Известия НАН Армении, Математика, том 54, н. 2, 2019, стр. 65 – 81

ЯВЛЕНИЕ ГИББСА ДЛЯ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ВЕЙВЛЕТА СТРОМБЕРГА

В. Г. МИКАЕЛЯН

Ереванский Государственный Университет, Ереван, Армения
E-mail: *mik.vazgen@gmail.com*

Аннотация. Явление Гиббса исследуется для кусочно-линейного вейвлета Стромберга. Доказано, что Явление Гиббса для частичных сумм ряда Фурье-Стромберга имеет место во всех точках $\mathbb{R}$ и функция Гиббса почти всюду равна $\frac{1+2\sqrt{3}}{3}$.

MSC2010 number: 42C10.

Ключевые слова: явление Гиббса; функция Гиббса; кусочно-линейный вейвлет; ряд Фурье-Стромберга.

1. Введение

Явлением Гиббса называется определенная особенность поведения частичных сумм ряда Фурье в окрестности точки разрыва функции. Оно впервые обнаружено Г. Уилбрейамом (1848 г.) и значительно позже переоткрыто Дж. Гиббсом (1899 г.). Оно заключается в следующем: n-ая частичная сумма ряда Фурье по тригонометрической системе имеет болшие колебания вблизи точки скачка функции. При увеличении n колебание не затухает, но достигает конечного предела.

Для каждого неотрицательного целого числа m Стромберг [1] построил кусочно полиномиальный вейвлет $f^{(m)}$, который на каждом отрезке полиномиальности является полиномом с действительными коэффицентами, степени не выше $m+1$, и ортонормированная система $f_{i,j}^{(m)}(x) = 2^{\frac{i}{2}} f^{(m)}(2^i x - j)\,, i,j \in \mathbb{Z}$ является безусловным базисом в $H^p(\mathbb{R})$, при $p > \frac{1}{2}$. В настоящей работе исследуется явление Гиббса для системы Стромберга в случае $m = 0$. Напомним определение этой системы для $m = 0$.

Пусть $A_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \frac{1}{2}(-N)$ и $A_1 = A_0 \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Точки множества A_0 разбивают действительную ось $\mathbb{R}$ на интервалы $\{I_\sigma\}_{\sigma \in A_0}$, где σ левая концевая точка интервала I_σ. Обозначим через S_0 подпространство пространства $L_2(\mathbb{R})$, состоящее из таких функций $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, которые линейны на каждом интервале

I_σ, $\sigma \in A_0$. Аналогично определяется подпространство S_1, если вместо A_0 рассмотреть A_1. Очевидно что $S_0 \subset S_1$ и, если $f(x) \in S_0$, то $f(x-1) \in S_1$. Вообще функции из S_1 отличаются от функций S_0 только тем, что функции из S_0 должны быть линейными на $[0,1]$, а функции из S_1 могут быть линейными только на каждом из интервалов $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Поэтому S_0 имеет коразмерность 1 в S_1. Следовательно существует функция $f^{(0)} \in L_2(\mathbb{R})$, с точностью до знака определяемая из следующих соотношений:

1. $f^{(0)} \in S_1$,
2. $f^{(0)} \perp S_0$, т. е. $\int\limits_{\mathbb{R}} f^{(0)}(x) f(x)\, dx = 0$ для любого $f \in S_0$,
3. $\left\| f^{(0)} \right\|_2 = 1$.

Для любой пары $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ положим

$$f_{i,j}(x) = 2^{\frac{i}{2}} f^{(0)}\left(2^i x - j\right). \tag{1.1}$$

Система $\{f_{i,j}(x)\}_{i,j=-\infty}^{+\infty}$ была введена Стромбергом [1]. Им же получено, что $\{f_{i,j}(x)\}_{i,j=-\infty}^{+\infty}$ полная ортонормированная в $L_2(\mathbb{R})$ система и что она является безусловным базисом в $H^p(\mathbb{R})$ при любом $p > \frac{1}{2}$.

Пусть t_0 точка разрыва первого рода функции $q \in L(\mathbb{R})$, причем $|q(t_0+) - q(t_0-)| = 2d > 0$, и пусть последовательность функций $\{q_{i,j}(t)\}_{i,j=-\infty}^{+\infty}$ сходится к $q(t)$ в каждой точке некоторой окрестности точки t_0, при $i,j \to +\infty$. Функцию

$$G\left(t_0, q, \{q_{i,j}(t)\}_{i,j=-\infty}^{+\infty}\right) = G(t_0) = \varlimsup_{\substack{t \to t_0 \\ i \to +\infty}} \frac{1}{d} \left| q_{i,j}(t) - \frac{q(t_0+) + q(t_0-)}{2} \right|$$

назовем функцией Гиббса для последовательности $\{q_{i,j}(t)\}_{i,j=-\infty}^{+\infty}$. Если $G(t_0) > 1$, то скажем, что для последовательности $\{q_{i,j}(t)\}_{i,j=-\infty}^{+\infty}$ в точке t_0 имеет место явление Гиббса.

. Хорошо известно (см. [2], стр. 123-126), что для частичных сумм ряда Фурье по тригонометрической системе имеет место явление Гиббса: функция $G(t_0)$ не зависит от t_0 и равна постоянной Гиббса

$$G(t_0) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \approx 1.17.$$

Для частичных сумм ряда Фурье-Франклина наличие явления Гиббса установлено в работе [3]. Для частичных сумм ряда Фурье-Франклина функция G почти всюду является постоянной.

Для частичных сумм ряда Фурье-Франклина (общий случай) наличие явления Гиббса установлено в работе [4], где доказано, что явление Гиббса для частичных сумм ряда Фурье-Франклина имеет место почти во всех точках $[0,1]$ и найдены оценки сверху и снизу для этой функции. Для частичных сумм ряда Фурье-Уолша наличие явления Гиббса установлено в работе [5]. Для частичных сумм ряда Фурье-Уолша функция G не является постоянной. В работе [6] найдены точные оценки сверху и снизу для этой функции. Подобные вопросы исследованы также в работах [7]-[8].

