Известия НАН Армении, Математика, том 54, н. 2, 2019, стр. 54 – 64

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ МУЛЬТИАНИЗОТРОПНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Г. А. КАРАПЕТЯН, М. А. ХАЧАТУРЯН

Российско-Армянский университет[1]
E-mails: *garnik_karapetyan@yahoo.com, khmikayel@gmail.com*

Аннотация. Работа является продолжением предыдущих работ автора о теоремах вложения для функций, принадлежащих мультианизотропному пространству Соболева. Отличия от предыдущих работ, где изучаются случаи, когда показатель вложения меньше единицы, в этой работе изучается предельный случай, то есть когда показатель вложения равна единице.

MSC2010 number: 32Q40.

Ключевые слова: мультианизотропное пространство; интегральное представление; теорема вложения; мультипоикатор; усреднение функций.

1. Введение

При доказательстве всех теорем вложения (см. [1] – [7]) выделяются два случая. Первый случай, когда, показатель вложения меньше единицы; второй случай, когда показатель равен единице, то есть имеет место предельный случай. В предыдущих работах при доказательстве теорем вложения для функций из мультианизотропных пространств (см. [8] – [10]) изучали случай, когда показатель вложения меньше единицы. В данной работе доказываются теоремы вложения для мультианизотропных функциональных пространств в предельном случае.

Пусть $\mathbb{R}^n$ есть n-мерное евклидово пространство, а $\mathbb{Z}_+^n$ – множество мультииндексов из $\mathbb{R}^n$. Для $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $t > 0$ введем следующие обозначения: $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$, $t^\eta = (t^{\eta_1}, \ldots, t^{\eta_n})$, $D_k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}$ $(k = 1, \ldots, n)$; $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$ есть обобщенная производная по С.Л. Соболеву порядка α.

Для данного набора мультииндексов обозначим через $\mathfrak{N}$ наименьший выпуклый многогранник, содержащий все точки этого набора. Предположим, что многогранник $\mathfrak{N}$ есть вполне правильный многогранник, то есть имеет вершину в начале координат и на всех координатных осях, а внешние нормали всех $(n-1)$-мерных некоординатных граней имеют положительные компоненты. Через $\mathfrak{N}_i^{n-1}$

[1]Работа выполнена в рамках тематического финансирования РАУ из средств МОН РФ и при поддержке финансирования Государственным комитетом по науке Министерства образования и науки РА совместно с РФФИ (код проекта 18RF-004).

$(i = 1, \ldots, I_{n-1})$ обозначим $(n-1)$-мерные некоординатные грани многогранника $\mathfrak{N}$, а через $\partial'\mathfrak{N} = \cup_{i=1}^{I_{n-1}} \mathfrak{N}_i^{n-1}$. Также, пусть μ^i $(i = 1, \ldots, I_{n-1})$ есть такая внешняя нормаль грани $\mathfrak{N}_i^{n-1}$, что уравнение гиперплоскости, содержащей данную грань, задается формулой $(\alpha, \mu^i) = 1$ $(i = 1, \ldots, I_{n-1})$. Обозначим через α^i $(i = 1, \ldots, M)$ вершины (отличные от нуля) многогранника $\mathfrak{N}$. Для вполне правильного многогранника $\mathfrak{N}$ обозначим через $W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L_p(\mathbb{R}^n) : D^{\alpha^i} f \in L_p(\mathbb{R}^n), i = 1, \ldots, M\}$ и называем мультианизотропным пространством С.Л. Собольева. Заметим, что $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в $W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$ по норме

$$\|U\|_{W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{i=1}^{M} \left\| D^{\alpha^i} f \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Основным результатом данной работы является следующая предельная теорема о вложении для функций из мультианизотропного пространства $W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1.1. *Пусть для чисел p и q $(1 < p \le q < \infty)$ и мультииндекса $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$*

$$\chi = \max_{i=1,\ldots,I_{n-1}} \left((\beta, \mu^i) + |\mu^i| \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \right) = 1. \tag{1.1}$$

Тогда $D^\beta W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_q(\mathbb{R}^n)$, то есть любая функция $f \in W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$ имеет обобщенную производную $D^\beta f$, принадлежащую классу $L_q(\mathbb{R}^n)$, и для некоторых постоянных $C_1, C_2 > 0$ имеет место неравенство

$$\|D^\beta f\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \le C_1 \sum_{i=1}^{M} \left\| D^{\alpha^i} f \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + C_2 \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.2}$$

Замечание 1.1. *В случае, когда β принадлежит некоторой $(n-1)$-мерной грани, то есть если $\beta \in \partial'\mathfrak{N}$ (следовательно, $p = q$), то данная теорема получается также с многократным применением теоремы вложения для обобщенно однородных пространств (см. [11]).*

