Известия НАН Армении, Математика, том 54, н. 3, 2019, стр. 69 – 86

О СТРУКТУРЕ ФУНКЦИЙ, УНИВЕРСАЛЬНЫХ ДЛЯ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ $L^p_\mu[0,1]$, $p>1$

А. А. САРГСЯН

Российско – Армянский Университет, Ереван, Армения
E-mail: *asargsyan@ysu.am*

Аннотация. В работе рассматриваются вопросы связанные со структурой универсальных функций для весовых пространств $L^p_\mu[0,1]$, $p>1$. Доказано существование измеримого множества $E \subset [0,1]$ со сколь угодно близкой к единице мерой и весовой функции $0<\mu(x)\le 1$, равняющейся единице на E, таких, что надлежащим продолжением любой функции $f\in L^1(E)$ на $[0,1]\setminus E$ можно получить функцию $\tilde f \in L^1[0,1]$, универсальную для каждого класса $L^p_\mu[0,1]$, $p>1$ относительно подрядов – знаков ряда Фурье – Уолша.

MSC2010 number: 42C10; 43A15.

Ключевые слова: универсальная функция; коэффициенты Фурье; система Уолша; весовые пространства.

1. Введение

Вопросам существования функций или рядов, универсальных тем или иным смыслом в различных функциональных классах посвящено много работ. В частности, Дж. Биркхоф в 1929 г. доказал существование целой функции, которая универсальна относительно сдвигов [1]. В 1952г. Дж. Маклейн доказал аналогичный результат для другого типа универсальности, а именно, он показал, что существует целая функция универсальная относительно производных [2]. Далее, в 1975г. С. Воронин доказал теорему универсальности дзета – функции Римана [3], а в 1987г. К. Гроссе – Эрдман показал существование функции с универсальным рядом Тейлора [4]: существует функция $g(x)\in C^\infty(\mathcal{R})$ с $g(0)=0$, ряд Тейлора которой в точке $x=0$ локально — равномерно универсален в $C(\mathcal{R})$, т.е. для любой функции $f(x)\in C(\mathcal{R})$ с $f(0)=0$ и числа $r>0$, существует подпоследовательность

$$S_{n_k}(g,0)=\sum_{m=1}^{n_k}\frac{g^{(m)}(0)}{m!}x^m$$

частичных сумм ряда Тейлора функции $g(x)$, которая равномерно сходится к $f(x)$ на отрезке $|x|\le r$.

Было сделано, также, огромное количество исследований, относительно существования универсальных рядов (относительно подпоследовательностей частичных сумм, перестановок, подрядов, знаков коэффициентов и т.д.) по разным классическим ортогональным системам в различных функциональных пространствах. Наиболее общие результаты были получены Д. Е. Меньшовым [5], А. А. Талаляном [6], П. Л. Ульяновым [7] и их учениками (см. [8] – [23]).

Настоящая работа представляет очередной, на наш взгляд, интересный результат из серии исследований относительно существования и структуры функций с универсальными рядами Фурье – Уолша.

Прежде чем перейти к формулировке, дадим соответствующие определения.

Пусть $\{W_k\}$ – полная ортонормированная на $[0,1]$ система Уолша, $L^p(E)$ $(p \geq 1)$ – класс всех тех измеримых на $E \subseteq [0,1]$ функций $f(x)$, для которых $\|f\|_{L^p(E)} \equiv \left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ и $L^p_\mu[0,1]$ (весовое пространство) – класс всех тех измеримых на $[0,1]$ функций $f(x)$, для которых $\|f\|_{L^p_\mu[0,1]} \equiv \left(\int_0^1 |f(x)|^p \mu(x) dx\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$, где $0 < \mu(x) \leq 1$ – весовая функция.

Определение 1.1. *Будем говорить, что функция $U \in L^1[0,1]$ универсальна для класса $L^p(E)$ относительно системы $\{W_k\}$ в смысле знаков своих коэффициентов Фурье $c_k(U) = \int_0^1 U(x) W_k(x) dx$, если для каждой функции $f \in L^p(E)$ можно найти такие числа $\delta_k = \pm 1$, что ряд $\sum_{k=0}^\infty \delta_k c_k(U) W_k(x)$ сходится к $f(x)$ в метрике $L^p(E)$, т.е.*

$$\lim_{m\to+\infty} \int_E \left| \sum_{k=0}^m \delta_k c_k(U) W_k(x) - f(x) \right|^p dx = 0.$$

Определение 1.2. *Будем говорить, что функция $U \in L^1[0,1]$ универсальна для класса $L^p(E)$ относительно системы $\{W_k\}$ в смысле подпоследовательностей знаков коэффициентов Фурье, если для каждой функции $g \in L^p(E)$ можно найти такие числа $\sigma_k = \pm 1, 0$, что ряд $\sum_{k=0}^\infty \sigma_k c_k(U) W_k(x)$ сходится к $g(x)$ в метрике $L^p(E)$.*

Таким образом, определенные здесь универсальные функции, это функции с универсальными рядами Фурье – Уолша.

Замечание 1.1. *Легко видеть, что для классов $L^p[0,1]$, $p \geq 1$ не существуют определенные нами универсальные функции (ни в смысле знаков коэффициентов Фурье – Уолша, ни в смысле подпоследовательностей знаков коэффициентов Фурье – Уолша).*

Действительно, если бы для некоторого класса $L^p[0,1]$, $p \geq 1$ существовала такая функция $U \in L^1[0,1]$, то для функции $k_0 c_{k_0}(U) W_{k_0}(x)$, где $k_0 > 1$ любое натуральное число с условием $c_{k_0}(U) \neq 0$, нашлись бы такие числа $\delta_k = \pm 1$ или $\pm 1, 0$, что

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=0}^{m} \delta_k c_k(U) W_k(x) - k_0 c_{k_0}(U) W_{k_0}(x) \right|^p dx = 0,$$

откуда сразу получаем противоречие: $\delta_{k_0} = k_0 > 1$.

Однако, полученные в работах [16] – [20] результаты показывают, что для пространств $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$; $L^p(E)$, $p \geq 1$, $E \subset [0,1]$ и $L^p_\mu[0,1]$, $p \geq 1$ (весовые пространства) картина иная.

В работе [16] доказано, что для любого числа $p \in (0,1)$ существует функция $U_p \in L^1[0,1]$ (ряд Фурье – Уолша которой имеет строго убывающие коэффициенты и сходится к ней по $L^1[0,1]$ норме), которая является универсальной для класса $L^p[0,1]$ в смысле знаков своих коэффициентов Фурье – Уолша. В [18] авторам удалось еще и описать структуру таких функций с точки зрения классических теорем Лузина – Меньшова [25], [26].