Пусть

$$S_{i_0,j_0}(f,x)=\sum_{i=-\infty}^{i_0-1}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}a_{i,j}f_{i,j}(x)+\sum_{j=-\infty}^{j_0}a_{i_0,j}f_{i_0,j}(x),\ i_0,j_0\in\mathbb{Z}$$

частичная сумма ряда Фурье-Стромберга, а $G(t_0)=G\left(t_0,f,\{S_{i_0,j_0}(f,\cdot)\}_{i_0,j_0=-\infty}^{+\infty}\right)$ функция Гиббса. Сформулируем основные результаты:

Теорема 1.1. *Пусть $t_0\in\mathbb{R}$ и функция $f\in L^2(\mathbb{R})$ имеет неустранимый разрыв в этой точке, тогда*

$$1+\frac{48-28\sqrt{3}+8\sqrt{2}\left(2-\sqrt{3}\right)}{27}\leq G(t_0,f)\leq\frac{1+2\sqrt{3}}{3},$$

причем $G(t_0,f)=\dfrac{1+2\sqrt{3}}{3}$, *для почти всех* $t_0\in\mathbb{R}$.

Из теоремы 1.1 следует, что для частичних сумм ряда Фурье-Стромберга явление Гиббса имеет место везде и функция Гиббса постоянна почти всюду.

2. Доказательство теоремы 1.1

Пусть $i_0,j_0\in\mathbb{Z}$. Обозначим

$$K_{i_0,j_0}(x,t)=\sum_{i=-\infty}^{i_0-1}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}f_{i,j}(x)f_{i,j}(t)+\sum_{j=-\infty}^{j_0}f_{i_0,j}(x)f_{i_0,j}(t).$$

Из (1.1) следует, что для любых $i_0,j_0\in\mathbb{Z}$

$$K_{i_0,j_0}(x,t)=2^{i_0}K_{0,0}\left(2^{i_0}x-j_0,2^{i_0}t-j_0\right).$$

Легко можно установить, что для любого ограниченного $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $i_0,j_0\in\mathbb{Z}$ справедливо равенство

$$S_{i_0,j_0}(f,x)=\int_{-\infty}^{+\infty}K_{i_0,j_0}(x,t)f(t)\,dt. \tag{2.1}$$

Пусть $n\in A_1$. Обозначим через $\varphi_n(t)$ ту кусочно-линейную функцию с узлами из A_1, для которой $\varphi_n(n)=1$ и $\varphi_n(l)=0$ для любых $l\in A_1$, $l\neq n$.

Очевидно, что $K_{0,0}(x,t)$ кусочно-линейная функция и по x и по t, с узлами из A_1. Зафиксируем $k \in A_1$ и для любого $i \in A_1$ положим $a_i = K_{0,0}(k,i)$.

Лемма 2.1. *Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда*

1) *если $x_0 \geq 1$ и $m \leq x_0 < m+1$, где $m \in A_1$, $m \geq 1$, то справедливо равенство*

$$\int\limits_{-\infty}^{x_0} K_{0,0}(k,t)\,dt = \begin{cases} 1+\alpha_m, & \text{если } k \leq m \\ \alpha_m, & \text{если } k > m, \end{cases}$$

где $\alpha_m = \dfrac{a_{m+1}}{6} - \dfrac{a_m}{3} + a_m(x_0 - m) + \dfrac{a_{m+1}-a_m}{2}(x_0-m)^2,$

2) *если $x_0 < 1$ и $m \leq x_0 < m + \frac{1}{2}$, где $m \in A_1$, $m < 1$, то справедливо равенство*

$$\int\limits_{-\infty}^{x_0} K_{0,0}(k,t)\,dt = \begin{cases} 1+\beta_m, & \text{если } k \leq m \\ \beta_m, & \text{если } k > m. \end{cases}$$

где $\beta_m = -\dfrac{a_{m+\frac{1}{2}}}{12} - \dfrac{a_m}{6} + a_m(x_0-m) + \left(a_{m+\frac{1}{2}} - a_m\right)(x_0-m)^2$. .

Доказательство. Обозначим

$$\psi_1(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } t \in (-\infty, m) \\ m+1-t, \text{ если } t \in [m, m+1] \\ 0, \text{ если } t \in (m+1, +\infty). \end{cases}$$

Из (2.1) следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{x_0} K_{0,0}(k,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_{0,0}(k,t)\psi_1(t)\,dt - \int\limits_{m}^{m+1} K_{0,0}(k,t)(m+1-t)\,dt +$$

$$+\int\limits_{m}^{x_0} K_{0,0}(k,t)\,dt = \psi_1(k) + \alpha_m = \begin{cases} 1+\alpha_m, \text{ если } k \leq m \\ \alpha_m, \text{ если } k > m, \end{cases}$$

Рассматривая ψ_2 вместо функции ψ_1 получим доказательство пункта 2) леммы:

$$\psi_2(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } t \in (-\infty, m) \\ 2m+1-2t, \text{ если } t \in \left[m, m+\dfrac{1}{2}\right] \\ 0, \text{ если } t \in \left(m+\dfrac{1}{2}, +\infty\right). \end{cases}$$

Лемма 2.2. *Имеют место следующие утверждения*

1) *Если $k>1$ и $n\in A_1$, то*

$$a_n=\begin{cases}\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-2\right)^{k-2n+1}, & \text{если } n\le 1\\ \sqrt{3}\left(-2-\sqrt{3}\right)^{n-k}+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-2\right)^{n+k-2}, & \text{если } 1\le n\le k\\ \sqrt{3}\left(\sqrt{3}-2\right)^{n-k}+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-2\right)^{n+k-2}, & \text{если } n\ge k.\end{cases}$$

2) *Если $k=1$ и $n\in A_1$, то*

$$a_n=\begin{cases}\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-2\right)^{-2n+2}, & \text{если } n\le 1\\ \frac{4}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-2\right)^{n-1}, & \text{если } n\ge 1.\end{cases}$$

3) *Если $k<1$ и $n\in A_1$, то*

$$a_n=\begin{cases}\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-2\right)^{n-2k+1}, & \text{если } n\ge 1\\ 2\sqrt{3}\left(-2-\sqrt{3}\right)^{-2n+2k}-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-2\right)^{-2n-2k+4}, & \text{если } k\le n\le 1\\ 2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-2\right)^{-2n+2k}-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-2\right)^{-2n-2k+4}, & \text{если } n\le k.\end{cases}$$

Доказательство. Из (2.1) следует, что для любого $n\in A_1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}K_{0,0}(k,t)\,\varphi_n(t)\,dt=\varphi_n(k)\,. \tag{2.2}$$

