Известия НАН Армении, Математика, том 54, н. 2, 2019, стр. 17 – 30

О ТОЧКАХ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ ПЛОСКИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ

А. А. АКОПЯН, Д. С. ВОСКАНЯН

Ереванский государственный университет
E-mails: *hakop@ysu.am*, *ysudav@gmail.com*

Аннотация. Мы доказываем, что множество $\mathcal{X}$, $\#\mathcal{X} = mn$, $m \leq n$, является множеством точек пересечения некоторых двух плоских алгебраических кривых степеней m и n, соответственно, тогда и только тогда когда выполнены следующие два условия: а) любая кривая степени $m+n-3$, содержащая все, кроме одной точки из $\mathcal{X}$, содержит все точки множества $\mathcal{X}$, b) ни одна кривая степени меньше чем m не содержит все точки множества $\mathcal{X}$. Отметим, что необходимость условий а) и б) следует из теорем Кэли-Бахараха и Нетера, соответственно.

MSC2010 number: 14H50; 41A05.

Ключевые слова: плоская кривая; точка пересечения; двумерная интерполяция; фундаментальный многочлен; n-корректное множество; n-независимое множество.

1. Введение, n-независимость

Пусть $\Pi_n := \Pi_n^2$ есть пространство всех многочленов от двух переменных, суммарная степень которых меньше или равна n. Для его размерности имеем:

$$N := \dim \Pi_n = \binom{n+2}{2}.$$

Плоская алгебраическая кривая является нулевым множеством некоторого двумерного многочлена степени ≥ 1. Чтобы упростить обозначения, мы будем использовать ту же букву, скажем p, для обозначения многочлена p и кривой, заданной уравнением $p(x, y) = 0$. Точнее, предположим, что p является многочленом без кратных множителей. Тогда алгебраическую кривую, определенную уравнением $p(x, y) = 0$ также будем обозначать через p.

Таким образом, прямые, коники и кубики эквивалентны многочленам степени 1, 2 и 3 соответственно; приводимая коника представляет собой пару прямых, и приводимая кубика представляет собой тройку прямых или состоит из прямой и неприводимой коники.

Следующая лемма является простым фактом линейной алгебры:

Лемма 1.1. *Через любые $N - 1 = (1/2)n(n+3)$ точек проходит алгебраическая кривая степени n.*

Предположим, что задан набор из k различных точек:

$$\mathcal{X}_k = \{(x_i, y_i) : i = 1, 2, \ldots, k\} \subset \mathbb{C}^2.$$

Задача нахождения многочлена $p \in \Pi_n$, удовлетворяющего условиям

$$p(x_i, y_i) = c_i, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{1.1}$$

называется *задачей интерполяции.*

Определение 1.1. *Множество точек $\mathcal{X}_k$ называется* n-корректным, *если для любого данного набора чисел $(c_1, \ldots, c_m)$, существует единственный многочлен $p \in \Pi_n$, удовлетворяющий условиям* (1.1).

Необходимым условием для n-корректности является $k = \#\mathcal{X}_k = \dim \Pi_n = N$.

Многочлен $p \in \Pi_n$ называется *n-фундаментальным многочленом* точки $A \in \mathcal{X}$, если $p(A) = 1$ и $p\big|_{\mathcal{X}\setminus\{A\}} = 0$, где $p\big|_{\mathcal{X}}$ означает ограничение p на $\mathcal{X}$. Этот многочлен мы будем обозначать через $p^{\star}_{A,\mathcal{X}}$.
Иногда мы будем называть n-фундаментальным также многочлен из Π_n, который обращается в нуль во всех точках $\mathcal{X}$, кроме точки A, так как этот многочлен равен $cp^{\star}_{A}$, где $c \neq 0$ константа. Фундаментальный многочлен может быть описан также как плоская кривая, содержащая все точки $\mathcal{X}$, кроме одной.

Далее мы рассмотрим важное понятие n-независимости и n-зависимости множеств точек (см. [1], [3] - [7]).

Определение 1.2. *Множество точек $\mathcal{X}$ называется* n-независимым, *если каждая его точка имеет n-фундаментальный многочлен. В противном случае, $\mathcal{X}$ называется* n-зависимым.

Определение 1.3. *Множество точек $\mathcal{X}$ называется* существенно n-зависимым, *если ни одна из его точек не имеет n-фундаментальный многочлен.*

Если для некоторой точки $A \in \mathcal{X}$ не существует n-фундаментальный многочлен то для любого многочлена $p \in \Pi_n$ мы имеем

$$p\big|_{\mathcal{X}\setminus\{A\}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad p(A) = 0.$$

Таким образом, множество $\mathcal{X}$ является существенно k-зависимым, означает, что любая плоская кривая степени k, содержащая все, кроме одной точки $\mathcal{X}$, содержит все точки $\mathcal{X}$.

Поскольку фундаментальные многочлены линейно независимы, мы получаем следующее необходимое условие n-независимости:

$$\#\mathcal{X} \leq \dim \Pi_n = N.$$

Легко видеть, что n-независимость $\mathcal{X}_k$ эквивалентно *разрешимости* задачи интерполяции (1.1), означающая, что для любых данных $\{c_1, \ldots, c_k\}$ существует (не обязательно единственный) многочлен $p \in \Pi_n$, удовлетворяющий условиям интерполяции (1.1).