Далее, в [19] и [20] построены интегрируемые функции $g(x)$ (ряды Фурье – Уолша которых имеют строго убывающие коэффициенты и сходятся к ним по $L^1[0,1]$ норме) и весовые функции $0 < \mu(x) \leq 1$ так, чтобы, в первом случае, $g(x)$ была универсальной для весового пространства $L^1_\mu[0,1]$ в смысле знаков своих коэффициентов Фурье – Уолша, а во втором – универсальной для каждого класса $L^p_\mu[0,1]$, $p \geq 1$ в смысле подпоследовательностей знаков своих коэффициентов Фурье – Уолша. Более того, показано, что меру множества, на котором $\mu(x) = 1$, можно сделать сколь угодно близкой к единице.

Следующей теоремой описывается структура универсальных для классов $L^p(E)$, $p > 1$ функций:

Теорема 1.1. *Для любого числа $0 < \varepsilon < 1$ существует измеримое множество $E_\varepsilon \subset [0,1]$ с мерой $|E_\varepsilon| > 1 - \varepsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1[0,1]$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1[0,1]$, совпадающую с f на E_ε, которая универсальна для каждого класса $L^p(E)$, $p > 1$ в смысле подпоследовательностей знаков своего ряда Фурье – Уолша.*

Нам также удалось усилить этот результат и описать структуру универсальных функций для весовых пространств $L^p_\mu[0,1]$, $p > 1$:

Теорема 1.2. *Для любого числа $0 < \varepsilon < 1$ существует измеримое множество $E_\varepsilon \subset [0,1]$ с мерой $|E_\varepsilon| > 1 - \varepsilon$ и весовая функция $0 < \mu(x) \leq 1$, с $\mu(x) = 1$ на E_ε, такие, что для каждой функции $f \in L^1[0,1]$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1[0,1]$, совпадающую с f на E_ε, которая универсальна для каждого класса $L^p_\mu[0,1]$, $p > 1$, в смысле подпоследовательностей знаков своего ряда Фурье – Уолша.*

В связи с результатами настоящей работы возникают следующие вопросы, ответы на которые нам не известны:

Вопрос 1. Справедливы ли теоремы 1.1–1.2 для универсальности в смысле знаков коэффициентов Фурье – Уолша?

Вопрос 2. Справедливы ли теоремы 1.1–1.2 для тригонометрической системы и/или для других классических ортонормированных систем?

Интересно было бы выяснить также существует ли абсолютно интегрируемая функция с универсальным в рассматриваемых здесь пространствах рядом Фурье – Уолша относительно подпоследовательностей частияных сумм. В конце приведем еще два интересных результата, непосредственно связанных с данной тематикой:

В [21] доказано, что если последовательность $\{a_k\}$ удовлетворяет условиям

$$a_0 \geq a_1 \geq \ldots \geq a_k \geq \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} a_k = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 = \infty, \tag{1.1}$$

то для любой п. в. конечной измеримой функции f, определенной на $[0,1]$, существует последовательность чисел $\{\delta_k\}$, $\delta_k = \pm 1, 0$, такая, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k a_k W_k$ по системе Уолша сходится к f п.в. на $[0,1]$. В этой работе приведен еще и пример ряда Фурье – Уолша, коэффициенты которого удовлетворяют условиям (1.1) $(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{W_n}{\sqrt{n}})$.

В [22] показано, что если для последовательности $\{a_k\}$ выполняются условия (1.1) то для любого числа $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$ такое, что для любой функции $f \in L^1[0,1]$ существуют функция $g \in L^1[0,1]$ и числа $\delta_k = \pm 1, 0$, такие, что $g(x) = f(x)$ для $x \in E$, а ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k a_k W_k$ сходится к функции g в метрике $L^1[0,1]$.

2. Вспомогательные леммы

Функции системы Уолша $\{W_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, определяются функциями системы Радемахера

$$R_k(x) = \operatorname{sign}(\sin 2^k \pi x), \quad x \in [0,1], \quad k = 1, 2, \dots,$$

следующим образом (см. [24]): $W_0(x) \equiv 1$, а для $k \geq 1$

$$W_k(x) = \prod_{i=1}^{l} R_{n_i+1}(x),$$

где $k = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_l}$ $(n_1 > n_2 > \cdots > n_l)$.

Пусть $|E|$ – мера Лебега измеримого множества $E \subseteq [0,1]$, а $\chi_E(x)$ – ее характеристическая функция. Для системы Уолша при любом натуральном числе m верна (см. [24])

$$\sum_{k=0}^{2^m-1} W_k(x) = \begin{cases} 2^m, & \text{когда} \quad x \in [0, 2^{-m}), \\ 0, & \text{когда} \quad x \in (2^{-m}, 1], \end{cases} \tag{2.1}$$

откуда для любого числа $p > 0$ имеем

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} W_k(x) \right|^p dx = 2^{m(p-1)}. \tag{2.2}$$

Очевидно, что для любого натурального числа $M \in [2^m, 2^{m+1})$ и чисел $\{a_k\}_{k=2^m}^{2^{m+1}-1}$ верно

$$\left|\left| \sum_{k=2^m}^{M} a_k W_k \right|\right|_{L^1[0,1]} \leq \left|\left| \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} a_k W_k \right|\right|_{L^2[0,1]}. \tag{2.3}$$

Отметим, что из базисности системы Уолша в пространствах $L^p[0,1]$, $p > 1$ следует, что для любого числа $p > 1$ существует такая постоянная $C_p > 0$, что для каждой функции $f \in L^p[0,1]$ имеет место следующее неравенство

$$||S_n(f)||_{L^p[0,1]} \leq C_p ||f||_{L^p[0,1]}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.4}$$

где $\{S_n(f)\}$ – частичные суммы ее разложения по системе Уолша [24].

Используя схемы доказательств Леммы 2 работы [19] и Леммы 2.2 работы [20], на основе соотношений (2.1) – (2.3) не трудно убедиться в справедливости следующей основной леммы:

Лемма 2.1. *Пусть $p > 1$, $n_0 \in \mathbb{N}$ и $\Delta = \left[\frac{l}{2^K}, \frac{l+1}{2^K}\right]$, $l \in [0, 2^K)$ есть двоичный интервал. Тогда для любых чисел $\varepsilon \in (0,1)$, $\gamma \neq 0$ и натурального числа q*

существуют измеримое множество $E_q \subset \Delta$ *с мерой* $|E_q| = (1 - 2^{-q})|\Delta|$ *и полиномы*

$$P_q(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_q}-1} a_k W_k(x), \quad H_q(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_q}-1} \delta_k a_k W_k(x), \quad \delta_k = \pm 1,$$

$$G_q(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_q}-1} \sigma_k a_k W_k(x), \quad \sigma_k = \pm 1, 0,$$

по системе Уолша такие, что

1) $$0 < a_{k+1} \le a_k < \varepsilon, \quad \textit{когда} \quad k \in [2^{n_0}, 2^{n_q} - 1),$$