Докажем утверждение 1). Пусть $k>1$. Если $n\ne k$ и $n>1$, то

$$0=\varphi_n(k)=\int_{-\infty}^{+\infty}K_{0,0}(k,t)\,\varphi_n(t)\,dt=\frac{a_{n-1}}{6}+\frac{2a_n}{3}+\frac{a_{n+1}}{6},$$

т.е. $a_{n-1}+4a_n+a_{n+1}=0$. Полагая $n=k$ в (2.2), получим $a_{k-1}+4a_k+a_{k+1}=6$. А если $n<1$ то, справедливы равенства

$$0=\varphi_n(k)=\int_{-\infty}^{+\infty}K_{0,0}(k,t)\,\varphi_n(t)\,dt=\frac{a_{n-\frac{1}{2}}}{12}+\frac{a_n}{3}+\frac{a_{n+\frac{1}{2}}}{12},$$

т.е. $a_{n-\frac{1}{2}}+4a_n+a_{n+\frac{1}{2}}=0$. Подставляя $n=1$ в (2.2), будем иметь

$$0=\varphi_1(k)=\int_{-\infty}^{+\infty}K_{0,0}(k,t)\,\varphi_1(t)\,dt=\frac{a_{\frac{1}{2}}}{12}+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{6}$$

т.е. $a_{\frac{1}{2}}+6a_1+2a_2=0$.

Поскольку $-2-\sqrt{3}$ и $\sqrt{3}-2$ являются корнями квадратного уравнения $t^2+4t+1=0$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to-\infty} a_n = 0$, следовательно

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{4}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-2\right)^{k-2n+1}, & \text{если } n \le 1 \\ \sqrt{3}\left(-2-\sqrt{3}\right)^{n-k} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-2\right)^{n+k-2}, & \text{если } 1 \le n \le k \\ \sqrt{3}\left(\sqrt{3}-2\right)^{n-k} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-2\right)^{n+k-2}, & \text{если } n \ge k. \end{cases}$$

Тем же способом мы получим доказательства пунктов 2) и 3).

Следствие 2.1. *Для $n \in A_1$ имеют место следующие соотношения*

1) $0 < a_k < 2\sqrt{3}$,
2) $a_n a_{n+\frac{1}{2}} < 0$, *если* $n < 1$,
3) $a_n a_{n+1} < 0$, *если* $n \ge 1$,
4) $|a_n| = \left(2+\sqrt{3}\right)|a_{n+1}|$, *если* $n \ge k$ *и* $n \ge 1$,
5) $|a_n| \ge \left(2+\sqrt{3}\right)\left|a_{n+\frac{1}{2}}\right|$, *если* $n \ge k$ *и* $n < 1$,
6) $|a_n| \ge 2\,|a_{n-1}|$, *если* $n \le k$ *и* $n > 1$,
7) $|a_n| = \left(2+\sqrt{3}\right)\left|a_{n-\frac{1}{2}}\right|$, *если* $n \le k$ *и* $n \le 1$.

Следствие 2.2. *Пусть i и j последовательные точки из A_1. Тогда*

1) $|a_j| \ge 2\,|a_i|$, *если* $i < j \le k$,
2) $|a_i| \ge 2\,|a_j|$, *если* $k \le i < j$.

Лемма 2.3. *Обозначим через y_k и z_k ближайшие слева и справа от k нули функции $K_{0,0}(k,t)$. Тогда*

$$y_k = \begin{cases} k-1+\dfrac{\sqrt{3}-2}{3-\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\left(\sqrt{3}-2\right)^{2k-4}+3}{\left(\sqrt{3}-2\right)^{2k-3}-3}, & \text{если } k>1 \\ k+\dfrac{1}{2\left(\sqrt{3}-3\right)}, & \text{если } k \le 1, \end{cases}$$

$$z_k = \begin{cases} k+\dfrac{1}{3-\sqrt{3}}, & \text{если } k \ge 1 \\ k+\dfrac{1}{2\left(3-\sqrt{3}\right)}\cdot\dfrac{3-\left(\sqrt{3}-2\right)^{-4k+4}}{3+\left(\sqrt{3}-2\right)^{-4k+3}}, & \text{если } k<1. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $k>1$. Из следствия 2.1 следует, что y_k точка пересечения с осью Ox отрезка с концами $(k-1, a_{k-1})$ и (k, a_k), а z_k точка пересечения с осью Ox отрезка с концами (k, a_k) и $(k+1, a_{k+1})$, т.е.

$$y_k = k-1+\frac{a_{k-1}}{a_{k-1}-a_k} = k-1+\frac{\sqrt{3}-2}{3-\sqrt{3}}\cdot\frac{\left(\sqrt{3}-2\right)^{2k-4}+3}{\left(\sqrt{3}-2\right)^{2k-3}-3}$$

и

$$z_k = k + \frac{a_k}{a_k - a_{k+1}} = k + \frac{1}{3-\sqrt{3}}.$$

Пусть $k = 1$. Из следствия 2.1 следует, что y_1 точка пересечения с осью Ox отрезка с концами $\left(\frac{1}{2}, a_{\frac{1}{2}}\right)$ и $(1, a_1)$, а z_1 точка пересечения с осью Ox отрезка с концами $(1, a_1)$ и $(2, a_2)$, т.е.

$$y_1 = 1 + \frac{a_1}{2\left(a_{\frac{1}{2}} - a_1\right)} = 1 + \frac{1}{2\left(\sqrt{3}-3\right)}$$

и

$$z_1 = 1 + \frac{a_1}{a_1 - a_2} = 1 + \frac{1}{3-\sqrt{3}}.$$

Пусть $k < 1$. Из следствия 2.1 следует, что y_k точка пересечения с осью Ox отрезка с концами $\left(k - \frac{1}{2}, a_{k-\frac{1}{2}}\right)$ и (k, a_k), а z_k точка пересечения с осью Ox отрезка с концами (k, a_k) и $\left(k + \frac{1}{2}, a_{k+\frac{1}{2}}\right)$, т.е.

$$y_k = k + \frac{a_k}{2\left(a_{k-\frac{1}{2}} - a_k\right)} = k - \frac{1}{2\left(3-\sqrt{3}\right)}$$

и

$$z_k = k + \frac{a_k}{2\left(a_k - a_{k+\frac{1}{2}}\right)} = k + \frac{1}{2\left(3-\sqrt{3}\right)} \cdot \frac{3 - \left(\sqrt{3}-2\right)^{-4k+4}}{3 + \left(\sqrt{3}-2\right)^{-4k+3}}.$$

