$$

$$I_j(\xi, x_n) = \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{j-1} J_-(\xi, y_n - x_n)\Big|_{y_n=0}, \quad j = 1,\dots,m.$$

Лемма 2.1. *При $x_n > 0$ и $\xi \neq 0$ имеют место оценки*

(2.3)
$$\left|\xi^\alpha D_\xi^\alpha D_{x_n}^k J_+(\xi,x_n)\right| + \left|\xi^\alpha D_\xi^\alpha D_{x_n}^k J_-(\xi,-x_n)\right| \le C(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{1}{2m}(k+1)-1} e^{-\delta x_n(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{1}{2m}}},$$

(2.4)
$$\left|\xi^\alpha D_\xi^\alpha D_{x_n}^k J_j(\xi,x_n)\right| \le C(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{k}{2m}-\frac{j-1}{2m}} e^{-\delta x_n(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{1}{2m}}}, \ \ j = 1,\dots,m$$

с некоторыми постоянными $C > 0$ и $\delta > 0$, не зависящими от ξ и x_n.

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 2 работы [8], достаточно дифференцировать только подынтегральные выражения. При $\alpha = 0$ для $D_{x_n}^k J_+(\xi, x_n)$ имеем

$$D_{x_n}^k J_+(\xi, x_n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma^+(\xi)} \frac{\lambda^k e^{ix_n\lambda}}{P(\xi,\lambda)}d\lambda.$$

Применив свойства контурного интеграла, из неравенства (2.2) имеем, что

$$\left|D_{x_n}^k J_+(\xi,x_n)\right| \le C(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{k}{2m}-1+\frac{1}{2m}} e^{-\delta x_n(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{1}{2m}}}.$$

Пусть теперь $\alpha \neq 0$. Допустим, что $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$, $k = 0$. Тогда имеем

$$|\xi_1 D_{\xi_1} J_+(\xi, x_n)| \le C|\xi_1 D_{\xi_1}\rho_{\mathfrak{N}}(\xi)| \int\limits_{\Gamma^+(\xi)} \frac{e^{i\lambda x_n}}{\left(\lambda^{2m} + \rho_{\mathfrak{N}}(\xi)\right)^2}d\lambda \le$$
$$C\rho_{\mathfrak{N}}(\xi)(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{1}{2m}-2} e^{-\delta x_n(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{1}{2m}}},$$

так как $|\xi^\alpha D_\xi^\alpha \rho_{\mathfrak{N}}(\xi)| \le C\rho_{\mathfrak{N}}(\xi)$.

Аналогично оцениваются $\xi^\alpha D_\xi^\alpha D_{x_n}^k J_-(\xi,-x_n)$. Для оценки

$$D_{x_n}^k J_j(\xi,x_n)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^+(\xi)}\frac{\lambda^k e^{ix_n\lambda}M_{m-j}^+(\xi,\lambda)}{M^+(\xi,\lambda)}d\lambda$$

нужно учитывать (см. [7]), что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^+(\xi)}\frac{\lambda^{k-1}M_{m-j}^+(\xi,\lambda)}{M^+(\xi,\lambda)}d\lambda=\delta_j^k,\quad j,k=1,\ldots,m.$$

□

Лемма 2.2. *Имеют места следующие тождества*

$$D_{x_n}^{k-1}\left(J_+(\xi,x_n)+J_-(\xi,-x_n)\right)\Big|_{x_n=0}=\delta_{2m}^k,\quad k=1,\ldots,2m \tag{2.5}$$

$$D_{x_n}^{k-1}J_j(\xi,x_n)\Big|_{x_n=0}=\delta_j^k,\quad k,j=1,\ldots,m. \tag{2.6}$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 2.1, имеем

$$\left(D_{x_n}^{k-1}\left(J_+(\xi,x_n)+J_-(\xi,-x_n)\right)\right)\Big|_{x_n=0}=$$
$$\frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{\Gamma^+(\xi)}\lambda^{k-1}\frac{e^{ix_n\lambda}}{P(\xi,\lambda)}d\lambda+\int\limits_{\Gamma^-(\xi)}\lambda^{k-1}\frac{e^{ix_n\lambda}}{P(\xi,\lambda)}d\lambda\right)\Bigg|_{x_n=0}=$$
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma(\xi)}\lambda^{k-1}\frac{e^{ix_n\lambda}}{P(\xi,\lambda)}d\lambda\Big|_{x_n=0}=\delta_{2m}^k,\quad k=1,\ldots,2m,$$

где $\Gamma(\xi)$ – контур, охватывающий все корни $\tau_j^\pm(\xi)$, $j=1,\ldots,m$.

Для $D_{x_n}^{k-1}J_j(\xi,x_n)$ имеем

$$D_{x_n}^{k-1}J_j(\xi,x_n)\Big|_{x_n=0}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^+(\xi)}\frac{\lambda^{k-1}e^{ix_n\lambda}M_{m-j}^+(\xi,\lambda)}{M^+(\xi,\lambda)}d\lambda\Big|_{x_n=0}=\delta_j^k,$$

$k,j=1,\ldots,m$. □

Теперь переходим к построению приближенного решения задачи (1.3)-(1.4). Будем применять методы работ [8] и [12], то есть построим приближенное решение, как и в работе [8], с применением специальных ядер $G_j(\xi,\nu)$ $(j=0,1,2)$ из работы [12]. Для этого определим следующие функции:

$$U_h^+(x,x_n) =$$
$$\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int\limits_h^{h^{-1}}\int\limits_0^{x_n}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(x-y)\xi}G_2(\xi,\nu)J_+(\xi,x_n-y_n)f(y,y_n)d\xi dy dy_n d\nu,$$
$$U_h^-(x,x_n) =$$
$$-\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int\limits_h^{h^{-1}}\int\limits_{x_n}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(x-y)\xi}G_2(\xi,\nu)J_-(\xi,x_n-y_n)f(y,y_n)d\xi dy dy_n d\nu,$$
$$U_{jh}(x,x_n) =$$
$$\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int\limits_h^{h^{-1}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(x-y)\xi}G_2(\xi,\nu)J_j(\xi,x_n)\int\limits_0^{\infty}I_j(\xi,y_n)f(y,y_n)dy_n d\xi dy d\nu,$$
$$j=1,\ldots,m,$$

$$U_h(x,x_n) = U_h^+(x,x_n) + U_h^-(x,x_n) + \sum_{j=1}^{m} U_{jh}(x,x_n) \tag{2.7}$$

и докажем, что $U_h(x,x_n)$ – приближенные решения задачи (1.3)-(1.4).

3. Вспомогательные леммы

Для доказательства основных теорем нам понадобятся следующие вспомогательные леммы.