2) $$P_q(x) \cdot \chi_{[2^{-n_0},1]}(x) = 0,$$

3) $$H_q(x) = \begin{cases} \begin{cases} \gamma, & \textit{когда } x \in E_q \\ 0, & \textit{когда } x \in [2^{-n_0}, 1] \setminus \Delta \end{cases}, & \textit{если} \quad \Delta \subset [2^{-n_0}, 1], \\ 0, \quad \textit{когда } x \in [2^{-n_0}, 1], & \textit{если} \quad \Delta \subset [0, 2^{-n_0}], \end{cases}$$

4) $$G_q(x) = \begin{cases} \gamma, & \textit{когда } x \in E_q, \\ 0, & \textit{когда } x \in [0,1] \setminus \Delta, \end{cases}$$

5) $$\max_{2^{n_0} \le M < 2^{n_q}} \left\| \sum_{k=2^{n_0}}^{M} \delta_k a_k W_k \right\|_{L^1[0,1]} < 3|\gamma||\Delta| + \varepsilon,$$

6) $$\max_{2^{n_0} \le M < 2^{n_q}} \left\| \sum_{k=2^{n_0}}^{M} \sigma_k a_k W_k \right\|_{L^p[0,1]} < 2^q C |\gamma| |\Delta|^{1/p},$$

где C *есть постоянная определяемая пространством* $L^p[0,1]$,

7) $$\max_{2^{n_0} \le M < 2^{n_q}} \left\| \sum_{k=2^{n_0}}^{M} a_k W_k \right\|_{L^1[0,1]} < \varepsilon.$$

Лемма 2.1 позволяет установить вспомогательную Лемму 2.2.

Лемма 2.2. *Пусть* $p_0 > 1$, $n_0 \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0,1)$ *и* $f(x) = \sum_{m=1}^{\tilde{\nu}_0} \tilde{\gamma}_m \chi_{\widetilde{\Delta}_m}(x)$ *есть такая ступенчатая функция, что* $\tilde{\gamma}_m \ne 0$ *и* $\{\widetilde{\Delta}_m\}_{m=1}^{\tilde{\nu}_0}$ *– непересекающийся двоичные интервалы с* $\sum_{m=1}^{\tilde{\nu}_0} |\widetilde{\Delta}_m| = 1$. *Тогда можно найти измеримые множества* $E^{(1)} \subset [2^{-n_0}, 1]$, $E^{(2)} \subset [0,1]$ *и полиномы*

$$P(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n}-1} a_k W_k(x), \quad H(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n}-1} \delta_k a_k W_k(x), \quad \delta_k = \pm 1,$$

$$G(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^n-1} \sigma_k a_k W_k(x), \quad \sigma_k = \pm 1, 0,$$

по системе Уолша, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $$|E^{(1)}| > 1 - 2^{-n_0} - \varepsilon, \quad |E^{(2)}| > 1 - \varepsilon,$$

2) $$0 < a_{k+1} \le a_k < \varepsilon, \quad k \in [2^{n_0}, 2^n - 1),$$

3) $$P(x) \cdot \chi_{[2^{-n_0},1]}(x) = 0,$$

4) $$f(x) = \begin{cases} H(x), & \textit{когда } x \in E^{(1)}, \\ G(x), & \textit{когда } x \in E^{(2)}, \end{cases}$$

5) $$\max_{2^{n_0} \le M < 2^n} \left\| \sum_{k=2^{n_0}}^{M} \delta_k a_k W_k \right\|_{L^1[0,1]} < 4\|f\|_{L^1[0,1]},$$

6) $$\max_{2^{n_0} \le M < 2^n} \left\| \sum_{k=2^{n_0}}^{M} \sigma_k a_k W_k \right\|_{L^p(e)} \le \|f\|_{L^p(e)} + \varepsilon$$

для любого измеримого множества $e \subseteq E^{(2)}$ *и числа* $1 < p \le p_0$,

7) $$\max_{2^{n_0} \le M < 2^n} \left\| \sum_{k=2^{n_0}}^{M} a_k W_k \right\|_{L^1[0,1]} < \varepsilon.$$

Доказательство. Выберем натуральное число

(2.5) $$q > \log_2 \frac{1}{\varepsilon},$$

и разделим отрезок $[0,1]$ на короткие, непересекающиеся двоичные интервалы одинаковой длины $\{\Delta_j\}_{j=1}^{\nu_0}$ таким образом, что $|\Delta_j| \le \min\{|\widetilde{\Delta}_m|\}$, число 2^{-n_0} является точкой деления и выполняется неравенство

(2.6) $$\max_{j \in [1,\nu_0]} \left\{ 2^q C |\gamma_j| |\Delta_j|^{1/p_0} \right\} < \varepsilon,$$

где $\gamma_j = \tilde{\gamma}_m$, если $\Delta_j \subset \widetilde{\Delta}_m$. Представим функцию $f(x)$ в виде $f(x) = \sum_{j=1}^{\nu_0} \gamma_j \chi_{\Delta_j}(x)$. Последовательно применяя лемму 2.1 для каждого из интервалов Δ_j, $j \in [1, \nu_0]$ и учитывая (2.5) и (2.6), найдем такие множества $E_q^{(j)} \subset \Delta_j$ с мерой

(2.7) $$\left|E_q^{(j)}\right| = (1 - 2^{-q})|\Delta_j| > (1 - \varepsilon)|\Delta_j|$$

и полиномы

$$P_q^{(j)}(x) = \sum_{k=2^{n_{j-1}}}^{2^{n_j}-1} a_k^{(j)} W_k(x), \quad H_q^{(j)}(x) = \sum_{k=2^{n_{j-1}}}^{2^{n_j}-1} \delta_k^{(j)} a_k^{(j)} W_k(x), \ \delta_k^{(j)} = \pm 1,$$

$$G_q^{(j)}(x) = \sum_{k=2^{n_{j-1}}}^{2^{n_j}-1} \sigma_k^{(j)} a_k^{(j)} W_k(x), \ \sigma_k^{(j)} = \pm 1, 0,$$

по системе Уолша, что

$$\text{(2.8)} \qquad \begin{cases} 0 < a_{k+1}^{(1)} \le a_k^{(1)} < \varepsilon, & \text{для} \quad k \in [2^{n_0}, 2^{n_1} - 1), \\ 0 < a_{k+1}^{(j)} \le a_k^{(j)} < a_{2^{n_{j-1}}-1}^{(j-1)}, & \text{для} \quad k \in [2^{n_{j-1}}, 2^{n_j} - 1), \ j \in [2, \nu_0], \end{cases}$$

$$\text{(2.9)} \qquad P_q^{(j)}(x) \cdot \chi_{[2^{-n_0}, 1]}(x) = 0,$$

$$\text{(2.10)} \qquad H_q^{(j)}(x) = \begin{cases} \begin{cases} \gamma_j, & \text{когда } x \in E_q^{(j)} \\ 0, & \text{когда } x \in [2^{-n_0}, 1] \setminus \Delta_j \end{cases}, & \text{если} \quad \Delta_j \subset [2^{-n_0}, 1], \\ \\ 0, \quad \text{когда } x \in [2^{-n_0}, 1], & \text{если} \quad \Delta_j \subset [0, 2^{-n_0}], \end{cases}$$