2. Усреднение и интегральное представление функций из мультианизотропного пространства

Пусть $\alpha^1, \ldots, \alpha^M$ – вершины вполне правильного многогранника $\mathfrak{N}$ (отличные от нуля), $\nu > 0$ есть произвольный параметр, а k – натуральное число. Обозначим через

$$P(\nu, \xi) = \left(\nu \xi^{\alpha^1}\right)^{2k} + \cdots + \left(\nu \xi^{\alpha^M}\right)^{2k}$$

мультианизотропный многочлен и с помощью $P(\nu, \xi)$ введем следующие функции:

$$G_0(\nu, \xi) = e^{-P(\nu,\xi)},$$

$$G_{1,j}(\nu, \xi) = (-2k) \left(\nu \xi^{\alpha^j}\right)^{2k-1} e^{-P(\nu,\xi)} \quad j = 1, \ldots, M,$$

а $\hat{G}_0(t,\nu)$, $\hat{G}_{1,j}(t,\nu)$ $(j=1,\dots,M)$ есть соответствующие преобразования Фурье для этих функций. Из вполне правильности многогранника $\mathfrak{N}$ следует, что все вышеуказанные функции принадлежат классу S Шварца — множеству быстро убывающих на бесконечности бесконечно дифференцируемых функций. Свойства функций $\hat{G}_0$, $\hat{G}_{1,j}$ $(j=1,\dots,M)$ изучены в работах [8]-[10].

В работах [8]-[10] для любой функции f было введено усреднение с мультианизотропным ядром $\hat{G}_0(t,\nu)$:

$$f_\nu(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t)\hat{G}_0(t-x,\nu)dt, \tag{2.1}$$

которое удовлетворяет обычным свойствам усреднения, то есть имеет место

Лемма 2.1. *(см. [10]) Пусть $f\in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$. Тогда $f_\nu\in L_p(\mathbb{R}^n)$, $\|f_\nu\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\to 0$ при $\nu\to\infty$ и $\lim\limits_{\nu\to 0}\|f_\nu-f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}=0$.*

С помощью усреднения (2.1), как и в работе [10], получим интегральное представление функций через мультианизотропные ядра $\hat{G}_{1,j}$ $(j=1,\dots,M)$.

Теорема 2.1. *(см. [10]) Пусть для функции f существуют производные $D^{\alpha^j}f$ $(j=1,\dots,M)$. Тогда почти для всех $x\in\mathbb{R}^n$ имеет место представление*

$$f(x)=f_h(x)+\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j=1}^{M}\int\limits_{\varepsilon}^{h}d\nu\int_{\mathbb{R}^n}D^{\alpha^j}f(t)\hat{G}_{1,j}(t-x,\nu)dt. \tag{2.2}$$

Дальнейшее доказательство основной теоремы опирается на интегральное представление (2.2).

3. Доказательство предельной теоремы вложения с помощью оценки мультианизотропных ядер

В этом параграфе мы докажем теорему вложения, применяя метод оценки мультианизотропных ядер $\hat{G}_{1,j}(t,\nu)$ $(j=1,\dots,M)$. Будем изучать случай не всех вполне правильных многогранников, а именно специальных многогранников $\mathfrak{N}$. Предположим, что многогранник $\mathfrak{N}$ имеет $(n-1)$-мерные грани, содержащие точки $\{\alpha^1,\dots,\alpha^n\}\backslash\{\alpha^i\}$ $(i=1,\dots,n)$, где $\alpha^i=(0,0,\dots,l_i,\dots,0,0)$. Внешнюю нормаль данной грани обозначим через μ^i $(i=1,\dots,n)$ и пусть $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ — точка пересечения гиперплоскостей, содержащих $(n-1)$-мерные грани с внешними нормалями $\mu^1,\mu^2,\dots,\mu^n$. Пусть $\gamma_1<\gamma_2<\dots<\gamma_n$. Как и в работе [9], построим систему n векторов $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$, $m=(m_1,\dots,m_{n-1},0)$, …, $\sigma=(\sigma_1,0,\dots,0)$. Тогда имеют место частные случаи лемм 2.1, 2.2 работы [9].

Лемма 3.1. *Для любого мультииндекса $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)$ существует постоянное число $C=C(\mathfrak{N},N)>0$, что для любого ν : $0<\nu<1$ справедливо* *неравенство*

$$\left|D^{\beta}\hat{G}_k(t,\nu)\right| \le C\nu^{-\max\limits_{i=1,\dots,I_{n-1}}\left(|\mu^i|+(\beta,\mu^i)\right)} \cdot \frac{1}{1+\nu^{-N}(t^{N\gamma}+t^{Nm}\dots t_1^{N\sigma_1})},$$

где N – любое натуральное число, для которого векторы $N\gamma$, Nm, $\dots$, $N\sigma$ имеют четные координаты, а индекс $k=0$ или $k=1,j$ $(j=1,\dots,M)$.