Лемма 3.1. *Если $\beta^i = (\alpha^i, 0)$ или $\beta^{M+1} = (0,\ldots,0,2m)$, где $\alpha^i \in \partial'\mathfrak{N}$ $(i = 1,\ldots,M)$, то $D^{\beta^i}U_h^{\pm} \in L_p(\mathbb{R}^n)$ $(i = 1,\ldots,M+1)$ и для некоторой положительной постоянной C (не зависящей от h) имеет место неравенство*

$$\left\|D^{\beta^i}(U_h^+ + U_h^-)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)} \le C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)}, \tag{3.1}$$

причем при $h_1, h_2 \to 0$

$$\left\|D^{\beta^i}(U_{h_1}^+ + U_{h_1}^-) - D^{\beta^i}(U_{h_2}^+ + U_{h_2}^-)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)} \to 0. \tag{3.2}$$

Доказательство. В начале рассмотрим случай $\beta^{M+1} = (0, \ldots, 0, 2m)$. Из представления $U_h^{\pm}(x, x_n)$, как и в работе [8], имеем, что

$$D_{x_n}^{2m}(U_h^+(x, x_n) + U_h^-(x, x_n)) =$$
$$\frac{1}{(2\pi)^{n-1}} D_{x_n}^{2m} \int\limits_h^{h^{-1}} \int\limits_0^{x_n} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(x-y)\xi} G_2(\xi, \nu)(J_+(\xi, x_n - y_n) +$$
$$J_-(\xi, x_n - y_n)) f(y, y_n) d\xi dy dy_n d\nu -$$
$$\frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int\limits_h^{h^{-1}} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(x-y)\xi} G_2(\xi, \nu) D_{x_n}^{2m} J_-(\xi, x_n - y_n) f(y, y_n) d\xi dy dy_n d\nu.$$

Отсюда и из тождеств (2.5) имеем

$$D_{x_n}^{2m}(U_h^+(x, x_n) + U_h^-(x, x_n)) =$$
$$\frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int\limits_h^{h^{-1}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(x-y)\xi} G_2(\xi, \nu) f(y, x_n) d\xi dy d\nu +$$
$$\frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int\limits_h^{h^{-1}} \int\limits_0^{x_n} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(x-y)\xi} G_2(\xi, \nu) D_{x_n}^{2m} J_+(\xi, x_n - y_n) f(y, y_n) d\xi dy dy_n d\nu -$$
$$\frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int\limits_h^{h^{-1}} \int\limits_{x_n}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(x-y)\xi} G_2(\xi, \nu) D_{x_n}^{2m} J_-(\xi, x_n - y_n) f(y, y_n) d\xi dy dy_n d\nu =$$
$$f_h(x, x_n) + v_h^+(x, x_n) + v_h^-(x, x_n).$$

Из интегрального представления (2.1) следует, что для некоторой постоянной $C > 0$ $\|f_h\|_{L_p(\mathbb{R}_+^n)} \le C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}_+^n)}$. Оценим $v_h^{\pm}(x, x_n)$. Так как они оцениваются аналогичным образом, то оценим $v_h^+(x, x_n)$. Как и в работе [8], представим $v_h^+(x, x_n)$ в виде

$$v_h^+(x, x_n) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi + ix_n\xi_n} \mu(\xi, \xi_n) K(\xi, h) \hat{f}_\theta(\xi, \xi_n) d\xi d\xi_n, \tag{3.3}$$

где

$$K(\xi, h) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int\limits_h^{h^{-1}} G_2(\xi, \nu) d\nu,$$
$$\hat{f}_\theta(\xi, \xi_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi y - i\xi_n y_n} \theta(y_n) f(y, y_n) dy dy_n,$$

где $\theta(y_n)$ – функция Хевисайда, а

$$\mu(\xi,\xi_n)=\sqrt{2\pi}\int\limits_0^\infty e^{-i\xi_n y_n}D_{y_n}^{2m}J_+(\xi,y_n)dy_n.$$

После представления (3.3) остается показать, что функция $\mu(\xi,\xi_n)K(\xi,h)$ удовлетворяет условиям теоремы П.И. Лизоркина о мультипликаторах [16], то есть является (L_p,L_p)-мультипликатором, который равномерно ограничен по h. Так как произведение (L_p,L_p)-мультипликаторов тоже (L_p,L_p)-мультипликатор, то достаточно доказать, что каждый из множителей μ и K является (L_p,L_p)-мультипликатором. Рассмотрим $K(\xi,h)$. Имеем

$$|K(\xi,h)|=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\left|\int\limits_h^{h^{-1}}(2k)\nu^{2k-1}(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{2k}e^{-(\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{2k}}d\nu\right|=\frac{2k\int\limits_{h\rho_{\mathfrak{N}}(\xi)}^{h^{-1}\rho_{\mathfrak{N}}(\xi)}t^{2k-1}e^{-t^{2k}}dt}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}$$

и, как показано в работе [15], $K(\xi,h)$ является мультипликатором, который равномерно ограничен по h.

Изучим $\mu(\xi,\xi_n)$, то есть докажем, что при $\xi_j\neq 0$ $(j=1,\dots,n)$ $|\xi^\beta D_\xi^\beta\mu(\xi)|\le C$, где $\beta_i=0$ или $\beta_i=1$. При $\beta_n=1$ имеем

$$\xi^\beta\xi_n D_\xi^\beta D_{\xi_n}\mu(\xi,\xi_n)=\xi^\beta D_\xi^\beta\int\limits_0^\infty y_n D_{y_n}(e^{-i\xi_n y_n})D_{y_n}^{2m}J_+(\xi,y_n)dy_n=$$

$$-\xi^\beta D_\xi^\beta\int\limits_0^\infty e^{-i\xi_n y_n}\left(D_{y_n}^{2m}J_+(\xi,y_n)+y_n D_{y_n}^{2m+1}J_+(\xi,y_n)\right)dy_n.$$

Отсюда, применяя неравенство (2.3), получаем

$$\left|\xi^\beta\xi_n D_\xi^\beta D_{\xi_n}\mu(\xi,\xi_n)\right|\le$$

$$C\int\limits_0^\infty\left((\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{1}{2m}}e^{-\delta y_n(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{1}{2m}}}+y_n(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{1}{m}}e^{-\delta y_n(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{1}{2m}}}\right)dy_n\le C=C(\delta).$$

При $\beta_n=0$, опять применяя неравенство (2.3), имеем

$$\left|\xi^\beta D_\xi^\beta\mu(\xi,\xi_n)\right|\le C\int\limits_0^\infty(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{1}{2m}}e^{-\delta y_n(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{1}{2m}}}dy_n\le C(\delta),$$

то есть $\mu(\xi,\xi_n)K(\xi,h)$ является равномерно ограниченным по h (L_p,L_p)-мультипликатором и, следовательно, для некоторой постоянной $C>0$

$$\left\|v_h^+\right\|_{L_p(\mathbb{R}_+^n)}\le C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}_+^n)}.$$

Пусть теперь $\beta = (\alpha, 0)$, где $\alpha \in \partial'\mathfrak{N}$. Аналогично, как и в предыдущем случае, достаточно оценить $D^\alpha U_h^+(x, x_n)$. Из представления $U_h^+(x, x_n)$ и из соображений предыдущего случая, имеем, что

$$D^\alpha U_h^+(x, x_n) = \int\limits_0^{x_n} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix\xi} \xi^\alpha K(\xi, h) J_+(\xi, x_n - y_n) \hat{f}_\theta(\xi, y_n) d\xi dy_n.$$

После обозначения

$$\mu(\xi, \xi_n) = \xi^\alpha \int\limits_0^\infty e^{-i\xi_n y_n} J_+(\xi, y_n) dy_n$$

получим, что

$$D^\alpha U_h^+(x, x_n) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi + ix_n\xi_n} \mu(\xi, \xi_n) K(\xi, h) \hat{f}_\theta(\xi, \xi_n) d\xi d\xi_n.$$

Как доказано выше, $K(\xi, h)$ есть равномерно ограниченный по h (L_p, L_p)-мультипликатор, следовательно, достаточно показать, что $\mu(\xi, \xi_n)$ есть (L_p, L_p)-мультипликатор. Применяя лемму 2.1, имеем, что

$$|\mu(\xi, \xi_n)| \leq \left| \frac{\xi^\alpha}{\rho_\mathfrak{N}(\xi)} \right| \int\limits_0^\infty (\rho_\mathfrak{N}(\xi))^{\frac{1}{2m}} e^{-\delta y_n (\rho_\mathfrak{N}(\xi))^{\frac{1}{2m}}} dy_n.$$

Второй множитель ограничен, а для первого множителя имеем: так как $\alpha \in \partial'\mathfrak{N}$, то, как показано в работе [17], $\xi^\alpha / \rho_\mathfrak{N}(\xi)$ является (L_p, L_p)-мультипликатором.