Лемма 2.4. *Справедливы равенства*

1) $\sup\left\{ \int\limits_{-\infty}^{x} K_{0,0}(k,t)\,dt \ : \ k \in A_1,\ x \in \mathbb{R} \right\} = \frac{2+\sqrt{3}}{3},$

2) $\inf\left\{ \int\limits_{-\infty}^{x} K_{0,0}(k,t)\,dt \ : \ k \in A_1,\ x \in \mathbb{R} \right\} = -\frac{\sqrt{3}-1}{4}.$

Доказательство. Из следствия 2.1 следует, что

$$\sup\left\{ \int\limits_{-\infty}^{x} K_{0,0}(k,t)\,dt \ : \ k \in A_1,\ x \in \mathbb{R} \right\} = \sup\left\{ \int\limits_{-\infty}^{z_k} K_{0,0}(k,t)\,dt \ : \ k \in A_1 \right\}$$

и

$$\inf\left\{ \int\limits_{-\infty}^{x} K_{0,0}(k,t)\,dt \ : \ k \in A_1,\ x \in \mathbb{R} \right\} = \inf\left\{ \int\limits_{-\infty}^{y_k} K_{0,0}(k,t)\,dt \ : \ k \in A_1 \right\}.$$

1) Если $k \geq 1$, то из лемм 2.1 – 2.3 будем иметь

$$\int\limits_{-\infty}^{z_k} K_{0,0}(k,t)\,dt = \frac{3\sqrt{3} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{2k-1}}{6\left(\sqrt{3}-1\right)}.$$

Поскольку $\left(2-\sqrt{3}\right)^{2k-1} \leq 2-\sqrt{3}$, при $k \geq 1$, следовательно

$$\sup\left\{\int\limits_{-\infty}^{z_k} K_{0,0}(k,t)\,dt \ : \ k \in A_1,\ k \geq 1\right\} = \frac{2+\sqrt{3}}{3}.$$

Если $k < 1$, то из лемм 1, 2 и 3 будем иметь

$$\int\limits_{-\infty}^{z_k} K_{0,0}(k,t)\,dt = 1 + \frac{2-\sqrt{3}}{6\left(\sqrt{3}-1\right)}\frac{9+\left(2-\sqrt{3}\right)^{-8k+6}}{3-\left(2-\sqrt{3}\right)^{-4k+3}}.$$

Поскольку функция $g(x) = \dfrac{9+x^2}{3-x}$ возрастающая в интервале $\left(0, 2-\sqrt{3}\right]$, следовательно

$$\sup\left\{\int\limits_{-\infty}^{z_k} K_{0,0}(k,t)\,dt \ : \ k \in A_1,\ k < 1\right\} = 1 + \frac{2-\sqrt{3}}{6\left(\sqrt{3}-1\right)}g\left(2-\sqrt{3}\right) = \frac{14-6\sqrt{3}}{3}.$$

Таким образом

$$\sup\left\{\int\limits_{-\infty}^{x} K_{0,0}(k,t)\,dt \ : \ k \in A_1,\ x \in \mathbb{R}\right\} = \max\left\{\frac{2+\sqrt{3}}{3}, \frac{14-6\sqrt{3}}{3}\right\} = \frac{2+\sqrt{3}}{3}.$$

2) Если $k > 1$, то из лемм 2.1 – 2.3 будем иметь

$$\int\limits_{-\infty}^{y_k} K_{0,0}(k,t)\,dt = \frac{\sqrt{3}-2}{6\left(\sqrt{3}-1\right)}\frac{9+\left(2-\sqrt{3}\right)^{4k-6}}{3+\left(2-\sqrt{3}\right)^{2k-3}}.$$

Поскольку функция $f(x) = \dfrac{9+x^2}{3+x}$ убывающая в интервале $\left(0, 2-\sqrt{3}\right]$, то

$$\inf\left\{\int\limits_{-\infty}^{y_k} K_{0,0}(k,t)\,dt \ : \ k \in A_1,\ k > 1\right\} = \frac{\sqrt{3}-2}{6\left(\sqrt{3}-1\right)}f(0) = -\frac{\sqrt{3}-1}{4}.$$

Если $k \leq 1$, то из лемм 1, 2 и 3 будем иметь

$$\int\limits_{-\infty}^{y_k} K_{0,0}(k,t)\,dt = \frac{\sqrt{3}-2}{2\left(\sqrt{3}-1\right)}\left(1 - \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^{-4k+4}}{3}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\inf\left\{\int\limits_{-\infty}^{y_k} K_{0,0}(k,t)\,dt \ : \ k \in A_1,\ k \leq 1\right\} = -\frac{\sqrt{3}-1}{4}.$$

Таким образом

$$\inf\left\{\int_{-\infty}^{x} K_{0,0}(k,t)\,dt \;:\; k \in A_1,\ x \in \mathbb{R}\right\} = -\frac{\sqrt{3}-1}{4}.$$

Лемма 2.5. *Пусть* $0 \le \varepsilon < \dfrac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$ *и* $x \in \mathbb{R}$. *Если* $|x - z_1| \le \varepsilon$, *то*

$$\int_{-\infty}^{x} K_{0,0}(1,t)\,dt \ge \frac{2+\sqrt{3}}{3} - 2\varepsilon^2\left(\sqrt{3}-1\right). \tag{2.3}$$

Доказательство. Замечая, что

$$1 < 1 + \frac{1}{3-\sqrt{3}} - \varepsilon = z_1 - \varepsilon \le x \le z_1 + \varepsilon < 1 + \frac{1}{3-\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = 2,$$

из лемм 2.1 и 2.2 получаем

$$\frac{2+\sqrt{3}}{3} - 2\varepsilon^2\left(\sqrt{3}-1\right) - \int_{-\infty}^{x} K_{0,0}(1,t)\,dt =$$

$$= 2\left(\sqrt{3}-1\right)(x - z_1 - \varepsilon)(x - z_1 + \varepsilon) \le 0.$$

Замечание 2.1. *Неравенство* (2.3) *имеет место также когда* $\varepsilon \in \left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}, \dfrac{1}{3-\sqrt{3}}\right)$ *и* $x \in [z_1 - \varepsilon, 2)$.

