Известия НАН Армении, Математика, том 54, н. 2, 2019, стр. 31 – 36

МЕДИАЛЬНЫЕ В ЦЕЛОМ СИСТЕМЫ КВАЗИГРУПП

А. Р. ГЕВОРГЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *albert.gevorgyan@gmail.com*

Аннотация. В статье обобщается теорема Белоусова о линейности обратимых алгебр с $\forall\exists(\forall)$ тождествами. Полученные результаты могут быть использованы для классификации медиальных сверхтождеств.

MSC2010 number: 03C05; 03C85; 20N05.

Ключевые слова: квазигруппа; сверхтождество; изотопность; медиальная в целом система квазигрупп; квазиавтоморфизм группы.

1. Введение

Систему всех квазигрупп определеных на заданном множестве M обозначим через Ω_M. В [2] даны следующие определения:

Определение 1.1. *Систему квазигрупп $\Sigma \subset \Omega_M$ назовем слабо ассоциативной в целом слева (справа) или $\overline{LA}(\overline{RA})$-системой, если для любой пары $A, B \in \Sigma$ существуют $A', B' \subset \Omega_M$ такие, что для любых $a, b, c \subset M$ имеет место равенство*

$$A[a, B(b, c)] = A'[B'(a, b), c](A[B(a, b), c] = A'[a, B'(b, c)]) \tag{1.1}$$

Определение 1.2. *Систему квазигрупп $\Sigma \subset \Omega_M$ назовем ассоциативной в целом слева (справа) или $LA(RA)$-системой, если для любой пары $A, B \in \Sigma$ существуют $A', B' \in M$ такие, что для любых $a, b, c \in M$ имеет место равенство*

$$A[B(a, b), c] = A'[a, B'(b, c)](A[a, B(b, c)] = A'[B'(a, b), c]) \tag{1.2}$$

Если система ассоцативна в целом и слева и справа, то она называется ассоцативной в целом системой или A- системой.

Определение 1.3. *Операции A и B назовем изотопными, если существуют подстновки α, β, γ, множества M такие, что для любых $a, b \in M$*

$$\alpha B(a, b) = A(\beta a, \gamma b) \tag{1.3}$$

Определение 1.4. *Систему квазигрупп $\Sigma \subset \Omega_M$ назовем медиальной в целом, если для любых $A, B, C \in \Sigma$ существуют $A', B', C' \in \Sigma$ такие, что для любых $a, b, c, d \in M$ имеет место равенство:*

$$A[B(a,b), C(c,d)] = A'[B'(a,c), C'(b,d)] \tag{1.4}$$

В [2] доказано, что если имеется медиальная в целом система Σ, то на множестве M можно определить абелеву группу $M(+)$ таким образом, что для любой операции A существуют автоморфизмы φ и ψ группы $M(+)$, а также $t \in M$ такое, что $A(a,b) = \varphi a + t + \psi b$. В параграфе 3 настоящей статьи мы усилим указанный результат Белоусова. Мы будем изучать следующие $\forall\exists(\forall)$ тождества:

$$\forall A, B \exists A', B', C' \forall a, b, c, d\, A[B(a,b), B(c,d)] = A'[B'(a,c), C'(b,d)] \tag{1.5}$$

$$\forall A, B \exists A', B', C' \forall a, b, c, d\, B[A(a,b), B(c,d)] = A'[B'(a,c), C'(b,d)] \tag{1.6}$$

$$\forall A, B \exists A', B', C' \forall a, b, c, d\, B[B(a,b), A(c,d)] = A'[B'(a,c), C'(b,d)] \tag{1.7}$$

$$\forall A, B \exists A', B' \forall a, b, c, d\, A[A(a,b), A'(c,d)] = B[B'(a,c), B(b,d)] \tag{1.8}$$

2. Предварительные результаты

Для дальнейших результатов нам понадобятся вспомогательные результаты, доказанные в [1] – [3].

Теорема 2.1. *[1] Если группы $M(\cdot)$ и $M(\circ)$ изотопны, то они изоморфны.*

Лемма 2.1. *([2]) Если квазигруппы A, A', B, B' связаны ассоциативным соотношением* (1.1), *то все они изотопны одной и той же группе.*

Определение 2.1. *Пусть дана группа $M(\cdot)$. Подстановку группы M назовем квазиавтоморфизмом группы $M(\cdot)$, если для всех $a, b \in M$ имеем*

$$\alpha(a \cdot b) = \alpha a \cdot \alpha^{-1}(e) \cdot \alpha b, \tag{2.1}$$

где e - единица группы $M(\cdot)$.