$$\text{(2.11)} \qquad G_q^{(j)}(x) = \begin{cases} \gamma_j, & \text{когда } x \in E_q^{(j)}, \\ 0, & \text{когда } x \in [0,1] \setminus \Delta_j, \end{cases}$$

$$\text{(2.12)} \qquad \max_{2^{n_{j-1}} \le M < 2^{n_j}} \left\| \sum_{k=2^{n_{j-1}}}^{M} \delta_k^{(j)} a_k^{(j)} W_k \right\|_{L^1[0,1]} < 3|\gamma_j||\Delta_j| + 2^{-j}\|f\|_{L^1[0,1]},$$

$$\text{(2.13)} \qquad \max_{2^{n_{j-1}} \le M < 2^{n_j}} \left\| \sum_{k=2^{n_{j-1}}}^{M} \sigma_k^{(j)} a_k^{(j)} W_k \right\|_{L^{p_0}[0,1]} < 2^q C |\gamma_j| |\Delta_j|^{1/p_0} < \varepsilon,$$

и

$$\text{(2.14)} \qquad \max_{2^{n_{j-1}} \le M < 2^{n_j}} \left\| \sum_{k=2^{n_{j-1}}}^{M} a_k^{(j)} W_k \right\|_{L^1[0,1]} < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Определим множества

$$\text{(2.15)} \qquad E^{(1)} = \bigcup_{j:\ \Delta_j \subset [2^{-n_0}, 1]} E_q^{(j)}, \quad E^{(2)} = \bigcup_{j=1}^{\nu_0} E_q^{(j)}$$

и полиномы

$$P(x) = \sum_{j=1}^{\nu_0} P_q^{(j)}(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_{\nu_0}}-1} a_k W_k(x), \quad H(x) = \sum_{j=1}^{\nu_0} H_q^{(j)}(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_{\nu_0}}-1} \delta_k a_k W_k(x),$$

$$G(x) = \sum_{j=1}^{\nu_0} G_q^{(j)}(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_{\nu_0}}-1} \sigma_k a_k W_k(x),$$

где $a_k = a_k^{(j)}$, $\sigma_k = \sigma_k^{(j)}$ и $\delta_k = \delta_k^{(j)}$, когда $k \in [2^{n_{j-1}}, 2^{n_j})$.

Утверждения 1) – 4) леммы 2.2 сразу получаются из соотношений (2.7) – (2.11) и (2.15). Далее, пусть M есть натуральное число из $[2^{n_0}, 2^{n_{\nu_0}})$. Тогда $M \in [2^{n_{m-1}}, 2^{n_m})$ для некотрого $m \in [1, \nu_0]$. Используя (2.11) – (2.14) имеем

$$\left\|\sum_{k=2^{n_0}}^{M} \delta_k a_k W_k\right\|_{L^1[0,1]} \leq \sum_{j=1}^{\nu_0} \max_{2^{n_{j-1}} \leq N < 2^{n_j}} \left\|\sum_{k=2^{n_{j-1}}}^{N} \delta_k a_k^{(j)} W_k\right\|_{L^1[0,1]} <$$

$$< 3\sum_{j=1}^{\nu_0} |\gamma_j||\Delta_j| + ||f||_{L^1[0,1]} < 4||f||_{L^1[0,1]},$$

$$\left\|\sum_{k=2^{n_0}}^{M} \sigma_k a_k W_k\right\|_{L^p(e)} \leq \left\|\sum_{j=1}^{m-1} G_q^{(j)}\right\|_{L^p(e)} + \left\|\sum_{k=2^{n_{m-1}}}^{M} \sigma_k^{(m)} a_k^{(m)} W_k\right\|_{L^p(e)} \leq$$

$$\leq \left\|\sum_{j=1}^{m-1} \gamma_j \chi_{\Delta_j}\right\|_{L^p(e)} + \left\|\sum_{k=2^{n_{m-1}}}^{M} \sigma_k^{(m)} a_k^{(m)} W_k\right\|_{L^{p_0}[0,1]} < ||f||_{L^p(e)} + \varepsilon$$

для любого измеримого множества $e \subseteq E^{(2)}$ и числа $1 < p \leq p_0$ и

$$\left\|\sum_{k=2^{n_0}}^{M} a_k W_k\right\|_{L^1[0,1]} \leq \sum_{j=1}^{\nu_0} \max_{2^{n_{j-1}} \leq N < 2^{n_j}} \left\|\sum_{k=2^{n_{j-1}}}^{N} a_k^{(j)} W_k\right\|_{L^1[0,1]} < \varepsilon.$$

Лемма 2.2 доказана. □

Теперь с помощью леммы 2.2 докажем основную лемму этого параграфа.

Лемма 2.3. *Для каждого числа $\eta \in (0,1)$ существует весовая функция $0 < \mu(x) \leq 1$ с $|\{x \in [0,1] : \mu(x) = 1\}| > 1 - \eta$ такая, что для любых чисел $p_0 > 1$, $n_0 \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0,1)$ и ступенчатой функции $f(x) = \sum_{j=1}^{\nu_0} \gamma_j \chi_{\Delta_j}(x)$ с рациональными $\gamma_j \neq 0$ и условием $\sum_{j=1}^{\nu_0} |\Delta_j| = 1$, где $\{\Delta_j\}_{j=1}^{\nu_0}$ – непересекающиеся двоичные интервалы, можно найти измеримое множество $E \subset [2^{-n_0}, 1]$ и полиномы*

$$P(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^n-1} a_k W_k(x), \quad H(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^n-1} \delta_k a_k W_k(x), \quad \delta_k = \pm 1,$$

$$G(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^n-1} \sigma_k a_k W_k(x), \quad \sigma_k = \pm 1, 0,$$

по системе Уолша, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $$|E| > 1 - \varepsilon - 2^{-n_0},$$

2) $$0 < a_{k+1} \leq a_k < \varepsilon, \quad k \in [2^{n_0}, 2^n - 1),$$

3) $$P(x) \cdot \chi_{[2^{-n_0},1]}(x) = 0,$$

4) $$H(x) = f(x), \quad \textit{когда} \quad x \in E,$$

5) $$\max_{2^{n_0} \le M < 2^n} \left\| \sum_{k=2^{n_0}}^{M} \delta_k a_k W_k \right\|_{L^1[0,1]} < 5\|f\|_{L^1[0,1]},$$

6) $$\|f - G\|_{L^{p_0}_\mu[0,1]} < \varepsilon,$$

7) $$\max_{2^{n_0} \le M < 2^n} \left\| \sum_{k=2^{n_0}}^{M} \sigma_k a_k W_k \right\|_{L^p_\mu[0,1]} < 2\|f\|_{L^p_\mu[0,1]} + \varepsilon, \quad p \in (1, p_0],$$