Лемма 2.6. *Если* $\delta \in \left(0, \dfrac{1}{3-\sqrt{3}}\right)$ *и* $x \in [2, z_2 - \delta]$, *то*

$$\int_{-\infty}^{x} K_{0,0}(1,t)\,dt \ge \frac{8-3\sqrt{3}}{3} + \delta^2\left(\sqrt{3}-1\right)^3$$

Доказательство. Так как $z_2 - \delta < 3$, то $x \in [2,3)$. Следовательно, из лемм 2.1 и 2.2 получаем

$$\int_{-\infty}^{x} K_{0,0}(1,t)\,dt - \frac{8-3\sqrt{3}}{3} - \delta^2\left(\sqrt{3}-1\right)^3 = 2\left(\sqrt{3}-1\right)\left(2-\sqrt{3}\right)(x - z_2 - \delta)(x - z_2 + \delta) \ge$$

Лемма 2.7. *Если* $x \in \left[1 + \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{3-\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right), 2 + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3-\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)\right]$, *то*

$$\int_{-\infty}^{x} K_{0,0}(1,t)\,dt \ge 1 + \frac{24 - 14\sqrt{3} + 4\sqrt{2}\left(2-\sqrt{3}\right)}{27}.$$

Доказательство. Из замечания 2.1 получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{x} K_{0,0}(1,t)\,dt \geq \frac{2+\sqrt{3}}{3} - 2\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\frac{4}{3\sqrt{6}} - \frac{1}{9-3\sqrt{3}}\right)^2 = 1 + \frac{6-8\sqrt{3}+8\sqrt{2}}{27},$$

для любого $x \in \left[1+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3-\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right), 2\right)$. С другой стороны, из леммы 2.6 имеем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{x} K_{0,0}(1,t)\,dt \geq \frac{8-3\sqrt{3}}{3} + \left(\frac{1}{9-3\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{6}}\right)^2 \left(\sqrt{3}-1\right)^3$$

$$= 1 + \frac{24-14\sqrt{3}+4\sqrt{2}\,(2-\sqrt{3})}{27},$$

для любого $x \in \left[2, 2+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3-\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right), 2\right)$.

Лемма 2.8. *Если $x \in \mathbb{R}$, $n \in A_1$ и $\delta > 0$ таковы, что* $\int\limits_{-\infty}^{x} K_{0,0}(n,t)\,dt > 1+\delta$, *то* $|x-n| < 2 + \log_2 \frac{4\sqrt{3}}{\delta}$.

Доказательство. Для любого $l \in A_1$ обозначим через S_l площадь треугольника с вершинами (l, a_l) и ближайшими к l слева и справа к нулями функции $K_{0,0}(n,t)$. Обозначим через i, ту точку из A_1, для которой x принадлежит полуоткрытому слева интервалу, концами которой являются ближайшие от i слева и справа нули функции $K_{0,0}(n,t)$. Допустим, что $x \leq n$. Из следствий 2.1 и 2.2 следует

$$\int\limits_{-\infty}^{x} K_{0,0}(n,t)\,dt \leq \sum_{\substack{l\leq i\\ l\in A_1}} S_i \leq \sum_{\substack{l\leq i\\ l\in A_1}} |a_i| \leq |a_i|\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots\right)$$

$$= 2\,|a_i| \leq 2\cdot\frac{1}{2^{n-i}}\,|a_n| \leq \frac{4\sqrt{3}}{2^{n-i}}.$$

Следовательно $n - i < \log_2 \frac{4\sqrt{3}}{1+\delta}$. Теперь допустим, что $x > n$. В этом случае будем иметь

$$\int\limits_{-\infty}^{x} K_{0,0}(n,t)\,dt = 1 - \int\limits_{x}^{\infty} K_{0,0}(n,t)\,dt \leq 1 + \sum_{\substack{l\geq i\\ l\in A_1}} S_i \leq 1 + \sum_{\substack{l\geq i\\ l\in A_1}} |a_i|$$

$$\leq 1 + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots\right)|a_i| = 1 + 2\,|a_i| \leq 1 + 2\cdot\frac{1}{2^{i-n}}\,|a_n| \leq 1 + \frac{4\sqrt{3}}{2^{i-n}}.$$

Отсюда вытекает, что $2^{i-n} < \frac{4\sqrt{3}}{\delta}$, поэтому $i - n < \log_2 \frac{4\sqrt{3}}{\delta}$.

Поскольку $\log_2 \frac{4\sqrt{3}}{\delta} > \log_2 \frac{4\sqrt{3}}{1+\delta}$, следовательно, если $\int\limits_{-\infty}^{x} K_{0,0}(n,t)\,dt > 1+\delta$, то $|i-n| < \log_2 \frac{4\sqrt{3}}{\delta}$. Таким образом, получаем $|x-n| \le |x-i| + |i-n| < 2 + \log_2 \frac{4\sqrt{3}}{\delta}$.

Обозначим

$$D_{i,j} = \frac{1}{2^i}\mathbb{Z} \cup \left(\left(-\frac{1}{2^{i+1}}\right)\mathbb{N} + \left\{\frac{j+1}{2^i}\right\}\right),\ i \in \mathbb{Z},\ j \in \mathbb{Z}.$$

Лемма 2.9. *Пусть $x \in \mathbb{R}$ и $\delta > 0$. Если существуют последовательности $i_n \in \mathbb{N}$, $j_n \in \mathbb{Z}$ и $s_n \in D_{i_n,j_n}$, такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} i_n = +\infty$ и $S_{i_n,j_n}(h_x, s_n) > 1+\delta$, $n \in \mathbb{N}$, где*

$$h_x(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \le x, \\ 0, & \text{если } t > x, \end{cases}$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = x$.

Доказательство. Заметим, что

$$S_{i_n,j_n}(h_x, s_n) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_{i_n,j_n}(s_n,t)\,h_x(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{x} K_{i_n,j_n}(s_n,t)\,dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{x} 2^{i_n} K_{0,0}\left(2^{i_n}s_n - j_n, 2^{i_n}t - j_n\right) dt = \int\limits_{-\infty}^{2^{i_n}x - j_n} K_{0,0}\left(2^{i_n}s_n - j_n, t\right) dt,$$

т.е. мы имеем, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_{-\infty}^{2^{i_n}x - j_n} K_{0,0}\left(2^{i_n}s_n - j_n, t\right) dt > 1+\delta.$$

Из леммы 2.6 вытекает $\left|2^{i_n}x - j_n - \left(2^{i_n}s_n - j_n\right)\right| < 2 + \log_2 \frac{4\sqrt{3}}{\delta}$, т.е.

$$|s_n - x| < \frac{2 + \log_2 \frac{4\sqrt{3}}{\delta}}{2^{i_n}},$$

следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = x$.