Докажем ограниченность $\xi^\beta D_\xi^\beta \mu(\xi, \xi_n)$, где $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ – вектор с координатами 0 или 1. Сперва оценим $\xi_k D_{\xi_k} \mu(\xi, \xi_n)$ $(k = 1, \dots, n-1)$. Имеем

$$\xi_k D_{\xi_k} \mu(\xi, \xi_n) = \alpha_k \xi^\alpha \int\limits_0^\infty e^{-i\xi_n y_n} J_+(\xi, y_n) dy_n + \xi^\alpha \int\limits_0^\infty e^{-i\xi_n y_n} \xi_k D_{\xi_k} J_+(\xi, y_n) dy_n$$

и, применяя лемму 2.1, имеем, что

$$|\xi_k D_{\xi_k} \mu(\xi, \xi_n)| \leq C \frac{\xi^\alpha}{(\rho_\mathfrak{N}(\xi))} \int\limits_0^\infty (\rho_\mathfrak{N}(\xi))^{\frac{1}{2m}} e^{-\delta y_n (\rho_\mathfrak{N}(\xi))^{\frac{1}{2m}}} dy_n \leq C.$$

Пусть $k = n$. Имеем

$$|\xi_n D_{\xi_n}\mu(\xi,\xi_n)| = \left|\xi^\alpha \int\limits_0^\infty y_n D_{y_n} e^{-i\xi_n y_n} J_+(\xi,y_n)dy_n\right| =$$

$$\left|\xi^\alpha \int\limits_0^\infty \left(e^{-i\xi_n y_n} J_+(\xi,y_n) + y_n D_{y_n} J_+(\xi,y_n)\right) dy_n\right| \le$$

$$C\frac{\xi^\alpha}{\rho_{\mathfrak{N}}(\xi)} \int\limits_0^\infty \left((\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{1}{2m}} e^{-\delta y_n(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{1}{2m}}} + y_n(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{1}{m}} e^{-\delta y_n(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{1}{2m}}}\right) dy_n \le$$

$$C = C(\delta).$$

Аналогично оцениваются $\xi^\beta D_\xi^\beta \mu(\xi,\xi_n)$, где $\beta_i = 0$ или $\beta_i = 1$ $(i = 1,\dots,n)$, и тем самым неравенство (3.1) доказано. Доказательство неравенства (3.2) проводится аналогичным образом. $\square$

Переходим к оценке членов $U_{j,h}$, $j = 1,\dots,m$.

Лемма 3.2. *Пусть* $\beta^i = (\alpha^i, 0)$, *где* $\alpha^i \in \partial'\mathfrak{N}$ $(i = 1,\dots,M)$ *или* $\beta^{M+1} = (0,\dots,0,2m)$. *Тогда для некоторой постоянной* $C > 0$ *имеет место неравенство*

$$\left\|D^{\beta^i} U_{jh}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)} \le C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)}, \quad (j = 1,\dots,m), \tag{3.4}$$

причем при $h_1, h_2 \to 0$

$$\left\|D^{\beta^i} U_{jh_1} - D^{\beta^i} U_{jh_2}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)} \to 0, \quad (i = 1,\dots,M+1). \tag{3.5}$$

Доказательство. Пусть $\beta = (\alpha, 0)$, где $\alpha \in \partial'\mathfrak{N}$. Тогда, как и при доказательстве леммы 3.1, имеем, что

$$D_x^\alpha U_{jh}(x,x_n) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix\xi}\xi^\alpha K(\xi,h) J_j(\xi,x_n) \int\limits_0^\infty I_j(\xi,y_n)\hat{f}(\xi,y_n)dy_n d\xi, \quad (j = 1,\dots,m).$$

В связи с тем, что функции $J_j(\xi,x_n)$ удовлетворяют условиям (2.4), получаем

$$J_j(\xi,x_n)\int\limits_0^\infty I_j(\xi,y_n)\hat{f}(\xi,y_n)dy_n =$$

$$-\int\limits_0^\infty D_{z_n}\left(J_j(\xi,x_n+z_n)\int\limits_0^\infty I_j(\xi,y_n+z_n)\hat{f}(\xi,y_n)dy_n\right) dz_n.$$

Применяя данное тождество, получаем

$$-D_x^\alpha U_{jh}(x,x_n)=\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{ix\xi}\theta(x_n+z_n)D_{z_n}J_j(\xi,x_n+z_n)\xi^\alpha K(\xi,h)\theta(z_n)\cdot$$

$$\left(\int\limits_0^\infty I_j(\xi,y_n+z_n)\hat{f}(\xi,y_n)dy_n\right)dz_nd\xi+$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{ix\xi}\theta(x_n+z_n)J_j(\xi,x_n+z_n)\xi^\alpha K(\xi,h)\theta(z_n)\cdot$$

$$\left(\int\limits_0^\infty D_{z_n}I_j(\xi,y_n+z_n)\hat{f}(\xi,y_n)dy_n\right)dz_nd\xi=\Phi_1(x,x_n)+\Phi_2(x,x_n).$$

Каждое из этих слагаемых оценивается аналогично. Оценим $\Phi_1(x,x_n)$. Как и в работе [8], представим $\Phi_1(x,x_n)$ в виде

$$\Phi_1(x,x_n)=-\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{ix\xi-ix_n\xi_n}\mu(\xi,\xi_n)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\xi_nt_n}\cdot$$

$$\left(\theta(t_n)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^\alpha(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{-\frac{j-1}{2m}}I_j(\xi,y_n+t_n)K(\xi,h)\theta(y_n)\hat{f}(\xi,y_n)dy_n\right)dt_nd\xi d\xi_n, \tag{3.6}$$

где

$$\mu(\xi,\xi_n)=\int\limits_0^\infty e^{i\xi_nz_n}(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{j-1}{2m}}D_{z_n}J_j(\xi,z_n)dz_n$$

и покажем, что $\mu(\xi,\xi_n)$ – (L_p,L_p)-мультипликатор. Из леммы 2.1 следует, что

$$|D_{z_n}J_j(\xi,z_n)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^+(\xi)}\frac{\lambda e^{iz_n\lambda}M^+_{m-j}(\xi,\lambda)}{M^+(\xi,\lambda)}d\lambda\right|\le C(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{1}{2m}-\frac{j-1}{2m}}e^{-\delta z_n(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{1}{2m}}},$$

следовательно, для некоторой постоянной C имеем, что $|\mu(\xi,\xi_n)|\le C$.