В случае $k = N$, т.е. для множества точек $\mathcal{X}_N$ n-независимость означает n-корректность. Мы иммеем следующее

Предложение 1.1 ([6], лемма 2.2). *Предположим, что множество точек $\mathcal{X}$ n-независимо, и каждая точка множества $\mathcal{Y}$ имеет n-фундаментальный многочлен относительно множества $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$. Тогда последнее множество точек есть также n-независимое.*

Следствие 1.1 ([6], предложение 2.3). *Предположим, что кривая σ_k, степени k содержит n-независимое множество точек $\mathcal{X}$. Предположим также, что множество $\mathcal{Y}$ находится вне крывой σ_k и является $(n-k)$-независимой. Тогда множество $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ есть n-независимый.*

Ниже мы приводим характеристику n-зависимости множеств точек, состоящих не более чем из $3n$ точек.

Теорема 1.1 ([6], теорема 5.1). *Множество $\mathcal{X}$, состоящее не более чем из $3n$ точек, является n-зависимым, тогда и только тогда когда выполняется одно из следующих условий:*

a) $n+2$ точек коллинеарны,

b) $2n+2$ точек принадлежат (возможно, приводимой) конике,

c) $\#\mathcal{X} = 3n$, и существуют коника $\sigma_3 \in \Pi_3$ и кривая $\sigma_n \in \Pi_n$ такие, что $\mathcal{X} = \sigma_3 \cap \sigma_n$.

Приведем три следствия этого результата.

Следствие 1.2. *Множество $\mathcal{X}$, состоящее не более чем из $2n+1$ точек, является n-зависимым, тогда и только тогда когда $n+2$ точек коллинеарны.*

Обобщение этого результата с учетом кратностей точек может быть найдено в ([2], теорема 9). Из следствия 1.2 мы немедленно получаем следующий результат Севери [9]:

Следствие 1.3 ([9]). *Любое множество $\mathcal{X}$, состоящее не более чем из $n+1$ точек, является n-независимым.*

Следствие 1.4. *Любое множество $\mathcal{X}$, состоящее не более чем из $3n-1$ точек, является n-зависимым, тогда и только тогда когда выполняется одно из следующих условий:*
a) $n+2$ точек коллинеарны,
b) $2n+2$ точек принадлежат (возможно, приводимой) конике.

Частный случай приведенного выше результата, когда $\#\mathcal{X} \le 2n+2$, можно найти в [1], предложение 1.

Лемма 1.2. *Предположим, что множество $\mathcal{X}$ существенно k-зависимо, а σ_n является кривой степени n. Предположим также, что множество точек $\mathcal{Y} := \mathcal{X} \setminus \sigma_n$ не пусто. Тогда множество $\mathcal{Y}$ существенно $(k-n)$-зависимо.*

Доказательство. Предположим наоборот, что точка $A \in \mathcal{Y}$ имеет $(k-n)$-фундаментальный многочлен: $p^\star_{A,\mathcal{Y}}$. Тогда легко видеть, что многочлен $p = p^\star_{A,\mathcal{Y}}\sigma_n$ является k-фундаментальным многочленом точки A во множестве $\mathcal{X}$, что является противоречием. □

Предположим, что кривая σ_n степени n приводима, т. е.

$$\sigma_n = \sigma_{n_1} \cdots \sigma_{n_s}, \tag{1.2}$$

где компонент σ_{n_i} имеет степень n_i.

Обозначим через $\mathcal{X}_i$, $i = 1, \ldots, s$, множество точек из $\mathcal{X} \cap \sigma_{n_i}$ которые не принадлежат другим компонентам σ_{n_j}, $j \neq i$, т.е.

$$\mathcal{X}_i = \mathcal{X} \setminus \left(\bigcup_{j=1, j\neq i}^{s} \sigma_{n_j} \right). \tag{1.3}$$

Скажем что компонента σ_{n_i} *не пуста* по отношению к $\mathcal{X}$ если $\mathcal{X}_i \neq \emptyset$.

Лемма 1.3. *Предположим, что множество $\mathcal{X} \subset \sigma_n$ существенно k-зависимое, где кривая σ_n степени n приводима, согласно (1.2). Предположим также, что все компоненты не пусты относительно $\mathcal{X}$. Тогда каждое множество $\mathcal{X}_i$, указанное в (1.3), есть существенно $(k-n+n_i)$-зависимое.*

Доказательство. Действительно, предположим, что для некоторого i, $1 \le i \le s$, множество $\mathcal{X}_i$ не является существенно $(k-n+n_i)$-зависимым, т. е., существует точка $A \in \mathcal{X}_i$ имеющий $(k-n+n_i)$-фундаментальный многочлен: p_i. Тогда легко видеть, что многочлен $p = p_i \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{s} \sigma_{n_j}$ является k-фундаментальным многочленом точки A во множестве $\mathcal{X}$, что является противоречием. □

2. Полнота точечных множеств на плоских кривых

Определение 2.1. *Пусть σ_k - плоская кривая степени k без кратных компонент. Тогда множество точек $\mathcal{X} \subset \sigma_k$ называется* n-полным *на кривой σ_k, если выполняется следующее условие:*

$$p \in \Pi_n,\ p\big|_{\mathcal{X}} = 0 \ \Rightarrow\ p = q\sigma_k,\ \text{где } q \in \Pi_{n-k}.$$