Лемма 3.2. *Существует такое число N_0, что для любого $N \ge N_0$ существует постоянная $C=C(N)$, что для любого $\nu : 0<\nu<1$ имеет место неравенство*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dt_1\dots dt_n}{1+\nu^{-N}(t^{N\gamma}+t^{Nm}\dots t_1^{N\sigma_1})} \le C\nu^{|\mu^1|}.$$

Теорема 3.1. *Пусть числа p и q $(1<p\le q<\infty)$ и мультииндекс β такие, что*

$$\chi = \max_{i=1,\dots,I_{n-1}}\left(|\mu^i|+(\beta,\mu^i)\right) - |\mu^1|\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)=1.$$

Тогда $D^{\beta}W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_q(\mathbb{R}^n)$ и имеет место неравенство (1.2).

Доказательство. Пусть $1<p<\infty$, тогда по интегральному представлению (2.1), имеем, что

$$D^{\beta}f_{\varepsilon}(x)-D^{\beta}f_h(x)=\sum_{j=1}^{M}\int\limits_{\varepsilon}^{h}d\nu\int\limits_{\mathbb{R}^n}D^{\alpha^j}f(t)D^{\beta}\hat{G}_{1,j}(t-x,\nu)dt.$$

Обозначим $x=(\overline{x},x_n)=(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)$ и, применим неравенство Юнга для $\overline{x}$ при фиксированном x_n, получим

$$\left\|D^{\beta}f_{\varepsilon}(\cdot,x_n)-D^{\beta}f_h(\cdot,x_n)\right\|_{L_q(\mathbb{R}^{n-1})} \le$$

$$\sum_{j=1}^{M}\int\limits_{\varepsilon}^{h}d\nu\int\limits_{\mathbb{R}^1}\left\|D^{\beta}\hat{G}_{1,j}(\cdot,t_n,\nu)\right\|_{L_r(\mathbb{R}^{n-1})}\left\|D^{\alpha^j}f(\cdot,x_n+t_n)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-1})}dt_n,$$

где $r=1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$.

Применяя лемму 3.1 и тот факт, что $\chi=1$, отсюда имеем

$$\left\|D^{\beta}f_{\varepsilon}(\cdot,x_n)-D^{\beta}f_h(\cdot,x_n)\right\|_{L_q(\mathbb{R}^{n-1})} \le \sum_{j=1}^{M}\int\limits_{\varepsilon}^{h}\nu^{-\max\limits_i\left(|\mu^i|+(\beta,\mu^i)\right)}d\nu$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^1}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{dt_1\dots dt_{n-1}}{\left(1+\nu^{-N}\left(t_1^{N\gamma_1}\dots t_n^{N\gamma_n}+t_1^{Nm_1}\dots t_{n-1}^{Nm_{n-1}}+\dots+t_1^{N\sigma_1}\right)\right)^r}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\times\left\|D^{\alpha^j}f(\cdot,x_n+t_n)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-1})}dt_n=\sum_{j=1}^{M}\int\limits_{\varepsilon}^{h}\nu^{-1-|\mu^1|\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}d\nu\left\|D^{\alpha^j}f(\cdot,x_n+t_n)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^1} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dt_1 \dots dt_{n-1}}{\left(1 + \nu^{-N}\left(t_1^{N\gamma_1} \dots t_n^{N\gamma_n} + t_1^{Nm_1} \dots t_{n-1}^{Nm_{n-1}} + \dots + t_1^{N\sigma_1}\right)\right)^r} \right)^{\frac{1}{r}} dt_n.$$

После преобразования $\tau_1 = \nu^{\mu_1^1} t_1, \dots, \tau_{n-1} = \nu_{n-1}^1 t_{n-1}$, в первом интеграле получим

$$\left\| D^\beta f_\varepsilon(\cdot, x_n) - D^\beta f_h(\cdot, x_n) \right\|_{L_q(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \sum_{j=1}^{M} \int\limits_{\varepsilon}^{h} \nu^{-1-|\mu^1|\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)+\left(\mu_1^1+\dots+\mu_1^{n-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} d\nu$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^1} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{d\tau_1 \dots d\tau_{n-1}}{\left(1 + \tau_1^{N\gamma_1} \dots \tau_{n-1}^{N\gamma_{n-1}} \nu^{-N\gamma_n \mu_n^1} t_n^{N\gamma_n} + \tau_1^{Nm_1} \dots \tau_{n-1}^{Nm_{n-1}} + \dots + \tau_1^{N\sigma_1}\right)^r} \right)^{\frac{1}{r}} \cdot$$

$$\left\| D^{\alpha^j} f(\cdot, x_n + t_n) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-1})} dt_n.$$