Лемма 2.10. *Пусть $\delta \in \left(\frac{6\sqrt{3}-10}{3\left(\sqrt{3}-1\right)}, \frac{\sqrt{3}-1}{3}\right)$, $i \in \mathbb{N}$ и $j \in \mathbb{Z}$. Если $E_{i,j}(\delta)$ множество тех $x \in \mathbb{R}$, для которых существует $k \in D_{i,j}$, что $S_{i,j}(h_x, k) >$*

$1+\delta$, *то*

$$\mu\left(\mathbb{R}\setminus\bigcap_{l=1}^{+\infty}\bigcup_{i=l}^{+\infty}\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}E_{i,j}(\delta)\right)=0.$$

Доказательство. Для любого $\delta\in\left(\frac{6\sqrt{3}-10}{3\left(\sqrt{3}-1\right)},\frac{\sqrt{3}-1}{3}\right)$ существует $\varepsilon\in\left(0,\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right)$, для которого $\delta=\frac{\sqrt{3}-1}{3}-2\varepsilon^2\left(\sqrt{3}-1\right)$. Пусть

$$x\in\left[\frac{z_1-\varepsilon+j}{2^i},\frac{z_1+\varepsilon+j}{2^i}\right]:=A_{i,j}(\delta),$$

где $i,j\in\mathbb{Z}$. Так как $\left|2^ix-j-z_1\right|<\varepsilon$, то из леммы 5 следует, что

$$S_{i,j}\left(h_x,\frac{j+1}{2^i}\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_{i,j}\left(\frac{j+1}{2^i},t\right)h_x(t)\,dt$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{x}K_{i,j}\left(\frac{j+1}{2^i},t\right)dt=\int\limits_{-\infty}^{x}2^iK_{0,0}\left(1,2^it-j\right)dt$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{2^ix-j}K_{0,0}(1,t)\,dt\geq\frac{2+\sqrt{3}}{3}-2\varepsilon^2\left(\sqrt{3}-1\right)=1+\delta,$$

поэтому $A_{i,j}(\delta)\subset E_{i,j}(\delta)$.

Заметим, что

$$\mu\left(\mathbb{R}\setminus\bigcap_{l=1}^{+\infty}\bigcup_{i=l}^{+\infty}\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}E_{i,j}(\delta)\right)\leq\mu\left(\mathbb{R}\setminus\bigcap_{l=1}^{+\infty}\bigcup_{i=l}^{+\infty}\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}A_{i,j}(\delta)\right)=\mu\left(\bigcup_{l=1}^{+\infty}\left(\mathbb{R}\setminus\bigcup_{i=l}^{+\infty}\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}A_{i,j}(\delta)\right)\right),$$

значит достаточно доказать, что для любого $l\in\mathbb{N}$

$$\mu\left(\mathbb{R}\setminus\bigcup_{i=l}^{+\infty}\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}A_{i,j}(\delta)\right)=0.$$

Последоваельность $\{2^nx\}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq l$ всюду плотна в $[0,1]$, для почти всех $x\in\mathbb{R}$ ([9], зад. 4.3, 1.6). Поскольку $(z_1-1)\in(0,1)$, следовательно для почти всех $x\in\mathbb{R}$, существует $i\geq l$ для которой $\left|\{2^ix\}-(z_1-1)\right|<\varepsilon$, т.е. $x\in A_{i,[2^ix]-1}$, что и требовалось доказать.

Следствие 2.3. $\varlimsup\limits_{\substack{t\to x\\ i\to+\infty}}S_{i,j}(h_x,t)=\frac{2+\sqrt{3}}{3}$, *для почти всех* $x\in\mathbb{R}$.

Доказательство. Из первого пункта леммы 2.4 следует, что

$$\varlimsup_{\substack{t\to x\\ i\to+\infty}} S_{i,j}(h_x,t) \le \frac{2+\sqrt{3}}{3},$$

для любого $x \in \mathbb{R}$. Из леммы 2.10 следует, что для почти всех $x \in \mathbb{R}$ существуют последовательности $i_n, j_n \in \mathbb{N}$ и $k_n \in D_{i_n,j_n}$, такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} i_n = +\infty$ и $S_{i_n,j_n}(h_x,k_n) > 1+\delta$, $n \in \mathbb{N}$, следовательно из леммы 2.9 мы получим, что $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n = x$, поэтому

$$\varlimsup_{\substack{t\to x\\ i\to+\infty}} S_{i,j}(h_x,t) \ge \frac{2+\sqrt{3}}{3},$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}$. Таким образом для почти всех $x \in \mathbb{R}$ мы имеем

$$\varlimsup_{\substack{t\to x\\ i\to+\infty}} S_{i,j}(h_x,t) = \frac{2+\sqrt{3}}{3}.$$

Замечание 2.2. *Тем же способом можно получить, что*

$$\varliminf_{\substack{t\to x\\ i\to+\infty}} S_n(h_x,t) = -\frac{\sqrt{3}-1}{4}.$$

для почти всех $x \in \mathbb{R}$.

Лемма 2.11. $\bigcap\limits_{l=1}^{+\infty}\bigcup\limits_{i=l}^{+\infty}\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} E_{i,j}(c) = \mathbb{R}$, *где* $c = \dfrac{24-14\sqrt{3}+4\sqrt{2}\left(2-\sqrt{3}\right)}{27}$.

Доказательство. Из леммы 2.10 следует, что достаточно доказать равенство $\bigcup\limits_{i=l}^{l+1}\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} B_{i,j}(c) = \mathbb{R}$, для любого $l \in \mathbb{N}$, где

$$B_{i,j}(c) = \left[\frac{1+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3-\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+j}{2^i}, \frac{2+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3-\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+j}{2^i}\right].$$

Поскольку левый конец отрезка $B_{l+1,2j+3}(c)$ совпадает с правым концом отрезка $B_{l,j}(c)$, следовательно

$$\bigcap_{l=1}^{+\infty}\bigcup_{i=l}^{+\infty}\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} B_{i,j}(c) = \left(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} B_{l,j}(c)\right)\bigcup\left(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} B_{l+1,j}(c)\right) \supset \left(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} B_{l,j}(c)\right)$$

$$\bigcup\left(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} B_{l+1,2j+3}(c)\right) = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \left(B_{l,j}(c) \cup B_{l+1,2j+3}(c)\right)$$

$$=\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}\left[\frac{1+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3-\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+j}{2^l},\frac{2+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3-\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+2j+3}{2^{l+1}}\right].$$

Из неравенства

$$\frac{1+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3-\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+j+1}{2^l}<\frac{2+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3-\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+2j+3}{2^{l+1}},$$

вытекает, что $\bigcup\limits_{i=l}^{l+1}\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}}B_{i,j}(c)=\mathbb{R}$.

