Известия НАН Армении, Математика, том 54, н. 2, 2019, стр. 37 – 42

О КВАЗИ-ГРИДИ КОНСТАНТАХ ДЛЯ ПОДСИСТЕМ СИСТЕМЫ ХААРА В $L^1(0,1)$

С. ГОГЯН, Н. СРАПИОНЯН

Институт Математики НАН Армении, Ереванский Государственный Университет[1]
E-mails: gogyan@instmath.sci.am, nerses.srapionyan@gmail.com

Аннотация. В данной работе исследуется значение квази-гриди константы для квази-гриди подсистем системы Хаара в $L^1(0,1)$. В работе [4] были описаны все подсистемы системы Хаара, которые являются квази-гриди системами в $L^1(0,1)$. В описании подсистем используется длина цепей в подсистеме, введенная в [5]. В [4] была получена оценка $G(H) \leq C \cdot 2^H$, где H длина самой длинной цепи в подсистеме. В данной работе мы улучшаем эту оценку и показываем, что $\frac{H}{16} \leq G(H) \leq 2H+1$.

MSC2010 number: 41A65, 46B20.

Ключевые слова: подсистема Хаара; квази-гриди константа; жадный алгоритм в $L^1(0,1)$.

1. Введение

Для нормированного базиса $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{+\infty}$ в Банаховом пространстве X и для любого $f \in X$ имеем разложение

$$f = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(f,\Psi)\psi_k, \tag{1.1}$$

где $\lim c_k(f,\Psi) = 0$. Положим $\Lambda_0 = \emptyset$ и индуктивным образом определим множества натуральных чисел Λ_m удовлетворяющие условиям $|\Lambda_m| = m$, $\Lambda_{m-1} \subset \Lambda_m$, а также

$$\min_{k\in\Lambda_m} | c_k(f,\Psi) | \geq \max_{k\notin\Lambda_m} | c_k(f,\Psi) | .$$

В определении множеств Λ_m нет однозначности, но в рамках наших рассуждений это обстоятельство не является существенным. Функция

$$G_m(f) = \sum_{k\in\Lambda_m} c_k(f,\Psi)\psi_k.$$

называется m-членным жадным аппроксимантом функции f по системе Ψ. (см. [6] и [7] для подробностей). Для безусловного базиса Ψ имеем, что

$$\|G_m(f)\| \leq C \cdot \|f\| \tag{1.2}$$

где константа C не зависит от f и m.

---

[1]Работа выполнена при финансовой ГКН МОН РА в рамках научного проекта 18-1A081.

Определение 1.1. *Базис* $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *называется квази-гриди базисом в* X, *если существует постоянная* C *такая, что для любых* $f \in X$ *и* $m \in \mathbb{N}$ *выполняется неравенство* (1.2). *Наименьшее значение* C, *при котором выполняется это неравенство, называется квази-гриди постоянной системы* Ψ.

В [4] была доказана следующая теорема.

Теорема А. *Нормированный базис* Ψ *является квази-гриди базисом тогда и только тогда, когда существует число* $C \geq 1$ *такое, что для любых* $m \geq 1$ *и* $f \in X$ *имеет место соотношение* (1.2).

В [1] было доказано, что существует квази-гриди базис в $L^1(0,1)$. Система Хаара является безусловным базисом в $L^p(0,1)$, $1 < p < \infty$, но не является квази-гриди базисом в $L^1(0,1)$ (см. [2]). Все квази-гриди подсистемы системы Хаара в $L^1(0,1)$ были описаны в [4]. Теперь напомним определение системы Хаара. Пусть $\Delta_1 = \Delta_0^{(0)} = [0,1]$. Интервалы

$$\Delta_{2^i+j} = \Delta_i^{(j)} = \left[\frac{j-1}{2^i}, \frac{j}{2^i}\right),$$

при $j = 1, 2, \ldots, 2^i$ и $i = 0, 1, 2, \ldots$ называются двоичными интервалами. Множество всех двоичных интервалов обозначим через $\mathfrak{D}$. Каждый двоичный интервал является объединением двух двоичных интервалов, а именно $\Delta_n = \Delta_{2n-1} \cup \Delta_{2n}$. Эти два интервала назовем соответственно левыми и правыми половинами интервала Δ_n. Любому двоичному интервалу $\Delta_n, n \geq 2$ соответствует одна функция системы Хаара, а именно

$$h_n(t) = h_i^{(j)}(t) = h_{\Delta_n(t)} = \begin{cases} 2^i, & t \in \Delta_{2n-1}, \\ -2^i, & t \in \Delta_{2n}, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Также положим $h_1 = h_{\Delta_1} \equiv 1$. Множество функций $H = \{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется системой Хаара. Для любого $f \in L^1(0,1)$ коэффициенты разложения $c_n(f, H)$ вычисляются согласно формулам

$$c_1(f,H) = c_{\Delta_1}(f,H) = \int_{[0,1]} f \tag{1.3}$$

и

$$c_n(f,H) = c_{\Delta_1}(f,H) = \int_{\Delta_{2n-1}} f - \int_{\Delta_{2n}} f, \qquad n \geq 2 \tag{1.4}$$