Рассмотрим выражение

$$A = \int\limits_{\varepsilon}^{h} \nu^{-1-\frac{\mu_n^1}{r}}$$

$$\times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{d\tau_1 \dots d\tau_{n-1}}{\left(1 + \tau_1^{N\gamma_1} \dots \tau_{n-1}^{N\gamma_{n-1}} \nu^{-N\gamma_n \mu_n^1} t_n^{N\gamma_n} + \tau_1^{Nm_1} \dots \tau_{n-1}^{Nm_{n-1}} + \dots + \tau_1^{N\sigma_1}\right)^r} \right)^{\frac{1}{r}} d\nu,$$

где $\frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Обозначим $\left(\frac{|t_n|}{\nu^{\mu_n^1}}\right)^{\frac{1}{r}} = \mu$. Тогда $d\mu = -\frac{\mu_n^1}{r}|t_n|^{\frac{1}{r}} \nu^{-1-\frac{\mu_n^1}{r}} d\nu$, и интеграл A примет вид

$$A \leq \frac{1}{|t_n|^{\frac{1}{r}}} \int\limits_{0}^{\infty} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{d\tau_1 \dots d\tau_{n-1}}{\left(1 + \tau_1^{N\gamma_1} \dots \tau_{n-1}^{N\gamma_{n-1}} \mu^{rN\gamma_n} + \tau_1^{Nm_1} \dots \tau_{n-1}^{Nm_{n-1}} + \dots + \tau_1^{N\sigma_1}\right)^r} \right)^{\frac{1}{r}} d\mu$$

$$= A_1 + A_2,$$

где в интеграле A_1 интегрирование по μ проводится от 0 до 1, а в интеграле A_2 – от 1 до ∞. Для A_1 имеем

$$A_1 \leq \frac{1}{|t_n|^{\frac{1}{r}}} \int\limits_{0}^{1} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{d\tau_1 \dots d\tau_{n-1}}{\left(1 + \tau_1^{Nm_1} \dots \tau_{n-1}^{Nm_{n-1}} + \dots + \tau_1^{N\sigma_1}\right)^r} \right)^{\frac{1}{r}} d\mu \leq \frac{C}{|t_n|^{\frac{1}{r}}}.$$

После замены переменной $\tau_{n-1} \cdot \mu^{r\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}} = \eta_{n-1}$, для A_2 имеем

$$A_2 \leq \frac{1}{|t_n|^{\frac{1}{r}}} \times$$

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{\mu^{\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{d\tau_1 \ldots d\tau_{n-2} d\eta_{n-1}}{(1+\tau_1^{N\gamma_1} \ldots \tau_{n-2}^{N\gamma_{n-2}} \eta_{n-1}^{N\gamma_{n-1}} + \tau_1^{Nl_1} \ldots \tau_{n-2}^{Nl_{n-2}} + \cdots + \tau_1^{N\sigma_1})^r} \right)^{\frac{1}{r}} d\mu$$

$$\leq \frac{C}{|t_n|^{\frac{1}{r}}},$$

так как $\gamma_n > \gamma_{n-1}$. Следовательно, для некоторой постоянной $C > 0$ $A \leq \frac{C}{|t_n|^{\frac{1}{r}}}$, то есть имеем

$$\left\| D^\beta f_\varepsilon(\cdot, x_n) - D^\beta f_h(\cdot, x_n) \right\|_{L_q(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C \sum_{j=1}^M \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{\left\| D^{\alpha^j} f(\cdot, x_n + t_n) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-1})}}{|t_n|^{\frac{1}{r}}} dt_n.$$

В левой части последнего неравенства для каждого слагаемого по x_n применяя неравенство Харди-Литтлвуда (см. [11] стр. 31, § 2.19), имеем

$$\left\| D^\beta f_\varepsilon(x) - D^\beta f_h(x) \right\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq$$

(3.1)

$$C \sum_{j=1}^M \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} \left(\frac{1}{|t_n|^{\frac{1}{r}}} \left\| D^{\alpha^j} f(\cdot, x_n + t_n) \right\|_{L_p(\mathbb{R}^{n-1})} dt_n \right)^{\frac{1}{q}} dx_n \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \sum_{j=1}^M \left\| D^{\alpha^j} f \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Пусть $h_0 < 1$ фиксированное число, а $\varepsilon : 0 < \varepsilon < h_0$. Тогда для последовательности $\{f_\varepsilon(x)\}$ имеем

$$\left\| D^\beta f_\varepsilon \right\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq \left\| D^\beta f_\varepsilon - D^\beta f_{h_0} \right\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} + \left\| D^\beta f_{h_0} \right\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq$$

$$C \sum_{j=1}^M \left\| D^{\alpha^j} f \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \left\| D^\beta f_{h_0} \right\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}.$$