Оценим $\xi_nD_{\xi_n}\mu(\xi,\xi_n)$. Учитывая лемму 2.1, имеем

$$\xi_nD_{\xi_n}\mu(\xi,\xi_n)=\int\limits_0^\infty z_nD_{z_n}e^{i\xi_nz_n}(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{j-1}{2m}}D_{z_n}J_j(\xi,z_n)dz_n=$$

$$-\int\limits_0^\infty e^{i\xi_nz_n}(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{j-1}{2m}}D_{z_n}J_j(\xi,z_n)dz_n-\int\limits_0^\infty z_ne^{i\xi_nz_n}(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{j-1}{2m}}D^2_{z_nz_n}J_j(\xi,z_n)dz_n.$$

Как уже оценили выше, первое слагаемое ограничено некоторой постоянной, а второе слагаемое по лемме 2.1 оценивается выражением

$$\int_0^\infty z_n(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{j-1}{2m}}(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{-\frac{j-1}{2m}+\frac{1}{m}}e^{-\delta z_n(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{1}{2m}}}dz_n \le C(\delta).$$

Аналогично оцениваются выражения $\xi^\beta \xi_n D_\xi^\beta D_{\xi_n}\mu(\xi,\xi_n)$, где $\beta_i = 0$ или 1.

Теперь обозначим через $F(\xi, t_n)$ то выражение в формуле (3.6), которое находится в скобках и покажем, что для некоторой постоянной $C > 0$ имеет место неравенство

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{iy\xi}F(\xi,t_n)d\xi \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)}. \tag{3.7}$$

Отсюда по теореме о мультипликаторах (см. [16]) имеем, что для некоторой постоянной $C > 0$

$$\|\Phi_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)}. \tag{3.8}$$

Применяя свойства преобразования Фурье для левой части неравенства (3.7), имеем, что

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{iy\xi}F(\xi,t_n)d\xi \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le \left\| \int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\xi - it_n\xi_n}\widetilde{\mu}(\xi,\xi_n)K(\xi,h)\hat{f}_\theta(\xi,\xi_n)d\xi d\xi_n \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

где

$$\widetilde{\mu}(\xi,\xi_n) = \int_0^\infty e^{i\xi_n z_n}\xi^\alpha(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{-\frac{j-1}{2m}}I_j(\xi,z_n)dz_n.$$

Теперь нужно показать, что $\widetilde{\mu}(\xi,\xi_n)$ есть (L_p, L_p)-мультипликатор. Из определения $I_j(\xi,x_n)$ $(j = 1,\dots,m)$ и из леммы 2.1 следует, что

$$|I_j(\xi,x_n)| \le C(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{j}{2m}-1}e^{-\delta x_n(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{1}{2m}}},$$

следовательно, для $\widetilde{\mu}(\xi,\xi_n)$ имеем, что

$$|\widetilde{\mu}(\xi,\xi_n)| \le C\int_0^\infty (\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{1}{2m}}\frac{\xi^\alpha}{\rho_{\mathfrak{N}}(\xi)}e^{-\delta x_n(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{1}{2m}}}dx_n \le C = C(\delta),$$

так как $\xi^\alpha/\rho_{\mathfrak{N}}(\xi)$ при $\alpha \in \partial'\mathfrak{N}$ является (L_p, L_p)-мультипликатором. Теперь оценим $\xi_n D_{\xi_n}\widetilde{\mu}(\xi,\xi_n)$. Имеем

$$\xi_n D_{\xi_n}\widetilde{\mu}(\xi,\xi_n) = \int_0^\infty \xi_n z_n e^{i\xi_n z_n}\xi^\alpha(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{-\frac{j-1}{2m}} I_j(\xi,z_n)dz_n =$$

$$\int_0^\infty z_n D_{z_n}(e^{i\xi_n z_n})\xi^\alpha(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{-\frac{j-1}{2m}} I_j(\xi,z_n)dz_n =$$

$$-\frac{\xi^\alpha}{\rho_{\mathfrak{N}}(\xi)}(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{1-\frac{j-1}{2m}}\left(\int_0^\infty e^{i\xi_n z_n} I_j(\xi,z_n)dz_n + \int_0^\infty e^{i\xi_n z_n} z_n D_{z_n} I_j(\xi,z_n)dz_n\right).$$

Первый множитель $\xi^\alpha/\rho_{\mathfrak{N}}(\xi)$ ограничен, оценим остальные. Из леммы 2.1 получим

$$(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{1-\frac{j-1}{2m}}\left|\int_0^\infty e^{i\xi_n z_n} I_j(\xi,z_n)dz_n\right| \le$$

$$C(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{1-\frac{j-1}{2m}}\int_0^\infty (\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{1}{2m}+\frac{j-1}{2m}-1} e^{-\delta z_n(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{1}{2m}}}dz_n \le C = C(\delta).$$

Для второго слагаемого имеем

$$(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{1-\frac{j-1}{2m}}\left|\int_0^\infty e^{i\xi_n z_n} z_n D_{z_n} I_j(\xi,z_n)dz_n\right| \le$$

$$C(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{1-\frac{j-1}{2m}}\int_0^\infty (\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{1}{2m}+\frac{j}{2m}-1} z_n e^{-\delta z_n(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{1}{2m}}}dz_n \le C(\delta).$$

Если $\beta_n = 0$, то для $\xi_k D_{\xi_k}\widetilde{\mu}(\xi,\xi_n)$ $(k = 1,\dots,n-1)$ имеем

$$\xi_k D_{\xi_k}\widetilde{\mu}(\xi,\xi_n) = \xi_k\int_0^\infty e^{i\xi_n z_n} D_{\xi_k}\left(\frac{\xi^\alpha}{\rho_{\mathfrak{N}}(\xi)}(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{1-\frac{j-1}{2m}} I_j(\xi,z_n)\right)dz_n.$$

Если производная берется по $\xi^\alpha/\rho_{\mathfrak{N}}(\xi)$, то выражения $\xi_k D_k(\xi^\alpha/\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))$, $k = 1,\dots,n-1$ ограничены. Если берется по $(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{1-\frac{j-1}{2m}}$, то

$$\left|\xi_k D_k(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{1-\frac{j-1}{2m}}\right| \le \left|\xi_k(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{-\frac{j-1}{2m}}\right|\cdot|D_{\xi_k}\rho_{\mathfrak{N}}(\xi)| \le$$

$$\left|\frac{\xi_k D_{\xi_k}\rho_{\mathfrak{N}}(\xi)}{\rho_{\mathfrak{N}}(\xi)}\right|(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{1-\frac{j-1}{2m}} \le C(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{1-\frac{j-1}{2m}}.$$

Если же производная берется по $I_j(\xi, z_n)$, то из леммы 2.1 получим

$$|\xi_k D_{\xi_k} I_j(\xi, z_n)| = \left| \xi_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{\partial}{\partial y_n} \right)^{j-1} J_-(\xi, y_n - x_n) \right| \Big|_{y_n=0} \le$$

$$C(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{j-1}{2m} - 1 + \frac{1}{2m}} e^{-\delta x_n (\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{1}{2m}}}.$$

То есть из всех соображений следует, что $\widetilde{\mu}(\xi, \xi_n)$ является (L_p, L_p)-мультипликатором, следовательно, выполняется неравенство (3.8). Остальные оценки доказываются аналогичным образом. □

Наконец, переходим к оценке $U_h(x, x_n)$. Для простоты записи будем изучать тот случай, когда вполне правильный многогранник $\mathfrak{N}$ имеет одну вершину анизотропности $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$ и $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1}$. Для таких многоугольников в работе [13] (общий случай см. [14]) доказаны следующие оценки (см. леммы 1.1 и 1.5).