Лемма 2.2. *([2]) Если в группе $M(\cdot)$ для любых $a, b, c \in M$ имеет место равенство*

$$\beta(\alpha(a \cdot b) \cdot c) = \gamma a \cdot \delta(\sigma b \cdot \tau c), \tag{2.2}$$

то все перестановки $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma, \tau$ являются квазиавтоморфизмами группы $M(\cdot)$.

Лемма 2.3. *([2]) Если $\Sigma \subset \Omega_M$ является линейной и слева и справа, то можно определить группу $M(\cdot)$ так, что для любого $A \in \Sigma$ $A(a,b) = \varphi a \cdot \sigma b$, где φ и σ являются автоморфизмами группы $M(\cdot)$.*

Лемма 2.4. *([2]) Пусть A_i, $i = 1, ..., 6$ линейны на группе $M(\cdot)$ и имеет место равенсто*

$$A_1[A_2(a,b), A_3(c,d)] = A_4[A_5(a,c), A_6(b,d)]. \tag{2.3}$$

Тогда группа $M(\cdot)$ - абелева.

Лемма 2.5. *([3]) 1) Если для квазигрупп A, B, C для всех $a, b, c \in M$ имеет место равенство*

$$A(A(a,b),c) = B(a, C(b,c)), \tag{2.4}$$

то существует группа, на которой A является линейной слева. 2) Если для квазигрупп A, B, C для всех $a, b, c \in M$ имеет место равенство

$$A(a, A(b,c)) = B(C(a,b), c), \tag{2.5}$$

то существует группа, на которой A является линейной справа.

3. Основные результаты

Теперь перейдем к доказательствам основных теорем этой статьи.

Теорема 3.1. *Если в системе $\Sigma \in \Omega_M$ имеет место тождество (1.8), то существует абелева группа $M(\cdot)$ такая, что система является линейной над $M(\cdot)$.*

Доказательство. Докажем, что является $\overline{LA}$-системой. Пусть $A, B \in \Sigma$. Если зафиксировать $c_0 \in M$ получим:

$$A[B(a,b), d] = A'[a, C'(b,d)], \quad \text{где } \alpha d = B(c0, d), \beta a = B'(a, c_0). \tag{3.1}$$

Обозначая $A''(a,b) = A'(\beta a, b)$ и $C''(b,d) = C'(b, \lambda^{-1} d)$ получаем

$$A[B(a,b), d] = A''[a, C''(b,d)], \tag{3.2}$$

что означает, что система является $\overline{LA}$-системой. Аналогично (фиксируя b) можно получить, что Σ также является $(\overline{RA})$-системой. Тогда, согласно лемме 2.3 система Σ является линейной над некоторой группой $M(\cdot)$. Но с другой стороны, согласно лемме 2.4 - эта группа абелева. □

Теорема 3.2. *Если в системе M имеет место тождество (1.6), то существует абелева группа $M(\cdot)$ такая, что система является линейной над $M(\cdot)$.*

Доказательство. Аналогично рассуждениям предыдущей теоремы можно получить, что система M является $\overline{LA}$-системой. Докажем, что система также является линейной справа. Действительно, пусть $A, B \in \Sigma$. В (1.6) зафиксируем $b_0 \in M$ и введем обозначения: $\lambda a = A(a, b_0)$, $\mu_d = C''(b_0, d)$. Тогда получаем

$$B[a, B(c,d)] = A_j[B_j(a,c), \mu_d]. \tag{3.3}$$

Обозначая $A''(x,y) = A'(x, \mu y)$, $B''(x,y) = B'(1a, c)$, получим

$$B[a, B(c,d)] = A''[B''(a,c), d] \tag{3.4}$$

Поскольку система M является линейной слева, то существует группа $M(\cdot)$ такая, что $B(x,y) = \varphi x \cdot \sigma y$, где φ является автоморфизмом группы $M(\cdot)$, а σ - перестановка множества M. С другой стороны, согласно лемме 2.1, квазигруппы A'', B'', B изотопны одной и той же группе $M(\cdot)$. Поскольку изотопность транзитивна, A'' и B'' изотопны B, которая в свою очередь изотопна группе $M(\cdot)$. Следовательно, (3.4) можно переписать следующим образом:

$$\varphi a \cdot \sigma(\varphi c \cdot \sigma d) = \alpha(\beta(\gamma_1 a \cdot \gamma_2 c) \cdot \gamma_3 d) \tag{3.5}$$