Мы будем использовать свойство монотонности системы Хаара в $L^1(0,1)$, т. е. для любых натуральных m и n, с $m \geq n$ выполняется неравенство

$$\|S_m(f)\| \geq \|S_n(f)\|, \tag{1.5}$$

где $S_k(f) = \sum_{i=1}^k c_i(f)h_i$. Для множества $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \subset \mathfrak{D}$ обозначим $H_{\mathcal{A}} = \{h_J\}_{J\in\mathcal{A}}$ и $L_{\mathcal{A}} = \overline{span(H_{\mathcal{A}})}$, где замыкание берется по норме $L^1(0,1)$. Через $H(\mathcal{A})$ длину самой длинной цепи в $\mathcal{A}$ (см. [5]). Следующая теорема была доказана в [4].

Теорема 1.1. *Для множества $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ подсистема Хаара $H_{\mathcal{A}}$ будет квази-гриди базисом в $L_{\mathcal{A}}$ тогда и только тогда, когда $H(\mathcal{A}) < +\infty$. Более того, для любого $m \in \mathbb{N}$ и $f \in L_{\mathcal{A}}$ имеет место $\|G_m(f)\| \leq 2^{H(\mathcal{A})}\|f\|$.*

В этой работе мы улучшаем эту оценку для квази-гриди константы системы $H_{\mathcal{A}}$.

Теорема 1.2. *Пусть подсистема системы Хаара $H_{\mathcal{A}}$ является квази-гриди базисом в $L_{\mathcal{A}}$. Тогда для постоянной квази-гриди $G_{\mathcal{A}}$ справедлива следующая оценка*
$$\frac{H(\mathcal{A})}{16} \leq G_{\mathcal{A}} \leq 2H(\mathcal{A}) + 1.$$

2. Основные обозначения и вспомагательные леммы

Для $f \in L^1(0,1)$ будем писать:
$$\|f\|_\Delta = \int_\Delta |\, f \,|$$
и $\|f\|$, если $\Delta = [0,1]$. Также сделаем следующие обозначения:
$$sp(f) = \{\Delta : \quad c_\Delta(f) \neq 0\}, \quad P_{\mathcal{J}}(f) = f - \sum_{\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}} c_{\mathcal{I}}(f) h_{\mathcal{I}}, \quad \text{для любого} \quad \mathcal{J} \in \mathcal{D}$$
Заметим, что функция $P_{\mathcal{J}}(f)$ постоянна на множестве $\mathcal{J}$ и совпадает с f вне $\mathcal{J}$. Для конечного множества двоичных интервалов $\mathcal{S}$, $\mathcal{S} = \{\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \dots, \mathcal{J}_k\}$ положим $P_{\mathcal{S}}(f) = P_{\mathcal{J}_1}(P_{\mathcal{J}_2}(\dots(P_{\mathcal{J}_k}(f))\dots)$. Заметим также, что функция $P_{\mathcal{S}}(f)$ не зависит от того, каким порядком применяются операторы $P_{\mathcal{J}_i}$, $1 \leq i \leq k$. Для любого $f \in L^1(0,1)$ и двоичного интервала $\Delta_n = [a,b)$ положим
$$C_1(f,\Delta_n)(t) = \begin{cases} f(t) & : \quad t \notin \Delta_{2n} \\ f(t - \frac{b-a}{2}) & : \quad t \in \Delta_{2n} \end{cases}$$
и
$$C_2(f,\Delta_n)(t) = \begin{cases} f(x) & : \quad x \notin [a, \frac{a+b}{2}) \\ f(x + \frac{b-a}{2}) & : \quad x \in [a, \frac{a+b}{2}) \end{cases}$$
Фактически операторы $C_1(f,\Delta_n)$ и $(C_2(f,\Delta_n))$, введенные в [3] копируют функцию f с левой (правой) половины интервала Δ_n на правую (левую).
Ниже сформулируем несколько лемм из [5], которые будут нами использованы.