В случае $k > n$ n-полнота означает что $p \in \Pi_n,\ p\big|_{\mathcal{X}} = 0 \ \Rightarrow\ p = 0$. Итак верна следующая

Лемма 2.1. *Пусть $k > n$. Тогда множество $\mathcal{X} \subset \sigma_k$ является n-полным на σ_k, тогда и только тогда когда $\mathcal{X}$ содержит n-корректное подмножество $\mathcal{X}_0$.*

Рассмотрим следующие два линейные пространства многочленов:

$$\mathcal{P}_{n,\mathcal{X}} = \left\{p \in \Pi_n : p\big|_{\mathcal{X}} = 0\right\}, \quad \mathcal{P}_{n,\sigma_k} = \left\{p\sigma_k : p \in \Pi_{n-k}\right\},$$

где $\mathcal{X}$ есть множество точек и $\sigma_k \in \Pi_k$. Заметим что

$$\mathcal{P}_{n,\mathcal{X}} \supset \mathcal{P}_{n,\sigma_k}, \ \text{ если } \ \mathcal{X} \subset \sigma_k. \tag{2.1}$$

Мы имеем также что

$$\mathcal{P}_{n,\mathcal{X}} = \mathcal{P}_{n,\sigma_k} \iff \mathcal{X} \subset \sigma_k \text{ является } n\text{-полным на кривой } \sigma_k. \tag{2.2}$$

Теперь мы легко заключаем из (2.1) и (2.2), что

$$\dim \mathcal{P}_{n,\mathcal{X}} = \dim \mathcal{P}_{n,\sigma_k} \iff \mathcal{X} \subset \sigma_k \text{ является } n\text{-полным на крывой } \sigma_k. \tag{2.3}$$

Очевидно, мы имеем что

$$\dim \mathcal{P}_{n,\sigma_k} = \dim \Pi_{n-k}. \tag{2.4}$$

Для $\dim \mathcal{P}_{n,\mathcal{X}}$ имеет место следующее (см. [3], [6])

Предложение 2.1. *Пусть $\mathcal{X}_0$ - максимальное n-независимое подмножество $\mathcal{X}$, т.е. $\mathcal{X}_0$ есть n-независимый и $\mathcal{X}_0 \cup \{A\}$ есть n-зависимый, для любой точки $A \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_0$. Тогда имеем*

$$\dim \mathcal{P}_{n,\mathcal{X}} = \dim \mathcal{P}_{n,\mathcal{X}_0} = \dim \Pi_n - \#\mathcal{X}_0. \tag{2.5}$$

Обозначим $d(k,n) := \dim \Pi_n - \dim \Pi_{n-k}$. Легко видеть, что $d(k,n) = (n+1) + n + \cdots + (n-k+2) = \frac{1}{2}k(2n-k+3)$, если $k \leq n+2$. Наконец, с учетом (2.2)-(2.4), мы получаем следующий простой критерий полноты:

Предложение 2.2 ([8], предложение 3.1). *Пусть $k \leq n+2$ и σ_k-плоская кривая степени k. Тогда множество точек $\mathcal{X} \subset \sigma_k$ является n-полным в σ_k тогда и только тогда, когда $\mathcal{X}$ содержит n-независимое подмножество $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$ с $\#\mathcal{X}_0 = d(k,n)$.*

Отметим, что в случаях $k = n+1, n+2$, ввиду того, что $d(k,n) = \dim \Pi_k$, предложение следует из леммы 2.1.

Теорема 2.1 (Кэли-Бахарах). *Предположим, что множество $\mathcal{X}$, $\#\mathcal{X} = mn$, является множеством точек пересечения некоторых двух кривых σ_m и σ_n, степеней m и n, соответственно: $\mathcal{X} = \sigma_m \cap \sigma_n$. Тогда имеем*

a) множество $\mathcal{X}$ существенно κ-зависимое,

b) множество $\mathcal{X}$ $(\kappa+1)$-независимое,

c) дла любой точки $A \in \mathcal{X}$ множество $\mathcal{X} \setminus \{A\}$ есть κ-независимое.

Теорема 2.2 (Нетер). *Предположим, что множество $\mathcal{X}$, $\#\mathcal{X} = mn$, является множеством точек пересечения некоторых двух кривых σ_m и σ_n, степеней m и n, соответственно: $\mathcal{X} = \sigma_m \cap \sigma_n$. Тогда для любого многочлена $p_k \in \Pi_k$ с $p\big|_{\mathcal{X}} = 0$, имеем*

$$p_k = A_{k-m}\sigma_m + B_{k-n}\sigma_n, \tag{2.6}$$

где $A_{k-m} \in \Pi_{k-m}$ and $B_{k-n} \in \Pi_{k-n}$.

Следствие 2.1. *Предположим, что множество $\mathcal{X}$, $\#\mathcal{X} = mn$, $m \leq n$, является множеством точек пересечения некоторых двух алгебраических кривых σ_m и σ_n, степеней m и n, соответственно: $\mathcal{X} = \sigma_m \cap \sigma_n$. Тогда ни одна кривая степени меньше чем m не содержит все точки $\mathcal{X}$.*

Доказательство. Действительно, предположим наоборот, что кривая p степени меньше m содержит все точки $\mathcal{X}$. Тогда из (2.6) мы получаем $p = 0$, что является противоречием. □

3. Основные результаты

Положим в этом разделе $\kappa = \kappa(m,n) = m + n - 3$.