где $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ являются перестановками множества M . Делая замену переменных: $a -> (\gamma_1)^{-1}a$, $c -> (\gamma_2)^{-1}c$, $d -> (\gamma_3)^{-1}d$, получаем

$$\varphi((\gamma_1)^{-1}a) \cdot \sigma(\varphi((\gamma_2)^{-1}c) \cdot \sigma((\gamma_3)^{-1}d)) = \alpha(\beta(a \cdot c) \cdot d) \tag{3.6}$$

Согласно лемме 2.2, φ является квазиавтоморфизмом группы $M(\cdot)$. Следовательно, $\sigma x = t \cdot \psi x$, где $t = \sigma e$, - автоморфизм группы $M(\cdot)$. Получаем, что $B(a,b) = a \cdot t \cdot b$. Согласно, лемме 2.4, группа $M(\cdot)$ является абелевой. Поскольку B была произвольной, то теорема 3.2 доказана. □

Теорема 3.3. *Если в системе $\Sigma \in \Omega_M$ имеет место тождество (1.7), то существует абелева группа $M(\cdot)$ такая, что система является линейной над $M(\cdot)$.*

Доказательство. Аналогично рассуждениям предыдущей теоремы можно получить, что система является $\overline{RA}$-системой. Однако, на самом деле Σ также является линейной слева. Действительно, пусть $A, B \in \Sigma$. В (1.7) зафиксируем $c_0 \in M$ и введем обозначения: $d = A(c_0, d), \mu a = C'(a, c_0)$. Тогда получаем

$$B[B(a,b), d] = A'[\mu a, B'(b,d)] \tag{3.7}$$

Обозначая $A''(x,y) = A'(\mu x, y), B''(x,y) = B'(a, (\lambda_1)^{-1}c)$ получим

$$B[B(a,b),d] = A''[a, B''(b,d)] \tag{3.8}$$

Поскольку система Σ является линейной слева, то существует группа $M(\cdot)$ такая, что $B(x,y) = \varphi x \cdot \psi y$, где ψ является автоморфизмом группы $M(\cdot)$, а φ - перестановка множества M. Аналогично рассуждениям предыдущей теоремы можно получить что, φ является квазиавтоморфизмом группы $M(\cdot)$. Следовательно, $\varphi x = \psi x \cdot t$, где $t = \varphi e$, а ψ - автоморфизм группы $M(\cdot)$. Получается, что $B(a,b) = \psi a \cdot t \cdot \sigma b$. Согласно, лемме 2.4, группа $M(\cdot)$ является абелевой. Поскольку B была произвольной, теорема доказана. □

Теорема 3.4. *Если в системе $\Sigma \in \Omega_M$ имеет место тождество (1.8), то существует абелева группа $M(\cdot)$ такая, что система является линейной над $M(\cdot)$.*

Доказательство. Для начала зафиксируем $c_0 \in M$. Подставляя $c = c_0$, $B = A$ в (1.8) получаем

$$A(A(a,b),d) = A(\mu a, A(b,d)), \tag{3.9}$$

где $\lambda d = A'(c_0, d)$ и $\mu a = B'(a, c_0)$. Если обозначить $C_1(x,y) = A(x, \lambda^{-1}y)$ и $B_1(x,y) = A(\mu x, y)$, то получаем

$$A(A(a,b),d) = B_1(a, C_1(b,d)), \tag{3.10}$$

откуда согласно лемме 2.5 следует, что А является линейной слева. Теперь обозначая $B_2(x,y) = A(x, \lambda y)$ и $C_2(x,y) = A(\mu^{-1}x, y)$, получаем

$$A(a, A(b,d)) = B_2(C_2(a,b), d), \tag{3.11}$$

откуда согласно лемме 2.5 следует, что A является линейной справа. Поскольку A является линейной и слева и справа, то она является линейной согласно лемме 2.3. Зафиксируем $B \in \Sigma$. Пусть она является линейной над группой $M(\cdot)$. Подставим $c = c_0$ в (1.8), получим

$$A(A(a,b),d) = B(\mu a, B(b,d)), \quad \text{где} \quad \lambda d = A'(c_0, d) \quad \text{и} \quad \mu a = B'(a, c_0). \tag{3.12}$$