Лемма 2.1. ([5], *Лемма 1) Для любых $\mathcal{J} \in \mathcal{D}$ и $f \in L^1(0,1)$ имеем $\|f\|_{\mathcal{J}} \geq |\, c_{\mathcal{J}}(f) \,|$.*

Лемма 2.2. ([5], *(8)) Пусть $f \in L^1(0,1)$ и $|\, c_\Delta(f) \,| \leq 1$ для любого $\Delta \in \mathcal{D}$. Тогда для любого $\mathcal{J} \in \mathcal{D}$ справедливо $\|P_{\mathcal{J}}(f)\|_{\mathcal{J}} \leq 1$.*

Лемма 2.3. ([5], *Лемма 2) Пусть $f, g \in L^1(0,1)$ такие что $\|f+g\| > 0$ и пусть $\|f\| = B\|f+g\|$. Тогда будет выполняться одно из этих неравенств*

$$\|C_1(f,\Delta_n)\| \leq B\|C_1(f+g,\Delta_n)\|, \tag{2.1}$$

$$\|C_2(f,\Delta_n)\| \le B\|C_2(f+g,\Delta_n)\|, \tag{2.2}$$

для любого интервала $\Delta_n = [a,b), n > 1$. Боле того равенства в (2.1) и (2.2) выполняются одновременно.

Для любого $f, g \in L^1(0,1), \|f+g\| > 0$ и Δ_n положим

$$C(f,g)=\begin{cases}(C_1(f,\Delta_n), C_1(f,\Delta_n)), & \text{если выполнено (2.1) и } C_1(f+g,\Delta_n)\neq 0\\ (C_2(f,\Delta_n, C_2(g,\Delta_n))), & \text{в противном случае.}\end{cases} \tag{2.3}$$

Лемма 2.4. *([5], Лемма 3) Пусть даны $f, g \in L^1(0,1)$, $\Delta_n \in \mathcal{D}$ и пусть выполнены следующие условия*

i) $\Delta_n \notin sp(f)$, $\Delta_n \notin sp(g)$,
ii) $sp(f) \cap sp(g) = \emptyset$,
iii) $\|f\| > 0$, $\|f+g\| > 0$,
iv) $H(sp(f+g)) < \infty$.

Тогда для функции $(f', g') = C((f,g),\Delta_n)$, выполняются следующие условия

a) $\Delta_n \notin sp(f')$, $\Delta_n \notin sp(g')$,
b) $c_k(f') = c_k(f)$ *и* $c_k(g') = c_k(g)$ *для любого* k *с* $\Delta_k \not\subset \Delta_s$, *где* Δ_s *та половина интервала* Δ_n *куда копиравали значения функций* f *и* g,
c) $c_{\mathfrak{I}}(f') = c_{\mathfrak{I}+\frac{\mu(\Delta_n)}{2}}(f')$ *и* $c_{\mathfrak{I}}(g') = c_{\mathfrak{I}+\frac{\mu(\Delta_n)}{2}}(g')$, *для всех* $\mathfrak{I} \subset \Delta_{2n-1}$
d) $sp(f') \cap sp(g') = \emptyset$,
e) $H(sp(f'+g')) \le H(sp(f+g))$,
f) $\|f'\| > 0$, $\|f'+g'\| > 0$,
g) $\frac{\|f'\|}{\|f'+g'\|} \ge \frac{\|f\|}{\|f+g\|}$.

Теперь мы готовы сформулировать основную лемму этого параграфа.

Лемма 2.5. *Пусть p и q многочлены по системе Хаара, удовлетворяющие следующим соотношениям*

i) $sp(p) \cap sp(q) = \emptyset$,
ii) *функция q постоянна на всех двоичных интервалах, на которых постоянна p,*
iii) $\|p\| > 0$ *и* $\|p+q\| > 0$
iv) $H = H(sp(p+q)) < \infty$
v) $| c_{\mathfrak{I}}(p) | \ge 1$ *для любого* $\mathfrak{I} \in sp(p)$,
vi) $| c_{\mathfrak{I}}(q) | \le 1$ *для любого* $\mathfrak{I} \in sp(q)$,
vii) $p\big|_{\mathfrak{I}_+} = p\big|_{\mathfrak{I}_-}$ *и* $q\big|_{\mathfrak{I}_+} = q\big|_{\mathfrak{I}_-}$ *для любого* $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I} \notin sp(p+q)$.