Теорема 3.1. *Множество $\mathcal{X}$ с $\#\mathcal{X} = mn$, $m \leq n$, есть множество точек пересечения некоторых двух кривых степеней m и n соответственно, тогда и только тогда когда выполнены следующие условия:*

a) любая кривая степени κ, содержащая все, кроме одной точки $\mathcal{X}$, содержит все точки $\mathcal{X}$,

b) ни одна кривая степени меньше чем m не содержит все точки $\mathcal{X}$.

Отметим, что необходимость условий a) и b) вытекает из теорем 2.1 и 2.2 соответственно. Отметим также, что приведенное выше условие a) означает, что множество точек $\mathcal{X}$ существенно κ-зависимо, а условие b) означает, что множество $\mathcal{X}$ содержит $(m-1)$-корректное подмножество. Далее мы докажем часть достаточности теоремы когда $m = 1, 2, 3$.

Доказательство теоремы 3.1 в случаях $m = 1, 2, 3$. *Случай $m = 1$.* В этом случае задано существенно $(n-2)$-зависимое множество n точек $\mathcal{X}$. Из следствия 1.2 получаем, что все точки $\mathcal{X}$ коллинеарны, то есть принадлежат некоторой прямой σ_1. Отсюда получаем, что $\mathcal{X} = \sigma_1 \cap \sigma_n$, где σ_n имеет n различных линейных компонент, пересекающих прямую σ_1 в рассматриваемых n точках $\mathcal{X}$, соответственно.

Случай $m = 2$. В этом случае задано существенно $(n-1)$-зависимое множество $2n$ точек $\mathcal{X}$. Из следствия 1.4 получаем, что либо $n+1$ точки из $\mathcal{X}$ коллинеарны, т. е., принадлежат некоторой прямой σ_1, либо $2n$ точек из $\mathcal{X}$ принадлежат некоторой конике σ_2. Предположим сначала, что $n+1$ точка принадлежит прямой σ_1. Затем, обозначив $\mathcal{Y} = \mathcal{X} \setminus \sigma_1$, получаем, что $\#\mathcal{Y} \leq n-1$. По условию b) имеем, что $\mathcal{Y} \neq \emptyset$. Теперь из леммы 1.2 получаем, что множество $\mathcal{Y}$ существенно $(n-2)$-зависимо, что противоречит следствию 1.3.

Далее, предположим, что все точки $\mathcal{X}$ принадлежат конике σ_2. Сначала рассмотрим случай, когда коника σ_2 неприводима. Тогда получаем, что $\mathcal{X} = \sigma_2 \cap \sigma_n$, где σ_n имеет n различных линейных компонент, пересекающих σ_2 в n непересекающихся пар рассматриваемых точек, соответственно. Наконец, предположим, что коника σ_2 приводима, т.е. есть пара прямых $\sigma_2 = \sigma_1 {\sigma_1}'$. Сначала докажем, что каждая из этих прямых содержит ровно n точек из $\mathcal{X}$, и, следовательно, точка пересечения прямых σ_1 и ${\sigma_1}'$ не принадлежит $\mathcal{X}$. Действительно, предположим наоборот, скажем прямая σ_1 содержит $n+1$ точек из $\mathcal{X}$. Тогда обозначив $\mathcal{Y} = \mathcal{X} \setminus \sigma_1$, получаем, что $\#\mathcal{Y} \leq n-1$. По условию b) имеем, что $\mathcal{Y} \neq \emptyset$. Теперь из леммы 1.2 получаем, что множество $\mathcal{Y}$ существенно $(n-2)$-зависимо, что противоречит следствию 1.3. Следовательно, заключаем, что $\mathcal{X} = \sigma_2 \cap \sigma_n$, где σ_n имеет n различных линейных компонент, пересекающих σ_1 и σ_1' в n непересекающихся пар рассматриваемых точек, одна из σ_1, а другая из σ_1'.

Случай $m = 3$. В этом случае дано существенно n-зависимое множество $3n$ точек $\mathcal{X}$. По теореме 1.1 получаем, что либо $n+2$ точек из $\mathcal{X}$ принадлежат некоторой прямой σ_1, либо $2n+2$ точек из $\mathcal{X}$ принадлежат некоторой конике σ_2, либо $\mathcal{X} = \sigma_3 \cap \sigma_n$, где $\sigma_i \in \Pi_i$. Здесь нам достаточно исключить первые две возможности.

Предположим сначала, что $n+2$ точек принадлежат прямой σ_1. Тогда, обозначив $\mathcal{Y} = \mathcal{X} \setminus \sigma_1$, получаем, что $\#\mathcal{Y} \le 2n-2$. По условию b) имеем, что $\mathcal{Y} \neq \emptyset$. Теперь из леммы 1.2 получаем, что множество $\mathcal{Y}$ существенно $(n-1)$-зависимо. Следовательно, по следствию 1.2 получаем, что $n+1$ точек из $\mathcal{Y}$ принадлежат прямой σ_1'. Тогда, обозначая $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \setminus (\sigma_1 \cup \sigma_1')$, получаем что $\#\mathcal{Z} \le n-3$. По условию b) имеем, что $\mathcal{Z} \neq \emptyset$. Теперь из леммы 1.2 заключаем, что множество $\mathcal{Z}$ существенно $(n-2)$-зависимо, что противоречит следствию 1.3.