Лемма 3.3. *Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1}$. Тогда для любого мультииндекса $m = (m_1, \dots, m_{n-1})$ и любого четного выпрямляющего числа N существуют постоянная C_0 и набор векторов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n-2}, 0)$, $\dots$, $\sigma = (\sigma_1, 0, \dots, 0)$ таких, что для любого $\nu : 0 < \nu < 1$ имеют места неравенства*

(3.9)

$$\left| D^m \hat{G}_r(t, \nu) \right| \le C_0 \nu^{-\max\limits_{i=1,\dots,I_{n-2}} \left(|\mu^i| + (m, \mu^i)\right)} \cdot \frac{1}{1 + \nu^{-N}(t^{N\alpha} + t^{N\beta} + \dots + t_1^{N\sigma_1})},$$

где $r = 0, 1$.

Лемма 3.4. *Для любого мультииндекса m и натурального числа N существует постоянная C_0, такая, что при $\nu > 1$ имеют места неравенства*

$$\left| D^m \hat{G}_r(t, \nu) \right| \le C_0 \nu^{-\left(|\mu^0| + (m, \mu^0)\right)} \cdot \frac{1}{1 + \nu^{-N}(t_1^{Nl_1} + \dots + t_{n-1}^{Nl_{n-1}})}, \tag{3.10}$$

где $r = 0, 1$.

Замечание 3.1. *В работах [13]-[14] в соответствующих леммах участвуют также многочлены по $|\ln \nu|$, но так как эти слагаемые не влияют на сходимость интеграла по ν, то здесь и в дальнейшем, для простоты записи, мы коэффициенты логарифмического многочлена считаем нулями, кроме C_0.*

Применяя леммы 3.3 и 3.4, докажем следующее утверждение.

Лемма 3.5. *Если $f \in L_p(\mathbb{R}^n_+)$ имеет компактный носитель $K = suppf$ и при $\chi \le 1$ выполняются условия ортогональности (1.6), то существует постоянная $C = C(K) > 0$, что при любом $h > 0$ имеет место неравенство*

$$\left\|U_h^+ + U_h^-\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)} \le C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)} \tag{3.11}$$

и при $h_1, h_2 \to 0$

$$\left\|(U_{h_1}^+ + U_{h_1}^-) - (U_{h_2}^+ + U_{h_2}^-)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)} \to 0. \tag{3.12}$$

Доказательство. Пусть $\chi > 1$. Проведем оценку функции $U_h^+(x, x_n)$ ($U_h^-(x, x_n)$ оценивается аналогично). Как и в работе [8], вводя обозначения

$$K_+(\nu, x, x_n) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix\xi} G_2(\xi, \nu) J_+(\xi, x_n)\theta(x_n) d\xi$$

и, применяя неравенство Минковского, имеем

$$\left\|U_h^+\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)} \le \int\limits_1^{h^{-1}} \left\| \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_+(\nu, x - y, x_n - y_n)\theta(y_n) f(y, y_n) dy dy_n \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} d\nu +$$
$$\int\limits_h^1 \left\| \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} K_+(\nu, x - y, x_n - y_n)\theta(y_n) f(y, y_n) dy dy_n \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} d\nu = A_{1,h} + A_{2,h}.$$

Оценим каждое слагаемое по отдельности. Сперва оценим A_{2h}. Применяя неравенство Юнга, имеем

$$A_{2,h} \le \int\limits_h^1 \|K_+(\nu, x, x_n)\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} d\nu \cdot \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Представим $\|K_+(\nu, x, x_n)\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$ в виде

$$\|K_+(\nu, x, x_n)\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1 + \nu^{-N}(x^{N\alpha} + x^{N\beta} + \cdots + x_1^{N\sigma_1})} \cdot$$
$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(1 + \nu^{-N}\left(D_\xi^{N\alpha} + \cdots + D_{\xi_1}^{N\sigma_1}\right)\right) e^{ix\xi} G_2(\xi, \nu) J_+(\xi, x_n)\theta(x_n) d\xi \right| dx_n dx.$$

Далее имеем

$$A=\int\limits_{\mathbb{R}^1}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix\xi}G_2(\xi,\nu)J_+(\xi,x_n)\theta(x_n)d\xi\right|dx_n\leq$$

$$C\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\nu^{2k-1}(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{2k}e^{-(\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{2k}}\left|\int\limits_{\Gamma^+(\xi)}\frac{e^{ix_n\lambda}}{P(\lambda,\xi)}d\lambda\right|d\xi dx_n\leq$$

$$C\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_0^\infty\nu^{2k-1}(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{2k}e^{-(\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{2k}}(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{1}{2m}-1}e^{-\delta x_n(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{1}{2m}}}dx_nd\xi.$$

В последнем интеграле обозначив $t_n=x_n(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{\frac{1}{2m}}$ и применив лемму 3.3 (см. неравенство (3.9)), после преобразования $\xi=\nu^{-\mu^1}\eta$, получаем

$$A\leq C\nu^{-\max\limits_{i=1,\dots,I_{n-2}}|\mu^i|}.$$

Теперь оценим

$$B=\nu^{-N}\int\limits_{\mathbb{R}^1}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}D_\xi^{N\alpha}e^{ix\xi}G_2(\xi,\nu)J_+(\xi,x_n)\theta(x_n)d\xi\right|dx_n.$$

После интегрирования по частям имеем, что

$$B\leq C\nu^{-N}\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\sum_{\gamma+\beta=N\alpha}\left|D_\xi^\gamma(G_2(\xi,\nu))\right|\cdot\left|D_\xi^\beta\int\limits_{\Gamma^+(\xi)}\frac{e^{ix_n\lambda}}{\lambda^{2m}+\rho_{\mathfrak{N}}(\xi)}d\lambda\right|d\xi dx_n.$$

Если применить замену переменных $\xi=\nu^{-\mu^i}\eta$ (для некоторого $i=1,\dots,I_{n-2}$), то последний интеграл примет вид

$$B\leq C\nu^{-N-|\mu^i|+(N\alpha,\mu^i)}\cdot$$

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\sum_{\gamma+\beta=N\alpha}\left|\eta^{-\beta}D_\eta^\gamma\left(\left(\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\nu^{-\mu^i}\eta)\right)^{2k}e^{-\left(\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\nu^{-\mu^i}\eta)\right)^{2k}}\right)\right|\cdot$$

$$\left|\eta^\beta D_\eta^\beta\int\limits_{\Gamma^+(\eta)}\frac{e^{i\frac{x_n}{\nu^{\frac{1}{2m}}}\nu^{\frac{1}{2m}}\lambda}}{(\lambda\nu^{\frac{1}{2m}})^{2m}+\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\nu^{-\mu^i}\eta)}d\lambda\right|d\eta dx_n.$$

Наконец, если в контурном интеграле сделать замену переменных $\nu^{\frac{1}{2m}}\lambda = \tau$ и применить лемму 2.1, имеем

$$B \le C\nu^{-N-|\mu^i|-\frac{1}{2m}+(N\alpha,\mu^i)}\cdot$$

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sum_{\gamma+\beta=N\alpha} \left|\eta^{-\beta}\Big(\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\nu^{-\mu^i}\eta)\Big)^{-1} D_\eta^\gamma\left(\Big(\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\nu^{-\mu^i}\eta)\Big)^{2k} e^{-\left(\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\nu^{-\mu^i}\eta)\right)^{2k}}\right)\right|\cdot$$

$$\Big(\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\nu^{-\mu^i}\eta)\Big)^{\frac{1}{2m}} e^{-\frac{\delta x_n}{\nu^{1/(2m)}}\left(\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\nu^{-\mu^i}\eta)\right)^{\frac{1}{2m}}} d\eta dx_n \le C\nu^{-N-|\mu^i|+(N\alpha,\mu^i)}\cdot$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sum_{\gamma+\beta=N\alpha} \left|\eta^{-\beta}\Big(\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\nu^{-\mu^i}\eta)\Big)^{-1} D_\eta^\gamma\left(\Big(\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\nu^{-\mu^i}\eta)\Big)^{2k} e^{-\left(\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\nu^{-\mu^i}\eta)\right)^{2k}}\right)\right| d\eta.$$