Следствие 2.4. $\varlimsup\limits_{\substack{t\to x\\ i\to+\infty}} S_{i,j}(h_x,t)\geq 1+\frac{24-14\sqrt{3}+4\sqrt{2}\,(2-\sqrt{3})}{27}$, *для любого* $x\in\mathbb{R}$.

Доказательство. Из леммы 2.11 следует, что для любого $x\in\mathbb{R}$ существуют последовательности $i_n,j_n\in\mathbb{N}$ и $k_n\in D_{i_n,j_n}$, такие, что $\lim\limits_{n\to\infty}i_n=+\infty$ и $S_{i_n,j_n}(h_x,k_n)>1+c$, $n\in\mathbb{N}$. Следовательно, из леммы 2.9 мы получим, что $\lim\limits_{n\to\infty}k_n=x$, поэтому

$$\varlimsup_{\substack{t\to x\\ i\to+\infty}} S_{i,j}(h_x,t)\geq 1+\frac{24-14\sqrt{3}+4\sqrt{2}\,(2-\sqrt{3})}{27},$$

для любого $x\in\mathbb{R}$.

Лемма 2.12. *Если* $i,j\in\mathbb{Z}$ *и* $t\in\mathbb{R}$, *то* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|K_{i,j}(t,s)|\,ds\leq 4\sqrt{3}$.

Доказательство. Пусть $2^it-j\in(n_1,n_2]$, где n_1 и n_2 последовательные точки из A_1. Тогда из следствии 1 следует что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|K_{i,j}(t,s)|\,ds=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}2^i\left|K_{0,0}\left(2^it-j,2^is-j\right)\right|ds=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|K_{0,0}\left(2^it-j,s\right)\right|ds$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{n\in A_1}\varphi_n\left(2^it-j\right)K_{0,0}(n,s)\right|ds=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\varphi_{n_1}\left(2^it-j\right)K_{0,0}(n_1,s)\right.$$

$$\left.+\varphi_{n_2}\left(2^it-j\right)K_{0,0}(n_2,s)\right|ds\leq\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(|K_{0,0}(n_1,s)|+|K_{0,0}(n_2,s)|\right)ds\leq 2\sqrt{3}+2\sqrt{3}=4\sqrt{3}.$$

Лемма 2.13. *Пусть* $x\in\mathbb{R}$, *а* g *ограниченная функция на* $\mathbb{R}$ *и непрерывна в точке* x. *Тогда* $\lim\limits_{\substack{t\to x\\ i\to+\infty}} S_{i,j}(g,t)=g(x)$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon' > 0$. Поскольку g непрерывна в точке x, то существует $\delta > 0$, для которой $|g(s) - g(x)| < \varepsilon'$, когда $|s - x| < \delta$. Мы также имеем, что существует $M > 0$, для которой $|g(s)| \leq M$, для любого $s \in \mathbb{R}$. Поскольку

$$S_{i,j}(g,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_{i,j}(t,s)\,g(s)\,ds \text{ и } \int_{-\infty}^{+\infty} K_{i,j}(t,s)\,ds = 1,$$

то из леммы 2.9 следует, что

$$|S_{i,j}(g,t) - g(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |K_{i,j}(t,s)|\,|g(s) - g(x)|\,ds = \int_{|s-x|<\delta} |K_{i,j}(t,s)|\,|g(s) - g(x)|\,ds$$

$$+ \int_{|s-x|\geq\delta} |K_{i,j}(t,s)|\,|g(s) - g(x)|\,ds \leq \varepsilon' \int_{|s-x|<\delta} |K_{i,j}(t,s)|\,ds$$

$$+2M \cdot \int_{|s-x|\geq\delta} |K_{i,j}(t,s)|\,ds \leq 4\sqrt{3}\varepsilon' + 2M \int_{|s-x|\geq\delta} |K_{i,j}(t,s)|.$$

Таким образом достаточно доказать, что $\lim\limits_{\substack{t\to x\\ i\to+\infty}} \int\limits_{|s-x|\geq\delta} |K_{i,j}(t,s)|\,ds = 0.$

Докажем, что $\lim\limits_{\substack{t\to x\\ i\to+\infty}} \int\limits_{-\infty}^{x-\delta} |K_{i,j}(t,s)|\,ds = 0$. Пусть $2^i t - j \in (b_{i,j}, c_{i,j}]$, где $b_{i,j}$ и $c_{i,j}$ последовательные точки из A_1. Обозначим через $d_{i,j}$, ту точку из A_1, для которой $2^i(x-\delta) - j$ принадлежит полуоткрытому слева интервалу, концами которого являются ближайшие от $d_{i,j}$ слева и справа нули функции $K_{0,0}(c_{i,j}, t)$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{x-\delta} |K_{i,j}(t,s)|\,ds = \int_{-\infty}^{2^i(x-\delta)-j} |K_{0,0}(2^i t - j, s)|\,ds = \int_{-\infty}^{2^i(x-\delta)-j} \left|\sum_{n\in A_1} \varphi_n(2^i t - j)\,K_{0,0}(n,s)\right| ds$$

$$= \int_{-\infty}^{2^i(x-\delta)-j} \left|\varphi_{b_{i,j}}(2^i t - j)\,K_{0,0}(b_{i,j}, s) + \varphi_{c_{i,j}}(2^i t - j)\,K_{0,0}(c_{i,j}, s)\right| ds$$

$$\leq \int_{-\infty}^{2^i(x-\delta)-j} \left(|K_{0,0}(b_{i,j}, s)| + |K_{0,0}(c_{i,j}, s)|\right) ds.$$

Пусть $|t - x| < \dfrac{\delta}{2}$. В этом случае

$$(2^i t - j) - 2^i(x-\delta) - j = 2^i(t - x + \delta) > 2^{i-1}\delta,$$

т.е. $\lim\limits_{i\to+\infty}\left(\left(2^i t-j\right)-2^i(x-\delta)-j\right)=+\infty$, следовательно,

$$\lim_{i\to+\infty}\left(b_{i,j}-d_{i,j}\right)=+\infty \text{ и } \lim_{i\to+\infty}\left(c_{i,j}-d_{i,j}\right)=+\infty.$$