Оценим $\left\| D^\beta f_{h_0} \right\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}$. Из усреднения (2.1) имеем

$$D^\beta f_{h_0}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t) D^\beta \hat{G}_0(t - x, h_0) dt.$$

Так как $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, то, применяя неравенство Юнга, получим

$$\left\| D^\beta f_{h_0} \right\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \cdot \left\| D^\beta G_0(\cdot, h_0) \right\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}.$$

Из лемм 3.1, 3.2 для второго множителя получим следующую оценку

$$\left\| D^\beta G_0(\cdot, h_0) \right\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq$$

$$h_0^{-\max\limits_{i=1,\ldots,I_{n-1}} (|\mu^i| + (\beta, \mu^i))} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dt_1 \ldots dt_n}{\left((1 + h_0^{-N}(t^{N\gamma} + \cdots + t^{Nm} + \cdots + t_1^{N\sigma_1})) \right)^q} \right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$h_0^{-\max\limits_{i=1,\ldots,I_{n-1}} (|\mu^i| + (\beta, \mu^i)) + |\mu^1|} C \leq C(N, h_0)$$

при любых $N \geq N_0$. То есть для фиксированного h_0 и $N \geq N_0$ имеем, что

$$\left\|D^\beta f_{h_0}\right\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.2}$$

Из неравенств (3.1) и (3.2) следует, что последовательность (по ε) $\{D^\beta f_\varepsilon(x)\}$ ограничена в $L_q(\mathbb{R}^n)$ при всех достаточно малых ε $(0 < \varepsilon < h_0)$. А из слабой компактности ограниченного множества следует существование обобщенной производной $D^\beta f \in L_q(\mathbb{R}^n)$ и

$$\left\|D^\beta f\right\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\left\|D^\beta f_\varepsilon\right\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}.$$

Отсюда, еще раз применив неравенства (3.1) и (3.2), получим, что

$$\left\|D^\beta f\right\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq C_1\sum_{j=1}^{M}\left\|D^{\alpha^j} f\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + C_2\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \tag{3.3}$$

для некоторых постоянных $C_1, C_2 > 0$. □

4. Доказательство основной теоремы методом теории мультипликаторов

В этом параграфе докажем основную теорему 1.1, применяя метод мультипликаторов. Заметим, что теорема 1.1 обобщает также теорему 3.1. Для этого напомним теорему о мультипликаторах П.И. Лизоркина (см. [13]).

Определение 4.1. *(см. [13]) Ограниченная измеримая на $\mathbb{R}^n$ функция называется (L_p, L_q)-мультипликатором, если существует постоянное число $C = C(p,q)$, что для любой бесконечно дифференцируемой финитной функции f имеет место неравенство*

$$\left\|\widetilde{\mu\hat{f}}\right\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

где $\hat{f}$ – преобразование Фурье функции f, а $\tilde{f}$ – обратное преобразование Фурье.

Множество (L_p, L_q) мультипликаторов обозначим через M_p^q.

Теорема 4.1. *(П.И. Лизоркина о мультипликаторах, см. [13]) Пусть вектор $\overline{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ имеет координаты 0 или 1. Носителем вектора $\overline{k}$ называем множество $e_{\overline{k}} = \{j_1, \ldots, j_m\}$ тех индексов j, для которых $k_j = 1$ и пусть функция $\mu(\xi)$ задана на $\mathbb{R}^n$. Если для любого вектора k производная $D^k\mu(\xi)$ существует и непрерывна в любой точке $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, где $\xi_i \neq 0$ при $i \in e_{\overline{k}}$ и подчиняется неравенству*

$$\left|\,|\xi_1|^{k_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\ldots|\xi_n|^{k_n+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}}{\partial\xi_1^{k_1}\ldots\partial\xi_n^{k_n}}\mu(\xi)\right| \leq L \tag{4.1}$$

для некоторой постоянной $L > 0$, *тогда* $\mu \in M_p^q$, *то есть существует не зависящее от* L *и* f *постоянная* $C = C(p,q)$, *что*

$$\left\| \widehat{\mu(\xi)\hat{f}(\xi)} \right\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \le CL\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

для всех $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ $(1 < p \le q < \infty)$.