Последнее неравенство получили после изменения места интегрирования и как выше оценки интеграла по x_n. Теперь, так как $(N\alpha,\mu^i) - N \ge 0$ $(i = 1,\dots,I_{n-2})$ и для любого $\alpha \in \partial'\mathfrak{N}$ $(\alpha,\mu^i) \le 1$, а $\nu^{1-(\alpha,\mu^i)} \le 1$, то, выбирая k настолько большим, чтобы все степени η были положительными, имеем, что

$$B \le \nu^{-\max\limits_{i=1,\dots,I_{n-2}}|\mu^i|}.$$

В итоге получим, что

$$A_{2,h} \le C\int_h^1 \nu^{-\max\limits_{i=1,\dots,I_{n-2}}|\mu^i|} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dx}{1+\nu^{-N}(x^{N\alpha}+x^{N\beta}+\dots+x^{N\sigma})} d\nu\cdot\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)}.$$

В последнем интеграле сделав замену переменных $x = \nu^{\mu^1}t$ и применив лемму 1.2 работы [13] о том, что интеграл по x сходится, имеем, что

$$A_{2,h} \le C\int_h^1 \nu^{-\max\limits_{i=1,\dots,I_{n-2}}|\mu^i|+|\mu^1|} d\nu\cdot\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)} \le C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)},$$

так как по условию на многогранник $\mathfrak{N}$ $\max\limits_{i=1,\dots,I_{n-2}}|\mu^i| - \min\limits_{i=1,\dots,r+1}|\mu^i| < 1$.

Теперь переходим к оценке $A_{1,h}$, где $\nu > 1$. Опять, применяя неравенство Юнга, получаем

$$A_{1,h} \le \int_1^{h^{-1}} \|K_+(\nu,x,x_n)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\cdot\|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Оценим первый множитель. Имеем

$$\|K_+(\nu,x,x_n)\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)} = \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{1+\nu^{-N}(x_1^{l_1}+\dots+x_{n-1}^{l_{n-1}})}\right)^p \cdot \tag{3.13}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(1+\nu^{-N}\left(D_{\xi_1}^{l_1}+\dots+D_{\xi_{n-1}}^{l_{n-1}}\right)\right)e^{ix\xi}G_2(\xi,\nu)J_+(\xi,x_n)d\xi\right|^p dx dx_n\Bigg)^{\frac{1}{p}}.$$

Достаточно оценить один из интегралов (оценка остальных слагаемых проводится аналогично).

$$I_1 = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\nu^{-N}D_{\xi_1}^{Nl_1}e^{ix\xi}G_2(\xi,\nu)J_+(\xi,x_n)d\xi\right| \le$$

$$C\nu^{-N}\sum_{\gamma+\beta=Nl_1}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\left|D_{\xi_1}^{\gamma}\left(\nu^{2k-1}(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{2k}e^{-(\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{2k}}\right)\right|\left|D_{\xi_1}^{\beta}\int\limits_{\Gamma^+(\xi)}\frac{e^{ix_n\lambda}d\lambda}{\lambda^{2m}+\rho_{\mathfrak{N}}(\xi)}\right|d\xi =$$

$$C\nu^{-N}\sum_{\gamma+\beta=Nl_1}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\left|D_{\xi_1}^{\gamma}(\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{2k}e^{-(\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{2k}}\right|\left|D_{\xi_1}^{\beta}\int\limits_{\Gamma^+(\xi)}\frac{e^{i\frac{x_n}{\nu^{\frac{1}{2m}}}\nu^{\frac{1}{2m}}\lambda}d\lambda}{(\lambda\nu^{\frac{1}{2m}})^{2m}+\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\xi)}\right|d\xi.$$

Если после обозначения в контурном интеграле $\nu^{\frac{1}{2m}}\lambda=\tau$, сделать замену переменных $\xi=\nu^{-\mu^0}\eta$ и применить формулу дифференцирования (1.8) работы [13], получим, что

$$I_1 \le C\nu^{-\left(|\mu^0|+\frac{1}{2m}\right)}.$$

$$\sum_{\gamma+\beta=Nl_1}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\eta^{-\beta}\sum_{r+\sigma=\gamma}C_{|\gamma|}^{|r|}D^r\left(\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\nu^{-\mu^0}\eta)\right)^{2k}e^{-\left(\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\nu^{-\mu^0}\eta)\right)^{2k}}. \tag{3.14}$$

$$\sum_{r^1+\dots+r^{|\sigma|}=\sigma}\prod_{j=1}^{|\sigma|}D_\eta^{r^j}\left(\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\nu^{-\mu^0}\eta)\right)^{2k}\cdot\left|\eta^\beta D_\eta^\beta\int\limits_{\Gamma^+(\eta)}\frac{e^{i\frac{x_n}{\nu^{\frac{1}{2m}}}\tau}}{\tau^{2m}+\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\nu^{-\mu^0}\eta)}d\tau\right|d\eta.$$

Последний множитель (по β) по лемме 2.1 оценивается выражением

$$C\left(\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\nu^{-\mu^0}\eta)\right)^{\frac{1}{2m}-1}e^{-\delta\frac{x_n}{\nu^{\frac{1}{2m}}}\left(\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\nu^{-\mu^0}\eta)\right)^{\frac{1}{2m}}}.$$

Учитывая, что при $\alpha^i=(0,\dots,0,l_i,0,\dots,0)$ $(\alpha^i,\mu^0)=1$ $(i=1,\dots,n)$, а для мультианизотропной вершины $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})$: $(\alpha,\mu^0)>1$, следовательно, при $\nu>1$ $\nu^{1-(\alpha,\mu^0)}<1$, то, подбирая k настолько большим, чтобы в первом множителе формулы (3.14) степени η были положительными, получим, что при некоторой постоянной $C > 0$

$$I_1 \leq C\nu^{-\left(|\mu^0|+\frac{1}{2m}\right)}.$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\nu^{-\mu^0}\eta)\right)^{\frac{1}{2m}} \eta^\rho e^{-\left(\eta_1^{l_1}+\dots+\eta_{n-1}^{l_{n-1}}\right)^{2k}} e^{-\delta\frac{x_n}{\nu^{\frac{1}{2m}}}\left(\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\nu^{-\mu^0}\eta)\right)^{\frac{1}{2m}}} d\eta_1\dots d\eta_{n-1},$$

где $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_{n-1})$ некоторый мультииндекс, который получается при группировки степеней ξ_i $(i = 1, \dots, n-1)$.