8) $$\max_{2^{n_0} \le M < 2^n} \left\| \sum_{k=2^{n_0}}^{M} a_k W_k \right\|_{L^1[0,1]} < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $\eta \in (0,1)$, $N_0 = 1$ и $f_m(x) = \sum_{j=1}^{\nu_m} \gamma_j^{(m)} \chi_{\Delta_j^{(m)}}(x)$ есть последовательность всех ступенчатых функций с рациональными $\gamma_j^{(m)} \neq 0$ и условием $\sum_{j=1}^{\nu_m} |\Delta_j^{(m)}| = 1$, где $\{\Delta_j^{(m)}\}_{j=1}^{\nu_m}$ непересекающиеся двоичные интервалы. Последовательным применением леммы 2 можно найти множества $E_m^{(1)} \subset [2^{-N_{m-1}}, 1]$, $E_m^{(2)} \subset [0,1]$ и полиномы

(2.16) $$P_m(x) = \sum_{k=2^{N_{m-1}}}^{2^{N_m}-1} a_k^{(m)} W_k(x),$$

(2.17) $$H_m(x) = \sum_{k=2^{N_{m-1}}}^{2^{N_m}-1} \delta_k^{(m)} a_k^{(m)} W_k(x), \quad \delta_k^{(m)} = \pm 1,$$

(2.18) $$G_m(x) = \sum_{k=2^{N_{m-1}}}^{2^{N_m}-1} \sigma_k^{(m)} a_k^{(m)} W_k(x), \quad \sigma_k^{(m)} = \pm 1, 0,$$

по системе Уолша, удовлетворяющие для любого натурального числа m следующим условиям

(2.19) $$|E_m^{(1)}| > 1 - 2^{-N_{m-1}} - 2^{-m-1} \quad \text{и} \quad |E_m^{(2)}| > 1 - 2^{-m-1},$$

(2.20) $$0 < a_{k+1}^{(m)} \le a_k^{(m)} < \frac{\min\{1, \|f\|_{L^1[0,1]}\}}{4^{N_{m-1}}}, \quad k \in [2^{N_{m-1}}, 2^{N_m} - 1),$$

(2.21) $$P_m(x) = 0, \quad \text{когда} \quad x \in \left[2^{-N_{m-1}}, 1\right],$$

(2.22) $$f_m(x) = \begin{cases} H_m(x), & \text{когда } x \in E_m^{(1)}, \\ G_m(x), & \text{когда } x \in E_m^{(2)}, \end{cases}$$

(2.23) $$\max_{2^{N_{m-1}}\le M<2^{N_m}} \left\| \sum_{k=2^{N_{m-1}}}^{M} \delta_k^{(m)} a_k^{(m)} W_k \right\|_{L^1[0,1]} < 4\|f_m\|_{L^1[0,1]},$$

(2.24) $$\max_{2^{N_{m-1}}\le M<2^{N_m}} \left\| \sum_{k=2^{N_{m-1}}}^{M} \sigma_k^{(m)} a_k^{(m)} W_k \right\|_{L^p(e)} < \|f_m\|_{L^p(e)} + \frac{1}{2^{m+1}}$$

для любого измеримого подмножества $e \subseteq E_m^{(2)}$ и числа $1 < p \le m$,

(2.25) $$\max_{2^{N_{m-1}}\le M<2^{N_m}} \left\| \sum_{k=2^{N_{m-1}}}^{M} a_k^{(m)} W_k \right\|_{L^1[0,1]} < \frac{1}{2^{m+1}}.$$

Используя соотношения (2.19), (2.22), (2.24) и схему примененную в лемме 2.4 работы [20] можно построить весовую функцию $0 < \mu(x) \le 1$ с $|\{x \in [0,1] : \mu(x) = 1\}| > 1 - \eta$ такую, что для любого натурального числа

(2.26) $$m > \tilde{n} = [log_{1/2}\eta] + 1$$

имеют место

(2.27) $$\|f_m - G_m\|_{L^m_\mu[0,1]} < \frac{1}{2^{m-1}},$$

и

(2.28) $$\left\| \sum_{k=2^{N_{m-1}}}^{M} \delta_k^{(m)} a_k^{(m)} W_k \right\|_{L^p_\mu[0,1]} < 2\|f_m\|_{L^p_\mu[0,1]} + \frac{1}{2^{m-1}},$$

каковы бы не были $M \in [2^{N_{m-1}}, 2^{N_m})$ и $1 < p \le m$.

Теперь, пусть числа $n_0 \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in (0,1)$ заданы. Из последовательности $\{f_m\}$ выберем такую функцию $f_{m_0}(x) = f(x)$, что

(2.29) $$m_0 > \max\left\{\tilde{n},\ p_0,\ \log_2 \frac{8}{\varepsilon}\right\}, \quad 2^{N_{m_0-1}} > \max\{2^{n_0}, 2/\varepsilon\},$$

и для $k \in [2^{n_0}, 2^{N_{m_0}})$ положим (в соответствии с (2.16) – (2.18))

(2.30) $$a_k = \begin{cases} a^{(m_0)}_{2^{N_{m_0-1}}}, & \text{когда} \quad k \in [2^{n_0}, 2^{N_{m_0-1}}), \\ a_k^{(m_0)}, & \text{когда} \quad k \in [2^{N_{m_0-1}}, 2^{N_{m_0}}), \end{cases}$$

(2.31) $$\delta_k = \begin{cases} 1, & \text{когда} \quad k \in [2^{n_0}, 2^{N_{m_0-1}}), \\ \delta_k^{(m_0)} = \pm 1, & \text{когда} \quad k \in [2^{N_{m_0-1}}, 2^{N_{m_0}}), \end{cases}$$

$$\sigma_k = \begin{cases} 0, & \text{когда} \quad k \in [2^{n_0}, 2^{N_{m_0-1}}), \\ \sigma_k^{(m_0)} = \pm 1, 0 & \text{когда} \quad k \in [2^{N_{m_0-1}}, 2^{N_{m_0}}), \end{cases} \tag{2.32}$$

и

$$E = E_{m_0}^{(1)} \cap [2^{-n_0}, 1], \tag{2.33}$$

$$P(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{N_{m_0}}-1} a_k W_k(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{N_{m_0-1}}-1} a_k W_k(x) + P_{m_0}(x),$$

$$H(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{N_{m_0}}-1} \delta_k a_k W_k(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{N_{m_0-1}}-1} a_k W_k(x) + H_{m_0}(x),$$

$$G(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{N_{m_0}}-1} \sigma_k a_k W_k(x) = G_{m_0}(x).$$

Убедимся, что функция $\mu(x)$, множество E и полиномы $P(x)$, $H(x)$ и $G(x)$ удовлетворяют всем условиям леммы 3. Утверждения 2), 6) и 7) непосредственно следуют из (2.20), (2.27) – (2.30) и (2.32). Используя (2.1), (2.19), (2.21), (2.22), (2.29) и (2.33) находим

$$|E| > 1 - 2^{-m_0-1} - 2^{-N_{m_0-1}} - 2^{-n_0} > 1 - \varepsilon - 2^{-n_0}, \quad (\text{утв. } 1))$$

$$P(x) = P_{m_0}(x) = 0, \quad \text{когда} \quad x \in [2^{-n_0}, 1], \quad (\text{утв. } 3))$$

$$H(x) = H_{m_0}(x) = f_{m_0}(x) = f(x), \quad \text{когда} \quad x \in E, \quad (\text{утв. } 4)).$$