Доказательство основной теоремы 1.1. Сперва докажем случай, когда $\beta \in \partial'\mathfrak{N}$, то есть для некоторого i_0 $(i_0 = 1,\dots,I_{n-1})$ $(\beta,\mu^{i_0}) = 1$ (следовательно, $q = p$) и $(\beta,\mu^i) \le 1$ для любого $i = 1,\dots,I_{n-1}$. Из представления (2.2) и из полноты $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ в $W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$ имеем, что почти для всех $x \in \mathbb{R}^n$

$$D^\beta f_\varepsilon(x) - D^\beta f_h(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \sum_{j=1}^{M} \int_\varepsilon^h d\nu \cdot$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} D^{\alpha^j} f(t) \int_{\mathbb{R}^n} \xi^\beta e^{-i(t-x,\xi)}(-2k)\left(\nu\xi^{\alpha^j}\right)^{2k-1} e^{-\left(\left(\nu\xi^{\alpha^1}\right)^{2k}+\dots+\left(\nu\xi^{\alpha^M}\right)^{2k}\right)} d\xi dt =$$

$$\sum_{j=1}^{M} \int_\varepsilon^h d\nu \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{D^{\alpha^j} f(\xi)} \xi^\beta e^{i(x,\xi)}(-2k)\left(\nu\xi^{\alpha^j}\right)^{2k-1} e^{-\left(\left(\nu\xi^{\alpha^1}\right)^{2k}+\dots+\left(\nu\xi^{\alpha^M}\right)^{2k}\right)} d\xi.$$

В последнем интеграле мы применили теорему Фубини. Отсюда имеем, что

$$D^\beta f_\varepsilon(x) - D^\beta f_h(x) = \sum_{j=1}^{M} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{D^{\alpha^j} f(\xi)} F_{j,\varepsilon,h}(\xi) e^{i(x,\xi)} d\xi = \sum_{j=1}^{M} \widetilde{F_{j,\varepsilon,h}(\xi)\widehat{D^{\alpha^j} f(\xi)}}, \tag{4.2}$$

где

$$F_{j,\varepsilon,h}(\xi) = \xi^\beta \int_\varepsilon^h (-2k)\left(\nu\xi^{\alpha^j}\right)^{2k-1} e^{-((\nu\xi^{\alpha^1})^{2k}+\dots+(\nu\xi^{\alpha^M})^{2k})} d\nu. \tag{4.3}$$

Так как $D^{\alpha^j} f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ $(j = 1,\dots,M)$, то если докажем, что для любого $j = 1,\dots,M$ функция $F_{j,\varepsilon,h}(\xi)$ является (L_p, L_p)-мультипликатором, который со своими производными $D^k F_{j,\varepsilon,h}(\xi)$ равномерно ограничен по ε и h, следовательно, получим, что для некоторой постоянной $C > 0$ имеет место неравенство

$$\left\|D^\beta f_\varepsilon(x) - D^\beta f_h(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le C \sum_{j=1}^{M} \left\| D^{\alpha^j} f \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.4}$$

Для этого применим теорему П. И. Лизоркина для функции $F_{j,\varepsilon,h}(\xi)$. Обозначим через $\rho_{\mathfrak{N}}(\xi) = \left(\xi^{2\alpha^1} + \dots + \xi^{2\alpha^M}\right)^{1/2}$ и назовем мультианизотропным расстоянием. Имеем

$$F_{j,\varepsilon,h}(\xi) = \frac{(-2k)\xi^\beta \left(\xi^{\alpha^j}\right)^{2k-1}}{(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{2k}} \int_\varepsilon^h (\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{2k-1} e^{-\nu^{2k}\left(\xi^{2k\alpha^1}+\dots+\xi^{2k\alpha^M}\right)} \rho_{\mathfrak{N}}(\xi) d\nu = A_1 A_2.$$

Так как произведение (L_p, L_p)-мультипликаторов также является (L_p, L_p) - мультипликатором, докажем, что каждый из множителей есть (L_p, L_p)-мультипликатор, который ограничен по ξ, ε, h. То, что при $\beta \in \partial'\mathfrak{N}$ и α^j $(j = 1, \ldots, M)$ – вершины многогранника $\mathfrak{N}$ $A_1 = \frac{\xi^{\beta}\left(\xi^{\alpha^j}\right)^{2k-1}}{(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{2k}}$ является (L_p, L_p)-мультипликатором доказано в работе [14] Г.Г. Казаряна. Оценим второй множитель. Заметим, что выражение $\xi^{2k\alpha^1} + \cdots + \xi^{2k\alpha^M}$ эквивалентно выражению $(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{2k}$, то есть для некоторых положительных постоянных a_1 и a_2

$$a_1(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{2k} \leq \xi^{2k\alpha^1} + \cdots + \xi^{2k\alpha^M} \leq a_2(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{2k},$$