Тогда для любого $\mathfrak{I} \notin sp(p+q)$ имеет место

$$\|p\|_{\mathfrak{I}} \le (2H+1)\cdot\|p+q\|_{\mathfrak{I}} + 1, \quad p\big|_{\mathfrak{I}} = const, \tag{2.4}$$

$$\|p\|_{\mathfrak{I}} \le (2H+1)\cdot\|p+q\|_{\mathfrak{I}} - (2H-2), \quad p\big|_{\mathfrak{I}} \neq const. \tag{2.5}$$

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{S}$ множество всех двоичных интервалов $\mathcal{I}$, для которых $c_{\mathcal{I}}(p+q)=0$, а также функция $p+q$ не постоянна на двоичном интервале, которая чьей левой или правой половиной является $\mathcal{I}$. По индукции по $ord(\mathcal{I},\mathcal{S})$, $\mathcal{I}\in\mathcal{S}$ (см. определение в [5]) докажем утверждение леммы. Если $ord(\mathcal{I},\mathcal{S})=0$, тогда $p|_{\mathcal{I}}=Const$. Тогда используя лемму 2.2 для q будем иметь

$$\|p\|_{\mathcal{I}}\le\|p+q\|_{\mathcal{I}}+\|q\|_{\mathcal{I}}\le\|p+q\|_{\mathcal{I}}+1\le(2H+1)\cdot\|p+q\|+1 \tag{2.6}$$

Допустим, что утвержедение индукции справедливо для $\mathcal{I}$ с $ord(\mathcal{I},S)<i$ и докажем для $\mathcal{I}$ с $ord(\mathcal{I},S)=i$. Заметим, что $p|_{\mathcal{I}}\neq Const$ а также из условия $vii)$ следует, что $p\big|_{\mathcal{I}_+}\neq Const$ и $p\big|_{\mathcal{I}_-}\neq Const$. Обозначим через $\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2,\dots,\mathcal{I}_k$ все максимальные элементы $\mathcal{S}$, которые содержатся в $\mathcal{I}_+$ и $p\big|_{\mathcal{I}_j}\neq Const, j=1,2,\dots,k$. А через $\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2,\dots,\mathcal{J}_m$ обозначим все максимальные элементы $\mathcal{S}$, которые содержатся в $\mathcal{I}_+$ и $p\big|_{\mathcal{J}_j}=Const, j=1,2,\dots,m$. Заметим, что $\mathcal{I}_+=\cup_{j=1}^{k}\mathcal{I}_j\cup\cup_{j=1}^{m}\mathcal{J}_j$.

Рассмотрим случай, когда $\mathcal{J}_j$ и $\mathcal{J}_s$ являются правыми и левыми половинами некоторого двоичного интервала $\mathcal{J}$. Из условий леммы следует, что $c_{\mathcal{J}}(p)\neq 0$ и следовательно $\|p+q\|_{\mathcal{J}}\ge 1$. Используя лемму 2.2 для q получим, что $\|q\|_{\mathcal{J}}\le 1$. Следовательно

$$(2H+1)\|p+q\|_{\bar{\mathcal{J}}}-\|p\|_{\bar{\mathcal{J}}}>2H\|p+q\|_{\bar{\mathcal{J}}}-1>2H-1>2H-2. \tag{2.7}$$

Итак, на интервале $\mathcal{J}$ выполняется соотношение (2.5). В последовательности $\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2,\dots,\mathcal{J}_m$ отметим все пары, чьи объединения являются двоичными интервалами, и множество этих объеденений обозначим через I_{k+1}, I_{k+2}, ..., I_s. А множество оставшихся интервалов обозначим через $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, ..., $\mathcal{K}_l$. Для интервалов $\mathcal{I}_i$ имеем соотношение (2.5), а для интервалов $\mathcal{J}_i$ имеем (2.4). Заметим, что из конструкции следует, что $l\le s(H-1)$. Итак, имеем

$$\|p\|_{\mathcal{I}_+}=\sum_{i=1}^{s}\|p\|_{\mathcal{I}_i}+\sum_{i=1}^{l}\|p\|_{\mathcal{J}_i}<(2H+1)\sum_{i=1}^{s}\|p\|_{\mathcal{I}_i}-s(2H-2)$$

$$+(2H+1)\sum_{i=1}^{l}\|p\|_{\mathcal{J}_i}+l\le(2H-1)\|p\|_{\mathcal{I}_+}-(H-1).$$

Из условия vii) данной леммы следует, что $\|p\|_{\mathcal{I}}=2\|p\|_{\mathcal{I}_+}$, $\|p+q\|_{\mathcal{I}}=2\|p+q\|_{\mathcal{I}_+}$, следовательно, получаем $\|p\|_{\mathcal{I}}\le(2H+1)\|p+q\|_{\mathcal{I}}-2(H-1)$.