Из следствия 2.1 вытекает, что

$$\int\limits_{-\infty}^{2^i(x-\delta)-j}\left|K_{0,0}\left(b_{i,j},s\right)\right|ds\le\sum_{\substack{m\in A_1\\ m\le d_{i,j}}}S_m\le\sum_{\substack{m\in A_1\\ m\le d_{i,j}}}\left|a_m\right|\le 2a_{d_{i,j}}\le\frac{4\sqrt{3}}{2^{b_{i,j}-d_{i,j}}}.$$

Поэтому из $\lim\limits_{i\to+\infty}\left(b_{i,j}-d_{i,j}\right)=+\infty$ следует, что

$$\lim_{\substack{t\to x\\ i\to+\infty}}\int\limits_{-\infty}^{2^i(x-\delta)-j}\left|K_{0,0}\left(b_{i,j},s\right)\right|ds=0.$$

Аналогично получим, что $\lim\limits_{\substack{t\to x\\ i\to+\infty}}\int\limits_{-\infty}^{2^i(x-\delta)-j}\left|K_{0,0}\left(c_{i,j},s\right)\right|ds=0$, т.е.

$$\lim_{\substack{t\to x\\ i\to+\infty}}\int\limits_{-\infty}^{x-\delta}\left|K_{i,j}(t,s)\right|ds=0.$$

Тем же методом можно доказать, что $\lim\limits_{\substack{t\to x\\ i\to+\infty}}\int\limits_{x+\delta}^{+\infty}\left|K_{i,j}(t,s)\right|ds=0$.

Доказательство теоремы 1.1. Обозначим: $f(t_0+)=d_1$ и $f(t_0-)=d_2$. Очевидно, что существует $\varepsilon>0$, для которой следующая функция ограничена на $\mathbb{R}$:

$$g(t)=\begin{cases}f(t)-h_{t_0}(t)\left(d_2-d_1\right), & t\in\left(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon\right)\setminus\{t_0\},\\ d_1, & t=t_0,\\ 0, & t\notin\left(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon\right).\end{cases}$$

Поскольку функция g непрерывна в точке t_0, то из леммы 2.13 получаем

$$\lim_{\substack{t\to t_0\\ i\to+\infty}}S_{i,j}(g,t)=g(t_0)=d_1.$$

Следовательно

$$\varlimsup_{\substack{t\to t_0\\ i\to+\infty}}S_{i,j}(f,t)=\begin{cases}d_1+\left(d_2-d_1\right)\varlimsup\limits_{\substack{t\to t_0\\ i\to+\infty}}S_{i,j}\left(h_{t_0},t\right), \text{ если, } d_2>d_1\\ d_1+\left(d_2-d_1\right)\varliminf\limits_{\substack{t\to t_0\\ i\to+\infty}}S_{i,j}\left(h_{t_0},t\right), \text{ если } d_2<d_1,\end{cases}$$

и

$$\lim_{\substack{t\to t_0\\ i\to+\infty}} S_{i,j}(f,t)=\begin{cases} d_1+(d_2-d_1)\varlimsup\limits_{\substack{t\to t_0\\ i\to+\infty}} S_{i,j}(h_{t_0},t), & \text{если } d_2<d_1\\ d_1+(d_2-d_1)\varliminf\limits_{\substack{t\to t_0\\ i\to+\infty}} S_{i,j}(h_{t_0},t), & \text{если } d_2>d_1.\end{cases}$$

Из определения функции Гиббса, из следствия 2.4 и из замечания 2.2 следует, что для почти всех $t_0\in\mathbb{R}$

$$G(t_0)=\max\left\{2\varlimsup_{\substack{t\to t_0\\ i\to+\infty}} S_n(h_{t_0},t)-1,-2\varliminf_{\substack{t\to t_0\\ i\to+\infty}} S_n(h_{t_0},t)+1\right\}=\frac{1+2\sqrt{3}}{3}.$$

Из леммы 2.4 следует, что $G(t_0)\le\dfrac{1+2\sqrt{3}}{3}$, для любого $t_0\in\mathbb{R}$, а из следствии 2.3 следует, что для любого $t_0\in\mathbb{R}$

$$G(t_0)\ge 2c-1=1+\frac{48-28\sqrt{3}+8\sqrt{2}\,(2-\sqrt{3})}{27}.$$

В заключение выражаю благодарность академику Г. Г. Геворкяну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Abstract. In this paper we study the Gibbs phenomenon for piecewise linear Stromberg wavelet. We prove that the Gibbs phenomenon for partial sums of Fourier-Stromberg series occurs at all points of $\mathbb{R}$ and the Gibbs function is almost everywhere equal to $\dfrac{1+2\sqrt{3}}{3}$.

Список литературы

[1] J. O. Stromberg, "A modified Franklin system and higher-order Spline systems on $\mathbb{R}^n$ as unconditional bases for Hardy spaces", Conf. on Harmonic Analyses in honor of A. Zygmund, II, 475 – 494 (1983).

[2] Н. К. Бари, Тригонометрические ряды, Физматгиз, Москва (1961).

[3] О. Г. Саргсян, "О сходимости и явлении Гиббса рядов Франклина", Изв. НАН Армении, математика, **31**, no. 1, 61 – 84 (1996).

[4] В. Г. Микаелян, "Явление Гиббса для общей системы Франклина", Изв. НАН Армении, математика, **52**, no. 4, 51 – 71 (2017).

[5] А. М. Зубакин, "Явление Гиббса для мультипликативных систем типа Уолша и типа Виленкина-Джафарли", Сиб. мат. журн., **12**, no. 1, 147 – 157 (1971).

[6] Л. А. Балашов, В. А. Скворцов, "Константы Гиббса для частичных сумм рядов Фурье-Уолша и их $(C,1)$-средних", Тр. МИАН СССР, **164**, 37 – 48 (1983).

[7] C. Karanikas, "Gibbs phenomenon in wavelet analysis", Results. Math., **34**, 330 – 341 (1998).

[8] S. E. Kelly, "Gibbs Phenomenon for Wavelets", Appl. Comput. Harmonic Anal., **3**, 72 – 81 (1996).

[9] Л. Кейперс, "Равномерное распределение последовательностей", Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. (1985).

Поступила 2 мая 2018

После доработки 25 августа 2018

Принята к публикации 15 сентября 2018