следовательно, для второго множителя имеем

$$A_2 = \int\limits_{\varepsilon}^{h} (\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{2k-1} e^{-\nu^{2k}\left(\xi^{2k\alpha^1}+\cdots+\xi^{2k\alpha^M}\right)} \rho_{\mathfrak{N}}(\xi) d\nu \leq$$

$$\int\limits_{\varepsilon}^{h} (\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{2k-1} e^{-a_1(\nu\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{2k}} \rho_{\mathfrak{N}}(\xi) d\nu.$$

После замены переменной $\rho_{\mathfrak{N}}(\xi)\nu = t$ имеем, что

$$A_2 \leq \int\limits_{\varepsilon\rho_{\mathfrak{N}}(\xi)}^{h\rho_{\mathfrak{N}}(\xi)} t^{2k-1} e^{-a_1 t^{2k}} dt \leq \int\limits_{0}^{\infty} t^{2k-1} e^{-a_1 t^{2k}} dt \leq L.$$

Оценим производные функции $F_{j,\varepsilon,h}(\xi)$. Для этого достаточно оценить производные второго множителя. Пусть вектор $\overline{k} = (1, 0, \ldots, 0)$. Имеем

$$\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} A_2 =$$

$$\xi_1 \int\limits_{\varepsilon}^{h} \nu^{2k-1} (\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{2k-1} k \frac{\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\xi^{2\alpha^1} + \cdots + \xi^{2\alpha^M}\right)}{\rho_{\mathfrak{N}}^2(\xi)} \rho_{\mathfrak{N}}(\xi) e^{-\nu^{2k}\left(\xi^{2k\alpha^1}+\cdots+\xi^{2k\alpha^M}\right)} d\nu +$$

$$\xi_1 \int\limits_{\varepsilon}^{h} \nu^{2k-1} (\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{2k} e^{-\nu^{2k}\left(\xi^{2k\alpha^1}+\cdots+\xi^{2k\alpha^M}\right)} (-\nu^{2k}) \frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\xi^{2k\alpha^1} + \cdots + \xi^{2k\alpha^M}\right) d\nu := B_1 + B_2.$$

B_1 оценивается аналогично как A_2, с учетом того, что

$$\left| \xi_1 \frac{\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\xi^{2\alpha^1} + \cdots + \xi^{2\alpha^M}\right)}{\rho_{\mathfrak{N}}^2(\xi)} \right| \leq C.$$

Для оценки B_2 нужно учесть, что

$$\left| \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\xi^{2k\alpha^1} + \cdots + \xi^{2k\alpha^M}\right) \right| \leq C(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^{2k}.$$

Аналогично оцениваются другие случаи вектора $\overline{k} = (k_1, \dots, k_n)$, где $k_j = 0$ или 1 $(j = 1, \dots, n)$. Тем самым доказано, что функция $F_{j,\varepsilon,h}(\xi)$ при $\beta \in \partial'\mathfrak{N}$ является (L_p, L_p)-мультипликатором, не зависящим от ε и h, следовательно, при $\beta \in \partial'\mathfrak{N}$ неравенство (4.4) доказано. Пусть теперь $\beta \in \mathfrak{N}\backslash\partial'\mathfrak{N}$, следовательно, $p < q$. Докажем, что $F_{j,\varepsilon,h}(\xi) \in M_p^q$, то есть является (L_p, L_q)-мультипликатором. Так как умножение M_p^q мультипликатора на M_p^p мультипликатор является M_p^q мультипликатором, то по теореме П.И. Лизоркина достаточно доказать, что A_1 является M_p^q мультипликатором. А для этого достаточно доказать, что $\frac{\xi^\beta}{\rho_{\mathfrak{N}}(\xi)}$ является M_p^q мультипликатором.

Проверим условие (4.1) при $\overline{k} = (0, \dots, 0)$, то есть докажем, что

$$\left|\frac{|\xi_1|^{\beta_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \dots |\xi_n|^{\beta_n+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}{\rho_{\mathfrak{N}}(\xi)}\right| \leq L.$$