3. Доказательство теоремы 1.1

Сначало докажем правую часть неравенства т.е. $G_{\mathcal{A}}\le 2H(\mathcal{A})+1$. Пусть $f\neq 0$. Нам достаточно рассмотреть случай, когда $G_m(f)\neq f$. Обозначим

$$p=\frac{G_m(f)}{\max\ \{|\ c_{\Delta_n}(f-G_m(f))\ |:\Delta_n\in sp(f-G_m(f))\}}$$

$$q=\frac{f-G_m(f)}{\max\ (\{|\ c_{\Delta_n}(f-G_m(f))\ |:\Delta_n\in sp(f-G_m(f))\}}$$

Нам нужно оценить величину $\frac{\|p\|}{\|p+q\|}$. Так как p является полиномом, а система Хаара обладает свойством монотонности, то можем считать, что q тоже является полиномом. Имеем, что $H(sp(p+q)) < \infty$. Все двоичные интервалы, которые не принадлежат $sp(p+q)$ и на которых $p+q$ не является постоянным пронумеруем по увеличению меры и обозначим через $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \cdots, \mathfrak{J}_k$. Положим

$$(p', q') = C(C(\cdots(C((p, q, \mathfrak{J}_1), \mathfrak{J}_2), \cdots \mathfrak{J}_k)$$

Функции p', q' будут удовлетворять всем условиям основной Леммы, поэтому получаем, что $\frac{\|G_m(f)\|}{\|f\|} \leq \frac{\|p'\|}{\|p'+q'\|} \leq 2H+1$.Теперь докажем что $G_A \geq \frac{H}{16}$. Пусть в подсистеме $\mathbb{S}$ имеется цепь длиной H. Для простоты представления предположим, что $\{h_n^{(1)}, h_{n+1}^{(1)}, \ldots, h_{n+H-1}^{(1)}\} \subset \mathbb{S}$. Рассмотрим функцию $f = \sum_{i=n}^{n+H-1} h_i^{(1)}$. Заметим, что $\|f\| = 2 - \frac{1}{2^{H-1}} \leq 2$. Обозначим $m = \left[\frac{H}{2}\right]$ и рассмотрим следующую реализацию жадного алгоритма $G_m(f) = \sum_{i=0}^{m-1} h_{n+2i}^{(1)}$. Для $G_m(f)$ справедлива оценка $\|G_m(f)\| \geq \frac{m}{4}$. Следовательно, $\|G_m(f)\| \geq \frac{H}{16}\|f\|$. И это означает, что $\|G_m\| \geq \frac{H}{16}$.

Abstract. In this paper, we estimate the quasi–greedy constant for quasi-greedy subsystems of the Haar system in $L^1(0,1)$. All quasi–greedy subsystems of the Haar system are characterized in [4]. The characterization is based on the tem length of the chains, which is introduced in [5]. In [4], the estimate $G(H) \leq C \cdot 2^H$ was obtained with H being the length of the longest chain of the subsystem. In this paper, we improve this estimate and show that $\frac{H}{16} \leq G(H) \leq 2H+1$.

Список литературы

[1] S. J. Dilworth, N. J. Kalton, D. Kutzarova, "On the existence of almost greedy bases in Banach spaces", Studia Mathematica, **159**, 67 – 101 (2003).

[2] S. J. Dilworth, D. Kutzarova, P. Wojtaszczyk, "On approximate l_1 systems in Banach spaces", Journal of Approximation Theory, **114**, no. 2, 214 – 241 (2002).

[3] S. Gogyan, "Greedy algorithm with regard to Haar subsystems", East Journal on Approximations, **11**, no. 2, 221 – 236 (2005).

[4] S. Gogyan, "GA greedy algorithm in $L^1(0,1)$ in subsystems of the Haar system and ω-quasi-greedy bases", Mat. Zametki, **88**, no. 1, 18 – 29 (2010).

[5] S. Gogyan, "On convergence of weak thresholding greedy algorithm in $L^1(0,1)$", Journal Approximation Theory, **161**, no. 1, 49 – 64 (2009).

[6] V. N. Temlyakov, "Greedy approximation", Acta Numerica, **17**, 235 – 409 (2008).

[7] S. Konyagin and V. N. Temlyakov, "A remark on greedy approximation in Banach spaces", East J. Approx., **5**, 365 – 379 (1999).

[8] P. Wojtaszczyk, "Greedy algorithms for general biorthogonal systems", J. Approx Theory, **107**, 293 – 314 (2000).

Поступила 19 декабря 2018

После доработки 20 января 2019

Принята к публикации 24 января 2019