Далее, обозначая

$$\max_{2^{n_0} \le M < 2^{N_{m_0-1}}} \left\| \sum_{k=2^{n_0}}^{M} a_k W_k \right\|_{L^1[0,1]} \equiv J,$$

на основе (2.23), (2.25), (2.29) и (2.31) получаем

$$\max_{2^{n_0} \le M < 2^{N_{m_0}}} \left\| \sum_{k=2^{n_0}}^{M} \delta_k a_k W_k \right\|_{L^1[0,1]} \le$$

$$\le J + \max_{2^{N_{m_0-1}} \le M < 2^{N_{m_0}}} \left\| \sum_{k=2^{N_{m_0-1}}}^{M} \delta_k^{(m_0)} a_k^{(m_0)} W_k \right\|_{L^1[0,1]} < J + 4\|f\|_{L^1[0,1]},$$

и

$$\max_{2^{n_0} \le M < 2^{N_{m_0}}} \left\| \sum_{k=2^{n_0}}^{M} a_k W_k \right\|_{L^1[0,1]} \le J + \max_{2^{N_{m_0-1}} \le M < 2^{N_{m_0}}} \left\| \sum_{k=2^{N_{m_0-1}}}^{M} a_k^{(m_0)} W_k \right\|_{L^1[0,1]} < J + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть, теперь, M произвольное натуральное число из $\left[2^{n_0}, 2^{N_{m_0-1}}\right)$. Тогда $M \in [2^{n_1}, 2^{n_1+1})$ для некоторого $n_1 \in [n_0, N_{m_0-1})$ и, следовательно, с учетом (2.1), (2.20) и (2.29), приходим к следующему заключению:

$$\left\|\sum_{k=2^{n_0}}^{M} a_k W_k\right\|_{L^1[0,1]} < a^{(m_0)}_{2^{N_{m_0-1}}} \cdot \left\|\sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_1}-1} W_k\right\|_{L^1[0,1]} + a^{(m_0)}_{2^{N_{m_0-1}}} \cdot 2^{n_1} <$$

$$< \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \|f\|_{L^1[0,1]}\right\},$$

чем окончательно доказываются утверждения 5) и 8). Лемма 2.3 доказано. □

3. Доказательство теоремы 1.2

Пусть $\varepsilon \in (0,1)$, n_0 – произвольное натуральное число больше $\log_2 \frac{8}{\varepsilon}$ и $f_m(x) = \sum_{j=1}^{\nu_m} \gamma_j^{(m)} \chi_{\Delta_j^{(m)}}(x)$ есть последовательность всех ступенчатых функции с рациональными $\gamma_j^{(m)} \neq 0$ и условием $\sum_{j=1}^{\nu_m} |\Delta_j^{(m)}| = 1$, где $\{\Delta_j^{(m)}\}_{j=1}^{\nu_m}$ – непересекающийся двоичные интервалы.

Применяя лемму 2.3 можно найти весовую функцию $0 < \mu(x) \leq 1$ с условием $|E_\varepsilon^{(1)}| > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, где $E_\varepsilon^{(1)} = \{x \in [0,1];\ \mu(x) = 1\}$, множества $E_m \subset [2^{-n_{m-1}}, 1]$ и полиномы

$$P_m(x) = \sum_{k=2^{n_{m-1}}}^{2^{n_m}-1} a_k^{(m)} W_k(x), \tag{3.1}$$

$$H_m(x) = \sum_{k=2^{n_{m-1}}}^{2^{n_m}-1} \delta_k^{(m)} a_k^{(m)} W_k(x), \quad \delta_k^{(m)} = \pm 1, \tag{3.2}$$

$$G_m(x) = \sum_{k=2^{n_{m-1}}}^{2^{n_m}-1} \sigma_k^{(m)} a_k^{(m)} W_k(x), \quad \sigma_k^{(m)} = \pm 1, 0, \tag{3.3}$$

по системе Уолша, которые удовлетворяют следующим условиям для каждого натурального числа m:

$$|E_m| > 1 - \frac{\varepsilon}{2^{m+2}} - 2^{-n_{m-1}}, \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} 0 < a_{k+1}^{(1)} \leq a_k^{(1)} < 1, \quad k \in [2^{n_0}, 2^{n_1} - 1), \\ 0 < a_{k+1}^{(m)} \leq a_k^{(m)} < \min\{2^{-m}, a^{(m-1)}_{2^{n_{m-1}}-1}\}, \ k \in [2^{n_{m-1}}, 2^{n_m} - 1), \end{cases} \tag{3.5}$$

$$P_m(x) \cdot \chi_{[2^{-n_{m-1}},1]}(x) = 0, \tag{3.6}$$

$$H_m(x) = f_m(x), \quad \text{когда} \quad x \in E_m, \tag{3.7}$$

$$(3.8)\qquad \max_{2^{n_{m-1}}\le M<2^{n_m}} \left\| \sum_{k=2^{n_{m-1}}}^{M} \delta_k^{(m)} a_k^{(m)} W_k \right\|_{L^1[0,1]} < 5\|f_m\|_{L^1[0,1]},$$

$$(3.9)\qquad \|f_m - G_m\|_{L^p_\mu[0,1]} < 2^{-m-2},$$

$$(3.10)\qquad \max_{2^{n_{m-1}}\le M<2^{n_m}} \left\| \sum_{k=2^{n_{m-1}}}^{M} \sigma_k^{(m)} a_k^{(m)} W_k \right\|_{L^p_\mu[0,1]} < 2\|f_m\|_{L^p_\mu[0,1]} + 2^{-m-1}$$

для любого числа $1 < p \le m$,

$$(3.11)\qquad \max_{2^{n_{m-1}}\le M<2^{n_m}} \left\| \sum_{k=2^{n_{m-1}}}^{M} a_k^{(m)} W_k \right\|_{L^1[0,1]} < 2^{-m-1}.$$

Положим

$$(3.12)\qquad P_0(x) = \sum_{k=0}^{2^{n_0}-1} a_k^{(0)} W_k(x) = \sum_{k=0}^{2^{n_0}-1} W_k(x)$$

и

(3.13)

$$a_k = a_k^{(m)} \quad \text{и} \quad c_k = a_k^{(m)} + 2^{-k(k+4)} \quad \text{для } k \in \begin{cases} [0, 2^{n_0}), & \text{если} \quad m = 0 \\ [2^{n_{m-1}}, 2^{n_m}), & \text{если} \quad m \ge 1. \end{cases}$$

Из (3.1), (3.5), (3.11) – (3.13) следует, что $c_k \searrow 0$ и ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k W_k(x)$$

в метрике $L^1[0,1]$ сходится к некоторой функции $U \in L^1[0,1]$ (следовательно, $c_k = c_k(U)$ являются коэффициентами Фурье – Уолша функции U). Определим множество

$$(3.14)\qquad E_\varepsilon^{(2)} = \left(\bigcap_{m=1}^{\infty} E_m \right) \subset E_m,\ m \in \mathbb{N},$$

имеющего (на основе (3.4)) меру $|E_\varepsilon^{(2)}| > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$.