Пусть условие (1.1) выполняется для некоторого i_0, то есть вектор $\sigma = \left(\beta_1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \dots, \beta_n + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ принадлежит гиперплоскости с внешней нормалью $\mu^{i_0} : (\sigma, \mu^{i_0}) = 1$ и $(\sigma, \mu^i) \leq 1$ $(i = 1, \dots, I_{n-1})$, следовательно, точка σ принадлежит грани с внешней нормалью μ^{i_0} и $|\xi^\sigma|$ оценивается через $\left(\sum\limits_j \xi^{2\alpha^j}\right)^{\frac{1}{2}}$, где α^j – вершины $(n-1)$-мерной грани с внешней нормалью μ^{i_0}. Пусть теперь $\overline{k} \neq (0, 0, \dots, 0)$. Достаточно изучать случай, когда $\overline{k} = (1, 0, \dots, 0)$. Имеем

$$\left||\xi_1|^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}|\xi_2|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \dots |\xi_n|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\xi^\beta}{\rho_{\mathfrak{N}}(\xi)}\right)\right|$$

$$= \left||\xi_1|^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}|\xi_2|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \dots |\xi_n|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \frac{\beta_1\xi_1^{\beta_1-1}\xi_2^{\beta_2}\dots\xi_n^{\beta_n}}{\rho_{\mathfrak{N}}(\xi)}\right.$$

$$\left. - |\xi_1|^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}|\xi_2|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \dots |\xi_n|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \frac{\xi^\beta \frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\xi^{2\alpha^1} + \dots + \xi^{2\alpha^M}\right)}{2(\rho_{\mathfrak{N}}(\xi))^3}\right|$$

$$\leq C_1 \left|\frac{|\xi_1|^{\beta_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \dots |\xi_n|^{\beta_n+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}{\rho_{\mathfrak{N}}(\xi)}\right|$$

$$+ C_2 \left|\frac{|\xi_1|^{\beta_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \dots |\xi_n|^{\beta_n+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}{\rho_{\mathfrak{N}}(\xi)}\right| \cdot \left|\frac{\xi_1 \frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\xi^{2\alpha^1} + \dots + \xi^{2\alpha^M}\right)}{\rho_{\mathfrak{N}}^2(\xi)}\right| \leq L.$$

Остальные производные оцениваются аналогичным образом. Следовательно, для любых p, q, β, удовлетворяющие соотношению (1.1), имеет место неравенство

$$\left\|D^\beta f_\varepsilon - D^\beta f_h\right\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq C \sum_{j=1}^{M} \left\|D^{\alpha^j} f\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

для любых ε, $h : 0 < \varepsilon < h < 1$, то есть получили неравенство (3.1). Остальные рассуждения проводятся как и при доказательстве теоремы 3.1.

Abstract. The present paper is a continuation of the author's previous papers devoted to the study of embedding theorems for functions belonging to Sobolev multianisotropic spaces. In the previous papers were considered the cases when the embedding index is less than one, while the present paper concerns the limiting case, that is, when the embedding index is equal to one.

Список литературы

[1] С. Л. Соболев, "Об одной теореме функционального анализа", Мат. сборник, 4(36):3, 471 – 497 (1938).

[2] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, ЛГУ, Новосибирск (1962).

[3] С. М. Никольский, Об одной задаче С. Л. Соболева, Сиб. мат. журнал **3**, no. 6, 845 – 857 (1962).

[4] K. T. Smith, "Inequalities for formally positive integro-differential forms", Bull. Amer. Math., 368 – 370 (1961).

[5] В. П. Ильин, "Интегральные представления дифференцируемых функций и их применение к вопросам продолжения функций классов $W_p^l(G)$", Сиб. Мат. Журн., 8, no. 3, 573 – 586 (1967).

[6] О. В. Бесов, "О коэрцитивности в неизотропном пространстве С. Л. Соболева", Мат. сб. **73**(115), no. 4, 585 – 599 (1967).

[7] Ю. Г. Решчтняк, "Некоторые интегральные представления дифференцируемых функций", Сиб. мат. журнал, **12** no. 2, 420 – 432 (1971).

[8] G. A. Karapetyan, "Integral representation of functions and embedding theorems for multianisotropic spaces for the three-dimensional case", Eurasian Mathematical Journal, ISSN, **7**, no. 4, 19 – 39 (2016).

[9] Г. А. Карапетян, "Интегральное представление и теоремы вложения для n-мерных мультианизотропных пространств с одной вершиной анизотропности", Сиб. мат. журнал, **58**, no. 3, 445 – 460 (2017).

[10] G. A. Karapetyan, M. K. Arakelian, "Embedding theorems for general multianisotropic spaces", Мат. Заметки, **104**, no. 3, 422 – 438 (2018).

[11] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., Наука, (1975).

[12] С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Наука (1977).

[13] П. И. Лизоркин, "(L_p, L_q) мультипликаторы интегралов Фурье", ДАН СССР, **152**, 808 – 811 (1963).

[14] Г. Г. Казарян, "Операторы постоянной силы и оценки снизу через производных и формально гипоэллиптические операторы", Anal. Math., **3**, 263 – 289 (1977).

Поступила 15 июня 2018

После доработки 25 октября 2018

Принята к публикации 20 декабря 2018