Обозначая $A''(x,y) = A(x, \lambda y)$ и $B''(x,y) = B(\mu x, y)$ получаем

$$A''(A(a,b),d) = B''(a, B(b,d))$$

Мы доказали, что A является линейной над некоторой группой $M(\circ)$. С другой стороны, согласно лемме 2.1, операции A и B изотопны. Отсюда следует, что группы $M(\cdot)$ и $M(\circ)$ изотопны. Следовательно, согласно теореме 2.1, эти группы изоморфны. Пусть α - изоморфизм групп $M(\cdot)$ и $M(\circ)$, то есть $x \circ y = \alpha^{-1}(\alpha x \cdot \alpha y)$. Пусть $B(x,y) = \varphi x \cdot \psi y$, где φ и ψ являются квазиавтоморфизмами группы $M(\cdot)$, а $A(x,y) = \varphi_1 x \circ \psi_1 y$, где φ_1 и ψ_1 являются квазивтоморфизмами группы $M(\circ)$. Подставляя это в (3.12) получаем

$$\alpha^{-1}(\alpha\varphi_1\alpha^{-1}(\alpha\varphi_1 a \cdot \alpha_1\varphi_1 b) \cdot \alpha_1\psi_1\lambda d) = \varphi\mu a \cdot \psi(\varphi b \cdot \psi d)$$

После замены переменных получим следующее тождество:

$$\alpha^{-1}(\alpha\varphi_1\alpha^{-1}(a \cdot b) \cdot d) = \varphi\mu\varphi^{-1}\alpha^{-1}a \cdot \psi(\varphi(\psi_1)^{-1}\alpha^{-1}b \cdot \psi\lambda^{-1}(\psi_1)^{-1}\alpha^{-1}d).$$

Согласно лемме 2.2, α^{-1}, $\alpha\varphi_1\alpha^{-1}$ и $\varphi(\psi_1)^{-1}\alpha^{-1}$ являются квазавтоморфизмами группы $M(\cdot)$. Поскольку, множество квазиавтоморфизмов группы является группой, то α, φ_1, ψ_1 являются квазавтоморфизмами группы $M(\cdot)$. Следовательно, $A(x,y) = \varphi_1 x \circ \psi_1 y = \alpha^{-1}(\alpha\varphi_1 x \cdot \alpha\psi_1 y) = \varphi_1 x \cdot (\alpha^{-1}e)^{-1} \cdot \psi_1 y$ является линейной на группе $M(\cdot)$, так как φ_1 и ψ_1 являются квазиавтоморфизмами группы $M(\cdot)$. Поскольку выбор A - произвольный, то мы доказали, что все операции являются линейными над группой $M(\cdot)$. С другой стороны, $M(\cdot)$ является абелевой согласно лемме 2.4. □

Замечание 3.1. *Теоремы 3.1 – 3.4, доказанные в данной статье обобщают результаты Белоусова в нескольких направлениях: во первых, в теоремах Белоусова необходимо существование $A', B', C' \in \Sigma$, а в теоремах данной статьи достаточно существование таких квазигрупп из M. Во вторых, разрешается любое из равенств $A = B$, $B = C$, $C = A$. Эти результаты могут быть использованы для классификации медиальных сверхтождеств, так как с помощью этих теорем задача классификации сводится к изучению абелевых групп.*

Abstract. In this paper we generalize Belousov's theorem on linearity of invertible algebras with $\forall\exists(\forall)$ identities. The obtained results can be used for classification of medial hyperidentities.

Список литературы

[1] A. A. Albert, "Quasigroups. I", Trans. Amer. Math. Soc., **54**, 507 – 519 (1943).
[2] V. D. Belousov, "Globally assocative systems of quasigroups", Mat. Sb. (N. S.), **55**(97), no. 2, 221 – 236 (1961).
[3] Yu. M. Movsisyan, "Hyperidentities and related concepts, II", Arm. J. Math. **4**, 1 – 85 (2018).

Поступила 27 августа 2018

После доработки 5 октября 2018

Принята к публикации 24 января 2019