Поставляя оценки для I_k $(k = 1, \dots, n-1)$ в формуле (3.13) и применяя обобщенное неравенство Минковского, имеем, что

$$\|K_+(\nu, x, x_n)\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\nu^{-\left(|\mu^0|+\frac{1}{2m}\right)} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\frac{dx}{1+\nu^{-N}\left(x_1^{Nl_1}+\dots+\eta_{n-1}^{Nl_{n-1}}\right)}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int\limits_0^\infty \left(\left(\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\nu^{-\mu^0}\eta)\right)^{\frac{1}{2m}} \eta^\rho e^{-\left(\eta_1^{l_1}+\dots+\eta_{n-1}^{l_{n-1}}\right)^{2k}} e^{-\delta\frac{x_n}{\nu^{\frac{1}{2m}}}\left(\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\nu^{-\mu^0}\eta)\right)^{\frac{1}{2m}}}\right)^p dx_n\right)^{\frac{1}{p}} d\xi.$$

В последнем интеграле, если сделать замену переменных $x = \nu^{\mu^0}\tau$, $x_n = \nu^{\frac{1}{2m}}\tau_n$ и учитывать, что интеграл по ξ сходится, то после выбора натурального числа N таким, чтобы интеграл по x тоже был сходящимся, имеем, что

$$\|K_+(\nu, x, x_n)\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\nu^{-\left(|\mu^0|+\frac{1}{2m}\right)+\left(|\mu^0|+\frac{1}{2m}\right)\frac{1}{p}},$$

то есть

$$A_{1,h} \leq C\int\limits_1^{h^{-1}} \nu^{-\left(|\mu^0|+\frac{1}{2m}\right)+\left(|\mu^0|+\frac{1}{2m}\right)\frac{1}{p}} d\nu \cdot \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Так как по предположению $\chi = |\mu^0| + \frac{1}{2m} - \left(|\mu^0| + \frac{1}{2m}\right)\frac{1}{p} > 1$, то интеграл по ν сходится. В итоге имеем, что $A_{1,h} \leq C$.

Пусть теперь $\chi \leq 1$ и L такое число, что выполняются условия (1.7). Так как функция f удовлетворяет условиям ортогональности (1.6), то $\hat{f}(\xi, y_n)$ можно представить в виде

$$\hat{f}(\xi, y_n) =$$

$$\int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i\lambda_L\dots\lambda_1 y\xi}(-iy\xi)^L f(y, y_n)dy\right) \lambda_{n-1}\lambda_{n-2}^2\dots\lambda_1^{L-1} d\lambda_L\dots d\lambda_1.$$

Тогда, применяя неравенство Минковского для $A_{1,h}$, имеем

$$A_{1,h} \leq C \sum_{|\beta|=L} \int_1^{h^{-1}} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \Bigg\| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(x-\lambda_L \dots \lambda_1 y)\xi} G_2(\xi,\nu) y^\beta (i\xi)^\beta \theta(x_n - y_n) \cdot$$

$$\lambda_{L-1}\lambda_{L-2}^2 \dots \lambda_1^{L-1} \theta(y_n) f(y,y_n) d\xi dy dy_n \Bigg\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} d\lambda_L \dots d\lambda_1 d\nu.$$

Отсюда, применяя неравенство Юнга, получим

$$A_{1,h} \leq C \sum_{|\beta|=L} \int_1^{h^{-1}} \Bigg\| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix\xi} G_2(\xi,\nu)(i\xi)^\beta \theta(x_n) J_+(\xi,x_n) d\xi \Bigg\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} d\nu \cdot$$

$$\left\| y^\beta f(y,y_n) \right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.15}$$

Норма по $L_p(\mathbb{R}^n_+)$ в (3.15) оценивается как выражение $K_+(\nu,x,x_n)$ в лемме 3.5, откуда для данной нормы имеем оценку (при $\nu > 1$)

$$C\nu^{-\left(\left(|\mu^0|+\frac{1}{2m}\right)+(\beta,\mu^0)\right)+\left(|\mu^0|+\frac{1}{2m}\right)\frac{1}{p}}.$$

Следовательно, интеграл по ν будет сходится, если $\chi + (\beta,\mu^0) > 1$. Но так как по условию (1.7) $\chi + (\beta,\mu^0) > \chi + |\beta|\mu^0_{min} = \chi + L\mu^0_{min} > 1$, то по выбору числа L имеем, что интеграл по ν сходится, и если функция f удовлетворяет условиям ортогональности (1.6), то

$$A_{1,h} \leq C \sum_{|\beta|=L} \left\| y^\beta f(y,y_n) \right\|_{L_1(\mathbb{R}^n_+)}.$$

Доказательство неравенства (3.11) для нормы $\left\| U_h^- \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$ и неравенства (3.12) проводится аналогично. □

Наконец для оценки $U_{jh}(x,x_n)$ $(j = 1,\dots,m)$ имеем

Лемма 3.6. *Пусть выполняются условия леммы 3.3. Тогда существует постоянная $C = C(K) > 0$, что для любого $h > 0$*

$$\|U_{jh}\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)}, \quad (j = 1,\dots,m) \tag{3.16}$$

и при $h_1, h_2 \to 0$

$$\|U_{jh_1} - U_{jh_2}\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)} \to 0. \tag{3.17}$$

Доказательство не отличается от доказательств предыдущих лемм с применением леммы работы [8], поэтому ее мы опускаем.

Теперь мы готовы доказать, что функции $U_h(x,x_n)$ являются приближенными решениями нашей задачи, то есть имеет место

Лемма 3.7. *Если* $h \to 0$, *то*

$$\|P(D_x, D_{x_n})U_h - f\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)} \to 0 \tag{3.18}$$

и для любого $h > 0$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{j-1} U_h(x,x_n)\Big|_{x_n=0} = 0, \quad (j = 1, \ldots, m). \tag{3.19}$$

Доказательство. По определению функции $U_h(x,x_n)$ (см. формулу (2.7)) имеем

$$P(D_x, D_{x_n})U_h = P(D_x, D_{x_n})(U_h^+ + U_h^-) + \sum_{k=1}^{m} P(D_x, D_{x_n})U_{kh}.$$

Из определения функций $J_j(\xi,x_n)$ $(j = 1,\ldots,m)$ следует, что $P(\xi, D_{x_n})J_j(\xi,x_n) \equiv 0$ $(j = 1,\ldots,m)$. Остается оценить первое слагаемое. Применяя на функции $U_h^+ + U_h^-$ оператор $P(D_x, D_{x_n})$ и учитывая лемму 2.2 (см. формулы (2.5), (2.6)), получим, что

$$P(D_x, D_{x_n})(U_h^+ + U_h^-) = \frac{1}{2\pi^{n-1}} \int\limits_h^{h^{-1}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(x-y)\xi} G_2(\xi,\nu) f(y,x_n)\, d\xi dy d\nu. \tag{3.20}$$

По интегральному предствлению (2.1) правая часть формулы (3.20) почти всюду стремится к $f(x,x_n)$ при $h \to 0$, откуда следует соотношение (3.18). Докажем соотношение (3.19). Как это делали при доказательстве леммы 3.1, прибавляя и отнимая к $U_h(x,x_n) - y$ выражение

$$\frac{1}{2\pi^{n-1}} \int\limits_h^{h^{-1}} \int\limits_0^{x_n} e^{i(x-y)\xi} G_2(\xi,\nu) I_-(\xi, x_n - y_n) f(y,y_n)\, d\xi dy dy_n d\nu$$

и, применяя лемму 2.2 (формулу (2.5)), имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{j-1} (U_h^+ + U_h^-)\Big|_{x_n=0} =$$

$$-\frac{1}{2\pi^{n-1}} \int\limits_h^{h^{-1}} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(x-y)\xi} G_2(\xi,\nu) I_j(\xi,y_n) f(y,y_n)\, d\xi dy dy_n d\nu. \tag{3.21}$$

Теперь вычислим

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{j-1} \sum_{k=1}^{m} U_{hk}(x, x_n)\bigg|_{x_n=0}, \quad (j = 1, \ldots, m). \tag{3.22}$$