Используя соотношения (2.1), (3.6) – (3.8), (3.11), (3.13), (3.14) и рассуждения сделанные в работе [15] заключаем, что для каждой функции $f \in L^1[0,1]$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1[0,1]$, совпадающую с f на $E_\varepsilon^{(2)}$ и числа $\delta_k = \pm 1$ так, чтобы ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k c_k W_k$ сходился бы к $\tilde{f}$ в метрике $L^1[0,1]$.

Теперь покажем, что для любого числа $p > 1$ и функции $g \in L^p_\mu[0,1]$ можно найти такие числа $\sigma_k = \pm 1, 0$, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k c_k W_k$ сходится к g в метрике

$L^p_\mu[0,1]$. В соответствии с (3.3) и (3.13) положим

$$\widetilde{G}_m(x) = \sum_{k=2^{n_{m-1}}}^{2^{n_m}-1} \sigma_k^{(m)} c_k W_k(x), \quad \sigma_k^{(m)} = \pm 1, 0, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{3.15}$$

Согласно отношениям (3.9), (3.10), (3.13) и (3.15) для любых чисел $m \in \mathbb{N}$, $M \in [2^{n_{m-1}}, 2^{n_m}) \cap \mathbb{N}$ и $p \in (1, m]$ имеют место следующие неравенства:

$$\|f_m - \widetilde{G}_m\|_{L^m_\mu[0,1]} < \|f_m - G_m\|_{L^m_\mu[0,1]} + \sum_{k=2^{n_{m-1}}}^{2^{n_m}-1} 2^{-k-4} < 2^{-m-1}, \tag{3.16}$$

$$\left\| \sum_{k=2^{n_{m-1}}}^{M} \sigma_k^{(m)} c_k W_k \right\|_{L^p_\mu[0,1]} < \left\| \sum_{k=2^{n_{m-1}}}^{M} \sigma_k^{(m)} a_k^{(m)} W_k \right\|_{L^p_\mu[0,1]} + \tag{3.17}$$

$$+ \sum_{k=2^{n_{m-1}}}^{2^{n_m}-1} 2^{-k-4} < 2\|f_m\|_{L^p_\mu[0,1]} + 2^{-m}.$$

Пусть $p > 1$ и $g \in L^p_\mu[0,1]$. Из последовательности $\{f_m\}$ выберем такую функцию $f_{m_1}(x)$, что $m_1 > p$ и

$$\|g - f_{m_1}\|_{L^p_\mu[0,1]} < 2^{-2}. \tag{3.18}$$

Полагая

$$\sigma_k = \begin{cases} \sigma_k^{(m_1)} = \pm 1, 0, & \text{когда} \quad k \in [2^{n_{m_1-1}}, 2^{n_{m_1}}) \\ 0, & \text{когда} \quad k \in [0, 2^{n_{m_1-1}}) \end{cases}$$

и используя (3.15) – (3.18) находим

$$\left\| g - \sum_{k=0}^{2^{n_{m_1}}-1} \sigma_k c_k W_k \right\|_{L^p_\mu[0,1]} \le \|g - f_{m_1}\|_{L^p_\mu[0,1]} +$$

$$+ \left\| f_{m_1} - \widetilde{G}_{m_1} \right\|_{L^{m_1}_\mu[0,1]} < 2^{-2} + 2^{-m_1-1} < 2^{-1}$$

и

$$\max_{2^{n_{m_1-1}} \le M < 2^{n_{m_1}}} \left\| \sum_{k=2^{n_{m_1-1}}}^{M} \sigma_k c_k W_k \right\|_{L^p_\mu[0,1]} < 2\|f_{m_1}\|_{L^p_\mu[0,1]} + 2^{-m_1}.$$

Предположим, что для натурального числа $q > 1$ уже определены числа $m_1 < m_2 < \cdots < m_{q-1}$ и $\sigma_k = \pm 1, 0$, $k \in [0, 2^{n_{m_{q-1}}})$ таким образом, что для каждого натурального числа $j \in [1, q-1]$ выполняются следующие условия:

$$\sigma_k = \begin{cases} \sigma_k^{(m_j)} = \pm 1, 0, & \text{когда} \quad k \in [2^{n_{m_j-1}}, 2^{n_{m_j}}), \\ 0, & \text{когда} \quad k \notin \bigcup_{j=1}^{q-1} [2^{n_{m_j-1}}, 2^{n_{m_j}}), \end{cases}$$

$$\left\| g - \sum_{k=0}^{2^{n_{m_j}}-1} \sigma_k c_k W_k \right\|_{L^p_\mu[0,1]} < 2^{-j}, \tag{3.19}$$

$$\max_{2^{n_{m_j-1}} \le M < 2^{n_{m_j}}} \left\| \sum_{k=2^{n_{m_j-1}}}^{M} \sigma_k c_k W_k \right\|_{L^p_\mu[0,1]} < 2\|f_{m_j}\|_{L^p_\mu[0,1]} + 2^{-m_j}.$$

Из $\{f_m\}$ выберем такую функцию $f_{m_q}(x)$, что $m_q > m_{q-1}$ и

$$\left\| g - \sum_{k=0}^{2^{n_{m_{q-1}}}-1} \sigma_k c_k W_k - f_{m_q} \right\|_{L^p_\mu[0,1]} < 2^{-q-1}, \tag{3.20}$$

и определим

$$\sigma_k = \begin{cases} \sigma_k^{(m_q)} = \pm 1, 0, & \text{когда} \quad k \in [2^{n_{m_{q-1}}}, 2^{n_{m_q}}), \\ 0, & \text{когда} \quad k \notin \bigcup_{j=1}^{q} [2^{n_{m_{j-1}}}, 2^{n_{m_j}}). \end{cases} \tag{3.21}$$

Основываясь на (3.15), (3.16), (3.20) и (3.21) получим

$$\left\| g - \sum_{k=0}^{2^{n_{m_q}}-1} \sigma_k c_k W_k \right\|_{L^p_\mu[0,1]} \le \tag{3.22}$$

$$\le \left\| g - \sum_{k=0}^{2^{n_{m_{q-1}}}-1} \sigma_k c_k W_k - f_{m_q} \right\|_{L^p_\mu[0,1]} + \left\| f_{m_q} - \widetilde{G}_{m_q} \right\|_{L^{m_q}_\mu[0,1]} < 2^{-q-1} + 2^{-m_q-1} < 2^{-q}.$$