Далее, предположим, что $2n$ точек из $\mathcal{X}$ принадлежат конике σ_2. Тогда, обозначив $\mathcal{Y} = \mathcal{X} \setminus \sigma_2$, получаем, что $\#\mathcal{Y} \le n$, $\mathcal{Y} \neq \emptyset$. Теперь из леммы 1.2 получаем, что множество $\mathcal{Y}$ существенно $(n-2)$-зависимо. Далее, из следствия 1.2 получаем, что множество $\mathcal{Y}$ имеет ровно n коллинеарных точек, принадлежащих некоторой прямой σ_1. Тогда, обозначив $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \setminus \sigma_1$, имеем, что $\#\mathcal{Z} \le 2n$, $\mathcal{Z} \neq \emptyset$. Затем из леммы 1.2 заключаем, что множество $\mathcal{Z}$ существенно $(n-1)$ -зависимо. Сейчас мы легко находим, как выше, из следствия 1.4, что $\mathcal{Z}$ содержит ровно $2n$ точек, а в случае, когда коника σ_2 имеет две линейные компоненты, каждая из прямых содержит ровно n точек из $\mathcal{X}$.

Теперь из предложения 2.2 мы получаем, что $\mathcal{X}$ не является n-полным на $\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2$. Следовательно, существует многочлен σ_n, обращающийся в нуль во всех точках $\mathcal{X}$, но не на всем σ_3, в частности $\mathcal{X} \subset \sigma_3 \cap \sigma_n$. Осталось проверить, что σ_3 и σ_n не имеют общих компонентов.

Действительно, пусть σ является общей компонентой высшей степени. Предположим, что $\sigma \in \Pi_2$. Тогда имеем, что $\sigma_n = \sigma\sigma_{n-2}$, где $\sigma_{n-2} \in \Pi_{n-2}$. Теперь рассмотрим линейную компоненту σ_1, кривой σ_3, которая не является компонентой σ. На этой компоненте мы имеем ровно n точек из $\mathcal{X}$, которые находятся вне σ. Следовательно, эти n точек принадлежат кривым σ_1 и σ_{n-2}, что противоречит теореме Безу, так как эти кривые не имеют общей компоненты.

Наконец, предположим, что $\sigma \in \Pi_1$. Тогда имеем, что $\sigma_n = \sigma\sigma_{n-1}$, где $\sigma_{n-1} \in \Pi_{n-1}$. Рассмотрим компоненту $\sigma_k \in \Pi_k$, $k \leq 2$ в σ_3 отличную от σ. На этой компоненте мы имеем ровно kn точек, которые находятся вне σ. Следовательно, эти kn точки принадлежат кривым σ_k и σ_{n-1}, что противоречит теореме Безу, так как эти кривые не имеют общей компоненты.

Доказательство теоремы 3.1 в случае $m \geq 4$.

Доказательство части достаточности теоремы 3.1 будет завершено в теореме 3.5, в конце раздела.

Начнем обсуждение со случая неприводимой крывой.

Теорема 3.2. *Предположим, что неприводимая кривая σ_m степени m содержит множество $\mathcal{X}$ состоящее из mn точек. Тогда верны следующие утверждения:*

(a) Если множество точек $\mathcal{X}$ является κ-независимым, то оно является n-полным на кривой σ_m.

(b) Предположим, что $3 \leq m \leq n+2$. Тогда если множество $\mathcal{X}$ является n-полным на σ_m, то оно является κ-независимым.

Доказательство. Часть а): Предположим, что множество $\mathcal{X} \subset \sigma_m$ не является n-полным на σ_m. Следовательно, существует многочлен $\sigma_n \in \Pi_n$, обращающийся в нуль во всех точках $\mathcal{X}$, но не на всем σ_m. Тогда, поскольку кривая σ_m неприводима, то из теоремы Безу заключаем, что $\mathcal{X} = \sigma_m \cap \sigma_n$. Теперь из теоремы 2.1, а), мы получаем, что $\mathcal{X}$ является κ-зависимым. Точнее, из теоремы 2.1, а), получаем, что $\mathcal{X}$ существенно κ-зависимое, а из пункта с) получаем, что для любой точки $A \in \mathcal{X}$ множество точек $\mathcal{X} \setminus \{A\}$ есть κ-независимое.

Часть b): Предположим, что множество точек $\mathcal{X}$ является n-полным на σ_m. Тогда согласно предложению 2.2 мы имеем, что $\mathcal{X}$ содержит n-независимое подмножество $\mathcal{Y}$ состоящее из $d(m,n)$ точек. Так как $m \leq n+2$, то число точек в $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$ равно $mn - d(m,n) = mn - \frac{1}{2}m(2n-m+3) = \frac{1}{2}m(m-3)$. Таким образом, в случае $m = 3$ имеем, что $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ является $\kappa = n$-независимым. Теперь предположим, что $m > 3$.

Ввиду леммы 1.1 найдется кривая σ_{m-3} степени $m-3$, содержащая все точки $\mathcal{Z}$. Обозначим через $\bar{\mathcal{Z}}$ множество всех точек $\mathcal{X}$ на σ_{m-3}. Поскольку кривая σ_m неприводима, то она не имеет общей компоненты с σ_{m-3}. Далее мы имеем, что $\bar{\mathcal{Z}} \subset \sigma_m \cap \sigma_{m-3}$. Поэтому по теореме 2.1, b), множество $\bar{\mathcal{Z}}$ является $m+(m-3)-2 = (2m-5)$-независимым. С другой стороны, имеем что $\kappa = m+n-3 \geq 2m-5$.