Из определения функций $U_{hk}(x, x_n)$ $(k = 1, \ldots, m)$ и из леммы 2.2 (см. формулу (2.6)) после вычисления (3.22) получим формулу (3.21), но со знаком минус. То есть действительно выполняются соотношения (3.19). □

4. Доказательства основных теорем

Доказательство теоремы 1.1. Из лемм 3.1, 3.2, 3.5 и 3.6 следует, что существует функция $U(x, x_n) \in W_p^{\mathfrak{M}}(\mathbb{R}_+^n)$ такая, что $\|U_h - U\|_{W_p^{\mathfrak{M}}(\mathbb{R}_+^n)}$ при $h \to 0$, и для некоторой постоянной $C > 0$ имеет место неравенство (1.5). В силу леммы 3.7 эта функция является решением задачи (1.3)-(1.4), приближенными решениями которого являются функции $U_h(x, x_n)$, задаваемые формулой (2.7). Докажем единственность этого решения. То есть докажем, что однородная задача (1.3)-(1.4) имеет нулевое решение. Применим методы работ [8] и [18]. Пусть сначала решение $U(x, x_n) \in W_p^{\mathfrak{M}}(\mathbb{R}_+^n)$ краевой задачи (1.3)-(1.4) имеет компактный носитель. Тогда, применяя преобразование Фурье по x, имеем, что

$$P(\xi, D_{x_n})\hat{U}(\xi, x_n) = 0, \;\; x_n > 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{j-1} \hat{U}(\xi, x_n)\bigg|_{x_n=0} = 0, \;\; (j = 1, \ldots, m)$$

и $|\hat{U}(\xi, x_n)| \to 0$ при $x_n \to +\infty$. Так как для любого $\xi \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ выполняются граничные условия, то $\hat{U}(\xi, x_n) = 0$ при $\xi \neq 0$. В силу непрерывности следует, что $U(x, x_n) \equiv 0$. То есть решение задачи (1.3)-(1.4), имеющий компактный носитель по x, единственное. По неравенству Фридрихса

$$\|U\|_{L_p(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \sum_{\alpha \in \partial' \mathfrak{N}} \|D^\alpha U\|_{L_p(\mathbb{R}_+^n)} \leq C_1 \|P(D_x, D_{x_n})U\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.1}$$

Рассмотрим общий случай. Пусть $f(x, x_n) \equiv 0$. Покажем, что для любого решения задачи (1.3)-(1.4) в любом компакте $K \subset \mathbb{R}_+^{n-1}$ $\|U\|_{L_p(\mathbb{R}_+^1 \times K)} = 0$. Так как $U \in W_p^{\mathfrak{M}}(\mathbb{R}_+^n)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $U_\varepsilon \in W_p^{\mathfrak{M}}(\mathbb{R}_+^n)$ такая, что ее носитель по x принадлежит K и $\|U - U_\varepsilon\|_{W_p^{\mathfrak{M}}(\mathbb{R}_+^1 \times K)} < \varepsilon$. Следовательно, из (4.1), учитывая, что $P(D_x, D_{x_n})U = 0$, имеем, что

$$\|U\|_{L_p(\mathbb{R}^1_+\times K)} \le \|U - U_\varepsilon\|_{L_p(\mathbb{R}^1_+\times K)} + \|U_\varepsilon\|_{L_p(\mathbb{R}^1_+\times K)} \le \varepsilon + C\|P(D_x, D_{x_n})U_\varepsilon\|_{L_p(\mathbb{R}^1_+\times K)}$$
$$= C\|P(D_x, D_{x_n})(U - U_\varepsilon)\|_{L_p(\mathbb{R}^1_+\times K)} + \varepsilon \le C\|U - U_\varepsilon\|_{W_p^{\mathfrak{M}}(\mathbb{R}^1_+\times K)} + \varepsilon \le (C+1)\varepsilon.$$

Для любого $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$, то есть $U \equiv 0$ в $\mathbb{R}^n_+$, и теорема 1.1 доказана.

Теорема 1.2 доказывается аналогичным образом.

Abstract. In this paper we study the Dirichlet problem in the half-space for regular hypoelliptic equations. Applying a special integral representation, we construct approximate solutions for this problem and thereby prove correct solvability of the problem.

Список литературы

[1] Г. Е. Шилов, Математический Анализ, Второй специальный курс, М.: Наука (1965).
[2] T. Matsuzava, "On quasi-elliptic boundary problems", Trans. Amer. Math. Soc., **133**, no. I, 241 – 265 (1968).
[3] A. Cavallucci, "Sulle proprieta differenziali delle soluzioni delle equationi quazi-ellitiche", Ann. Mat. Pura ed Appl, **67**, 143 – 168 (1969).
[4] M. Troisi, "Problemi al contorno condizioni omogenee per di equazioni quasi-ellittiche", Ann. Mat. Pura ed Appl., **45**, 1 – 70 (1971).
[5] С. В. Успенский, "Об оценках на бесконечности решений общих краевых задач для уавнений квазиэллиптического типа", Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам математической физики, Новосибирск, Наука, 196 – 201 (1973).
[6] С. В. Успенский, "О корректных задачах для одного класса частично-гипоэллиптических уравнений в полупространстве", Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, **134**, 350 – 365 (1975).
[7] Г. А. Карапетян, "Решение полуэллиптических уравнений в полупространстве", Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, **170**, 119 – 138 (1984).
[8] Г. В. Демиденко, "О корректной разрешимости краевых задач в полупространстве для квазиэллиптических уравнений", Сиб. мат. журнал, **XXIX**, no. 4 (1988).
[9] Г. В. Демиденко, "Интегральные операторы, определяемые квазиэллиптическими уранениями, I", Сиб. мат. журнал, **34**, no. 5, 52 – 67 (1993).
[10] Г. В. Демиденко, "О квазиэллиптических операторах в $\mathbb{R}^n$", Сиб. мат. журнал, **39**, no. 5, 1028 – 1037 (1998).
[11] Г. А. Карапетян, "О стабилизации в бесконечности к полиному решений одного класса регулярных уравнений", Тр. МИАН СССР, **187**, 116 – 129 (1989).
[12] G. A. Karapetyan, "Integral representation of functions and embedding theorems for multianisotropic spaces in the three-dimensional case", Eurasian Math. J., **7**, no. 2, 19 – 37 (2016).
[13] Г. А. Карапетян, "Интегральное представление и теоремы вложения для n-мерных мультианизотропных пространств с одной вершиной анизотропности", Сиб. мат. журнал, **58**, no. 3, 573 – 590 (2017).
[14] Г. А. Карапетян, М. К. Аракелян, "Теоремы вложения для общих мультианизотропных пространств", Математические заметки (в печати).
[15] Г. А. Карапетян, Г. А. Петросян, "О разрешимости регулярных гипоэллиптических уравнений в R^n", Изв. НАН Армении, **53**, no. 4, 46 – 65 (2018).
[16] П. И. Лизоркин, "(L_q, L_q) мультипликаторы интегралов Фурье", ДАН СССР, **152**, 808 – 811 (1963).

[17] Г. Г. Казарян, “Оценки дифференциальных операторов и гипоэллиптические операторы”, Тр. МИАН СССР, **140**, 130 – 161 (1976).

[18] В. А. Солонников, “О краевых задач для систем линейных параболических дифференциальных уравнений общего вида”, Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. **83**, 3 – 162 (1965).

Поступила 19 февраля 2018

После доработки 14 сентября 2018

Принята к публикации 12 декабря 2018