Далее, из (3.19) и (3.20) следует, что

$$\|f_{m_q}\|_{L^p_\mu[0,1]} \le \left\| g - \sum_{k=0}^{2^{n_{m_{q-1}}}-1} \sigma_k c_k W_k - f_{m_q} \right\|_{L^p_\mu[0,1]} +$$

$$+ \left\| g - \sum_{k=0}^{2^{n_{m_{q-1}}}-1} \sigma_k c_k W_k \right\|_{L^p_\mu[0,1]} < 2^{-q-1} + 2^{-q+1} < 2^{-q+2}$$

и, следовательно, имея ввиду (3.17) и (3.21) для любого натурального числа $M \in [2^{n_{m_{q-1}}}, 2^{n_{m_q}})$ имеем

$$\left\| \sum_{k=2^{n_{m_{q-1}}}}^{M} \sigma_k c_k W_k \right\|_{L^p_\mu[0,1]} < 2\|f_{m_q}\|_{L^p_\mu[0,1]} + 2^{-m_q} < 2^{-q+4}. \tag{3.23}$$

Таким образом, можно определить возрастающую последовательность индексов $\{m_q\}_{q=1}^{+\infty}$ и числа $\sigma_k = \pm 1, 0$ так, чтобы условия (3.21) – (3.23) имели место для каждого натурального числа q. Следовательно, мы получаем ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sigma_k c_k W_k, \quad \sigma_k = \pm 1, 0,$$

который сходится к g в метрике $L^p_\mu[0,1]$.

Для завершения доказательства теоремы 1.2 остается положить $E_\varepsilon = E^{(1)}_\varepsilon \cap E^{(2)}_\varepsilon$.

Abstract. The paper is devoted to the questions relating the structure of universal functions for weighted spaces $L^p_\mu[0,1]$, $p>1$. We prove existence of a measurable set $E\subset[0,1]$ with measure arbitrarily close to 1, and a weight function $0<\mu(x)\le 1$, equal to 1 on E, such that by suitable continuation of values of an arbitrary function $f\in L^1(E)$ on $[0,1]\setminus E$, a function $\tilde f\in L^1[0,1]$ can be obtained, which is universal for each class $L^p_\mu[0,1]$, $p>1$, in the sense of subsequences of signs of its Fourier-Walsh coefficients.

Список литературы

[1] G. D. Birkhoff, "Démonstration d'un théoréme élémentaire sur les fonctions entiéres", C. R. Acad. Sci. Paris, **189**, 473 – 475 (1929).

[2] G. R. MacLane, "Sequences of derivatives and normal families", J. Analyse Math., **2**, 72 – 87 (1952).

[3] С. М. Воронин, "Теорема об "универсальности" дзета-функции Римана", Изв. АН СССР, сер. мат., **39** (3), 475 – 486 (1975).

[4] K. G. Grosse-Erdmann, "Holomorphe Monster und Universelle Funktionen", Mitt. Math. Sem. Giessen, **176**, 1 – 84, (1987).

[5] Д. Е. Меньшов, "Об универсальных последовательностях функций", Матем. Сборник, **65** (2), 272 – 312 (1964).

[6] А. А. Талалян, "О рядах универсальных относительно перестановок", Известия АН Арм. ССР, сер. мат., **24**, 567–604 (1960).

[7] П. Л. Ульянов, "Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$", УМН, **27** (2), 3 – 52 (1972).

[8] А. М. Олевский, "О некоторых особенностях рядов Фурье в пространствах L^p $(p<2)$", Матем. Сборник, **77** (2), 251 – 258 (1968).

[9] В. И. Иванов, "Представление функций рядами в метрических симметричных пространствах без линейных функционалов", Труды МИАН СССР, **189**, 34 – 77 (1989).

[10] В. Г. Кротов, "Об универсальных ряда Фурье по системе Фабера – Шаудера", Вестник МГУ, сер. мат. мех., **4**, 53 – 57 (1975).

[11] M. G. Grigorian, "On the representation of functions by orthogonal series in weighted spaces", Studia Mathematica, **134** (3), 207 – 216 (1999).

[12] M. G. Grigorian, S. A. Episkoposian, "On universal trigonometric series in weighted spaces $L^p_\mu[0,2\pi]$", East J. Approx., **5** (4), 483 – 492 (1999).

[13] М. Г. Григорян, "Об ортогональных рядах универсальных в $L^p[0,1]$, $p>0$", Известия НАН РА, **37** (2), 3 – 18 (2002).

[14] M. G. Grigorian, K. A. Navasardyan, "On behavior of Fourier coefficients by the Walsh system", Journal of Contemp. Math. Analysis, **51** (1), 3 – 21 (2016).

[15] М. Г. Григорян, К. А. Навасардян, "Универсальные функции в задачах "исправления", обеспечивающие сходимость рядов Фурье-Уолша", Изв. РАН. Математика, **80** (6), 65 – 91 (2016).

[16] M. G. Grigorian, A. A. Sargsyan, "On the universal function for the class $L^p[0,1]$, $p\in(0,1)$", Journal of Functional Analysis, **270**, 3111 – 3133 (2016).

[17] M. G. Grigorian, A. A. Sargsyan, "On existence of a universal function for $L^p[0,1]$, with $p\in(0,1)$", Siberian Math. Journal, **57** (5), 796 – 808 (2016).

[18] М. Г. Григорян, А. А. Саргсян, "О структуре функций, универсальных для классов L^p, $p\in(0,1)$", Матем. Сборник, **209** (1) (2018).

[19] A. A. Sargsyan, M. G. Grigorian, "Universal function for a weighted space $L^1_\mu[0,1]$", Positivity, *doi:10.1007/s11117-017-0479-8*, 1 – 26 (2017).

[20] M. G. Grigorian, T. M. Grigorian and A. A. Sargsyan, "On the universal function for weighted spaces $L^p_\mu[0,1]$, $p \geq 1$", Banach J. Math. Anal., advance publication, *doi:10.1215/17358787-2017-0044* (2017).

[21] Г. Г. Геворгян, К. А. Навасардян, "О рядах Уолша с монотонными коэффициентами", Изв. АН России, сер. мат., **63** (1), 41 – 60 (1999).

[22] К. А. Навасардян, "О рядах по системе Уолша с монотонными коэффициентами", Изв. НАН Армении, **42** (5), 51 – 64 (2007).

[23] С. А. Епископосян, "О существование универсальных рядов по системе Уолша", Известия НАН РА, сер. мат., **38** (4), 16 – 32 (2003).

[24] B. I. Golubov, A. F. Efimov and V. A. Skvartsov, Series and Transformations of Walsh, Nauka, Moskva (1987).

[25] Н. Н. Лузин, "К основной теореме интегрального исчисления", Матем. Сборник, **28** (2), 266 – 294, (1912).

[26] Д. Е. Меньшов, "О равномерной сходимости рядов Фурье", Матем. Сборник, **53** (2), 67 – 96, (1942).

Поступила 24 октября 2017

После доработки 15 ноября 2018

Принята к публикации 24 января 2019