Следовательно множество $\bar{\mathcal{Z}}$ является κ-независимым. Тогда множество $\mathcal{X} \setminus \bar{\mathcal{Z}} \subset \mathcal{X} \setminus \mathcal{Z} = \mathcal{Y}$ является n-независимым. По следствию 1.1 множество $\mathcal{X}$ является $\kappa = (m + n - 3)$-независимым. □

Сейчас из доказательства части a) (последнее предложение там) сразу получаем:

Следствие 3.1. *Предположим, что неприводимая кривая σ_m степени m содержит множество $\mathcal{X}$ состоящее из mn точек, которое не является n-полным. Тогда множество $\mathcal{X}$ есть существенно κ-зависимое и для любой точки $A \in \mathcal{X}$ множество $\mathcal{X} \setminus \{A\}$ есть κ-независимое.*

Из доказательства части b) теоремы 3.2 получаем следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Предположим, что (не обязательно неприводимая) кривая σ_m степени m, $m \geq 3$, содержит множество $\mathcal{X}$ состоящее из $\leq mn$ точек, которое является n-полным. Тогда множество $\mathcal{X}$ не является существенно κ-зависимым.*

Доказательство. Доказательство части b) теоремы 3.2 показывает, что существует кривая σ_{m-3} степени $m-3$, проходящая через все точки множества $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$. В случае $m = 3$ мы имеем что множество $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, и следовательно, есть $\kappa = n$-независимый. Теперь предположим, что $m > 3$. Покажем, что σ_{m-3} не содержит все множество $\mathcal{X}$. Действительно, если $\mathcal{X} \subset \sigma_{m-3}$, то многочлен σ_{m-3} обращается в нуль во всех точках множества $\mathcal{X}$, но не на всем σ_m. Следовательно, $\mathcal{X}$ не является n-полным на кривой σ_m, что является противоречием. Затем выберем точку $A \in \mathcal{X} \setminus \sigma_{m-3}$. Так как $A \in \mathcal{Y}$, рассмотрим фундаментальный многочлен $p^\star_{A,\mathcal{Y}}$. Теперь заметим, что $p := \sigma_{m-3} p^\star_{A,\mathcal{Y}}$ является κ-фундаментальным многочленом точки A в множестве $\mathcal{X}$. Следовательно, множество $\mathcal{X}$ не является существенно κ-зависимым. □

Теорема 3.3. *Предположим, что $m \leq n + 2$. Тогда любой набор точек $\mathcal{X}$, с $\#\mathcal{X} \leq m(\kappa + 3 - m) - 1 = mn - 1$, на неприводимой кривой σ_m, является κ-независимым.*

Доказательство. Случаи $m = 1$ и $m = 2$ очевидны. Предположим, что $m \geq 3$. Добавим одну точку $A \in \sigma_m \setminus \mathcal{X}$ в $\mathcal{X}$. Если полученное множество $\mathcal{Y} = \mathcal{X} \cup \{A\}$ является κ-независимым то $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ также является κ-независимым, и теорема доказана. Теперь предположим, что множество $\mathcal{Y}$ является κ-зависимым. Заметим, что согласно теореме 3.2, (b), оно не является n-полным на σ_m. Тогда из следствия 3.1 получаем, что $\mathcal{Y}$ существенно κ-зависимое и $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \setminus \{A\}$ является κ-независимым. □

Теорема 3.4. *Предположим, что кривая σ_m степени m, содержит множество точек $\mathcal{X}$ и $\#\mathcal{X} \le mn - 1 = m(\kappa + 3 - m) - 1$, где $m \le n + 2$. Предположим, также что σ_m либо неприводима, либо приводима, так что все ее неприводимые компоненты не пусты относительно $\mathcal{X}$. Тогда множество $\mathcal{X}$ не является существенно κ-зависимым.*

Доказательство. Случаи $m = 1$ и $m = 2$ очевидны. Предположим, что $m \ge 3$. Случай, когда σ_m неприводимо, непосредственно следует из теоремы 3.3. Теперь предположим, что кривая σ_m приводима, т.е. $\sigma_m = \sigma_{m_1} \cdots \sigma_{m_s}$, где компоненты σ_{m_i} неприводимы и имеют степень m_i.

Предположим от противного, что множество $\mathcal{X}$ существенно κ-зависимо. Рассмотрим множество $\mathcal{X}_i$, $i = 1, \dots, s$, определенное в (1.2). По условию имеем, что $\mathcal{X}_i \ne \emptyset$, $i = 1, \dots, s$. Так как $\mathcal{X}$ существенно κ-зависимо, из леммы 1.3 получаем, что множество $\mathcal{X}_i$ существенно $(\kappa - m + m_i)$-зависимо. Далее мы применяем теорему 3.3. Заметим, что условие $m \le n+2$ здесь сводится к $m_i \le (\kappa - m + m_i) - m_i + 5$, что выполняется, поскольку оно в свою очередь сводится к $m_i \le \kappa - m + 5 = n + 2$. Теперь из теоремы 3.3 мы заключаем, что $\#\mathcal{X}_i \ge m_i[(\kappa - m + m_i) - m_i + 3)] = m_i(\kappa - m + 3)$. Отсюда, суммируя, получаем $\#\mathcal{X} \ge m(\kappa - m + 3) = mn$, что является противоречием. □

Предложение 3.2. *Предположим, что $m \le n$. Если множество точек $\mathcal{X}$, с $\#\mathcal{X} \le mn$, существенно κ-зависимо, то все его точки лежат на кривой степени m или $n - 3$.*

Доказательство. Случаи $n = 1, 2, 3$, очевидны. Итак, предположим, что $n \ge 4$. Предположим обратное, что нет кривой степени m, содержащей все точки $\mathcal{X}$. Тогда существует m-корректное подмножество $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ (с $(1/2)m(m + 3) + 1$ точками).

Положим $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$. Далее собираемся показать, что

$$\#\mathcal{Z} \le \dim \Pi_{n-3} - 1. \tag{3.1}$$

Имеем, что $\nu := \#\mathcal{Z} - \dim \Pi_{n-3} + 1 \leq mn - (1/2)m(m+3) - 1 - (1/2)n(n-3) - 1 = (1/2)m(2n-m-3) - 1(1/2)m(2n-m-3) - (1/2)n(n-3) - 1 = -(1/2)(n-m-3)(n-m) - 1$.

Теперь очевидно, что $\nu < 0$ если $n = m$ или $n \geq m+3$, в то время как $\nu = 0$ если $n = m+1$ или $n = m+2$. Итак (3.1) доказана.

По лемме 1.1 существует кривая σ_{n-3} степени $n-3$, проходящая через все точки $\mathcal{Z}$. Мы утверждаем, что $\mathcal{X} \subset \sigma_{n-3}$. Предположим противное, что существует точка $A \in \mathcal{X} \setminus \sigma_{n-3}$. Вспомним, что множество $\mathcal{Y}$ является m-корректным, так что можем рассмотреть m-фундаментальный многочлен $p^{\star}_{A,\mathcal{Y}}$. Теперь остается заметить, что $p = \sigma_{n-3}p^{\star}_{A,\mathcal{Y}}$ является κ-фундаментальным многочленом точки A во множестве $\mathcal{X}$, что является противоречием. □

Предложение 3.3. *Предположим, что $m \leq n$. Если множество $\mathcal{X}$ состоящее из mn точек существенно κ-зависимо, то все точки $\mathcal{X}$ лежат на кривой степени m.*

Доказательство. Предположим от противного что $\mathcal{X}$ не лежит на кривой степени m. Сначала докажем, что существует число $m_0 > m$ такое, что

1) $m_0 \leq \frac{\kappa+3}{2}$, т.е. $m_0 \leq n_0 := \kappa + 3 - m_0$,

2) все точки множества $\mathcal{X}$ лежат на кривой степени m_0,

3) ни одна кривая степени меньше чем m_0 не содержит все точки $\mathcal{X}$.

Для этого применим теорему 3.2 для $\mathcal{X}$ и $m = m' = [\frac{\kappa+3}{2}]$. Если $m' = \frac{\kappa+3}{2}$ тогда получаем, что все точки множества $\mathcal{X}$ лежат на кривой $\sigma_{m'}$ степени m' или на кривой $\sigma_{n'-3}$ степени $n'-3$, где $n' := \kappa + 3 - m' = m'$. Отсюда заключаем, что все точки множества $\mathcal{X}$ лежат на кривой $\sigma_{m'}$.

Мы приходим к этому же заключению и в случае если $m' = \frac{\kappa+3}{2} - \frac{1}{2}$.

В обоих случаях имеем, что $m' \leq \frac{\kappa+3}{2}$, так что все точки множества $\mathcal{X}$ лежат на кривой $\sigma_{m'}$ степени m' где $m' \leq n'$.

Обозначим теперь через m_0 минимально возможный m' удовлетворяющий описанным выше условиям 1), 2) и 3), а через σ_{m_0}-соответствующую кривую степени m_0. Очевидно, что $m_0 > m$.

Теперь проверим, что $mn \leq m_0n_0 - 1$. Для этого рассмотрим параболу $y = x(\kappa + 3 - x)$. Легко увидеть, что

$$mn = m(\kappa - m + 3) < m_0(\kappa - m_0 + 3), \tag{3.2}$$

так как $y(m) = y(n)$ and $m < m_0 < n$.

Далее, предположим, что кривая σ_{m_0} неприводима. Ввиду (3.2) из теоремы 3.3 заключаем, что множество $\mathfrak{X}$ является κ-независимым, что противоречит условию теоремы. Заметим, что здесь $m_0 \leq n_0$.

Наконец, предположим, что σ_{m_0} является приводимой кривой, т.е. $\sigma_{m_0} = \sigma_{m_1} \cdots \sigma_{m_s}$, где компонента σ_{m_i} имеет степень m_i, и неприводима. Ввиду вышеуказанного условия 3) ни одна компонента не является пустой относительно множества точек $\mathfrak{X}$. Теперь по теореме 3.4 мы получаем, что $\mathfrak{X}$ не является существенно κ-зависимым, что является противоречием. □

Замечание 3.1. *Предположим, что $m \leq n$ и множество $\mathfrak{X}$ состоящее из mn точек существенно к-зависимо. Предположим также, что ни одна кривая степени меньше чем m не содержит все точки $\mathfrak{X}$. Пусть σ_m - кривая степени m из предложения 3.3, содержащая все точки $\mathfrak{X}$. Тогда, если эта кривая приводима: $\sigma_m = \sigma_{m_1} \cdots \sigma_{m_s}$, где компонента σ_{m_i} имеет степень m_i и неприводима, то ни одна точка $\mathfrak{X}$ не является точкой пересечения компонент, и каждая компонента σ_{m_i} содержит ровно $m_i(\kappa - m + 3)$ точек из $\mathfrak{X}$, которые являются существенно $(\kappa - m + m_i)$-зависимыми.*

Действительно, доказательство совпадает с последним абзацем доказательства предложения 3.3, где вместо m_0 берем m.

Теорема 3.5. *Предположим что для множества $\mathfrak{X}$ с $\#\mathfrak{X} = mn$, $m \leq n$, выполнены следующие условия:*

a) любая плоская кривая степени κ, содержащая все, кроме одной точки $\mathfrak{X}$, содержит все точки $\mathfrak{X}$,

b) ни одна кривая степени меньше чем m не содержит все точки $\mathfrak{X}$.

Тогда $\mathfrak{X}$ есть множество точек пересечения некоторых двух плоских алгебраических кривых степеней m и n, соответственно $\mathfrak{X} = \sigma_m \cap \sigma_n$.

Доказательство. Случаи $m = 1, 2, 3$, уже доказаны. Итак предположим что $m \geq 4$. Из предложения 3.3 имеем, что все точки множества $\mathfrak{X}$ лежат на кривой σ_m степени m. Затем из предложения 3.1 получаем, что множество $\mathfrak{X}$ не является n-полным на кривой σ_m. Поэтому существует многочлен σ_n степени n, обращающийся в нуль во всех точках $\mathfrak{X}$, но не на всем σ_m. Остается показать, что кривые σ_m и σ_n не имеют общей компоненты. Предположим обратное, что $\sigma_m = \sigma_l \sigma_{m-l}$ и $\sigma_n = \sigma_l \sigma_{n-l}$, где σ_i имеет степень i и кривые $\sigma_{m-l}, \sigma_{n-l}$ не имеют общей компоненты.

Обозначим через $\mathcal{Y} := \sigma_{m-l} \cap \sigma_{n-l} \cap \mathcal{X}$. С учетом условия b) имеем, что $\mathcal{Y} \neq \emptyset$. Пусть $A \in \mathcal{Y}$. По теореме Кэли-Бахараха точка A имеет фундаментальный многочлен $p^{\star}_{A,\mathcal{Y}}$ степени $m+n-2l-2$ во множестве $\mathcal{Y}$. Теперь заметим, что многочлен $p = \sigma_l p^{\star}_{A,\mathcal{Y}}$ степени $m+n-l-2 \le m+n-3$ есть фундаментальный многочлен точки A во множестве $\mathcal{X}$, что противоречит условию a). Теорема 3.5 доказана. □

Следствие 3.2. *Предположим что для множества $\mathcal{X}$ с $\#\mathcal{X} = mn$, $m \le n$, выполнены следующие условия:*

a) множество $\mathcal{X}$ является существенно к-зависимым,

b) множество $\mathcal{X}$ содержит $(m-1)$-корректное подмножество.

Тогда для любой точки $A \in \mathcal{X}$ множество точек $\mathcal{X} \setminus \{A\}$ есть к-независимым.

Abstract. We prove that a set $\mathcal{X}$, $\#\mathcal{X} = mn$, $m \le n$, is the set of intersection points of some two plain algebraic curves of degrees m and n, respectively, if and only if the following conditions are satisfied: a) Any curve of degree $m+n-3$ containing all but one point of $\mathcal{X}$, contains all of $\mathcal{X}$, b) No curve of degree less than m contains all of $\mathcal{X}$. The conditions a) and b) in the "only if" direction of this result follow from the Ceyley-Bacharach and Noether theorems, respectively.

Список литературы

[1] D. Eisenbud, M. Green, J. Harris, "Cayley-Bacharach theorems and conjectures", Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), **33**(3), 295 – 324 (1996).

[2] H. Hakopian, "On a class of Hermite interpolation problems", Adv. Comput. Math., **12**, 303 – 309 (2000).

[3] H. Hakopian, K. Jetter, G. Zimmermann, "Vandermonde matrices for intersection points of curves", Jaén J. Approx., **1**, 67 – 81 (2009).

[4] H. Hakopian, K. Jetter, G. Zimmermann, "A new proof of the Gasca-Maeztu conjecture for $n = 4$", J. Approx. Theory, **159**, 224 – 242 (2009).

[5] H. Hakopian, K. Jetter, G. Zimmermann, "The Gasca-Maeztu conjecture for $n = 5$", Numer. Math., **127**, 685 – 713 (2014).

[6] H. Hakopian and A. Malinyan, "Characterization of n-independent sets with no more than $3n$ points", Jaén J. Approx., **4**, 119 – 134 (2012).

[7] H. Hakopian and A. Malinyan, "On n-independent sets located on quartics", Proceedings of YSU, Phys. and Math. Sci., **1**, 6 – 12 (2013).

[8] L. Rafayelyan, "Poised nodes set constructions on algebraic curves", East J. Approx., **17**, 285 – 298 (2011).

[9] F. Severi, Vorlesungen über Algebraische Geometrie, Teubner, Berlin (1921). (Перевод на немецкий - E. Löffler)

Поступила 19 ноября 2018

После доработки 10 января 2019

Принята к публикации 24 января 2019