Известия НАН Армении, Математика, том 54, н. 2, 2019, стр. 3 – 16

О ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА В ПОЛУПЛОСКОСТИ В КЛАССЕ НЕПРЕРЫВНЫХ С ВЕСОМ ФУНКЦИЙ

Г. М. АЙРАПЕТЯН, С. А. АГЕКЯН

Ереванский государственный университет
E-mails: *hhayrapet@gmail.com*; *smbat.aghekyan@gmail.com*

Аннотация. Пусть $C(\rho)$ класс функций f таких, что $f(x)\rho(x)$ непрерывна на $(-\infty,+\infty)$. В верхней полуплоскости комплексной плоскости z рассматривается граничная задача Римана в весовом пространстве $C(\rho)$, $\rho(x) = \prod_{k=1}^{m}\left|\frac{x-x_k}{x+i}\right|^{\alpha_k}$, где α_k и x_k $k=1,2,...,m$ действительные числа. Требуется определить аналитическую в верхней и нижней полуплоскостях функцию $\Phi(z)$ так, чтобы имело место $\lim_{y\to+0}\|\Phi^+(x+iy)-a(x)\Phi^-(x-iy)-f(x)\|_{C(\rho)}=0$, где $f\in C(\rho)$, $a(x)\in C^\delta[-A;A]$ для любого $A>0$, причем $a(x)\neq 0$, существует $\lim_{|x|\to\infty}a(x)=a(\infty)$ и $|a(x)-a(\infty)|<C|x|^{-\delta}$, при $|x|\geq A>0$. Устанавливается нормальная разрешимость этой задачи.

MSC2010 number: 35J25.

Ключевые слова: задача Римана; весовое пространство; интеграл типа Коши; факторизация; разложение Лорана.

1. Введение

Пусть $\overline{C}(-\infty;+\infty)$ класс непрерывных на действительной оси функций $f(x)$ для которых существуют $f(+\infty), f(-\infty)$ и $f(+\infty)=f(-\infty)$. Соответственно через $\overline{C}^\delta(-\infty;+\infty)$ обозначим класс функций $f\in\overline{C}(-\infty;+\infty)$ таких, что для любого $A>0$, $|f(x_1)-f(x_2)|\leq M|x_1-x_2|^\delta$ при $x_1,x_2\in[-A,A]$. Через $\overline{C}(\rho)$ обозначим класс непрерывных на действителной оси функций f таких, что $f(x)\rho(x)\in\overline{C}(-\infty;+\infty)$, где

$$\rho(x)=\prod_{k=1}^{m}\left|\frac{x-x_k}{x+i}\right|^{\alpha_k}, \tag{1.1}$$

α_k и x_k, $k=1,2,...,m$ действительные числа.

Далее, пусть $\Pi^\pm$ верхная и нижняя полуплоскости комплексной плоскости C. Через A обозначим класс аналитических на $\Pi^+\cup\Pi^-$ фукций удовлетворяющих

[0]Исследование выполнено при подержке ГКН МОН РА в рамках совместного научного проекта NYSU-SFU-16/1 финансируемым международным конкурсом ТКН МОН РА-ЕГУ-ЮФУ РФ-2016.

условию $|\Phi(z)| \leq C|z|^{n_0}$, $|Imz| \geq y > 0$, где n_0 некоторое целое число, а C постоянная, зависящая, вообще говоря, от y.

Положим

$$n_k = \begin{cases} [\alpha_k], & \text{если } \alpha_k - \text{нецелое}, \\ [\alpha_k] - 1, & \text{если } \alpha_k - \text{целое}, \end{cases} \quad , \ k = 1, 2, ..., m$$

и $N = n_1 + n_2 + ... + n_m$.

В настоящей работе исследуется граничная задача Римана в пространстве $\overline{C}(\rho)$. Эта задача, когда $\alpha_k \geq 0$ формулируется следующим образом:

Задача R. Пусть $f \in \overline{C}(\rho)$. Определить функцию $\Phi \in A$ так, чтобы имело место

$$\lim_{y \to +0} \|\Phi^+(x+iy) - a(x)\Phi^-(x-iy) - f(x)\|_{\overline{C}(\rho)} = 0, \tag{1.2}$$

где $a(x) \subset \overline{C}^{\delta}(-\infty; +\infty)$, причем $a(x) \neq 0$, существует $\lim_{|x| \to \infty} a(x) = a(\infty)$ и $|a(x) - a(\infty)| < C|x|^{-\delta}$, при $|x| \geq A > 0$.

В настоящей работе устанавливается, что при $\alpha_k \geq 0$, $k = 1, 2, ..., m$ и $N + \mu \geq 0$, $\mu = inda(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ задача R нормально разрешима, т.е. однородная задача имеет $N + \mu$ линейно независимых решений. В случае $N + \mu < 0$ описаны необходимые и достаточные условия на f для того, чтобы она имела решение. Рассматривается также случай, когда α_k -произвольные действительные числа. В этом случае, когда $\alpha_k < 0$, для некоторых k, приходится изменить постановку граничной задачи. Устанавливается, что количество линейно независимых решений однородной задачи, вообще говоря, зависит также от поведения функции $a(x)$ в точках x_k.

Граничные задачи в весовых пространствах исследованы многими авторами (см. [1]-[8]). Задача R в единичном круге и в произвольной области, когда $\rho(t) \equiv 1$ исследована в работах [10], [11] и доказано что она нормально разрешима.

В случае когда $f \in L^1(\rho)$, в аналогичной постановке, задача R в единичном круге, исследована в работах [12], [13]. Аналогичные граничные задачи в классической постановке в $L^p(\rho)$, где ρ -весовая функция типа $|t - t_k|^{\delta}$, где $-\frac{1}{p} < \delta < p$ исследованы в работах [1], [2]. Эта же задача когда весовая функция удовлетворяет условию Макенхаупта в $L^p(\rho)(1 < p < \infty)$ исследована в работах [3], [4].

2. Предварителные леммы

Пусть $\mu = inda(t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$. Определим

$$S^+(z) = exp\Big\{\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{lna_1(t)dt}{t-z}\Big\}, \qquad z \in \Pi^+ \tag{2.1}$$

$$S^-(z) = \Big(\frac{z+i}{z-i}\Big)^{\mu} exp\Big\{\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{lna_1(t)dt}{t-z}\Big\}, \qquad z \in \Pi^- \tag{2.2}$$

где

$$a_1(t) = \left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{\mu} a(t), \quad ind a_1(t) = 0.$$

Для произвольной функции $f \in \overline{C}(\rho)$ положим

$$K(f,z) = \frac{(z+i)S(z)}{2\pi i R(z)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)R(t)}{(t+i)S^{+}(t)} \frac{dt}{t-z}, \quad z \in \Pi^{\pm} \tag{2.3}$$

где

$$R(z) = (z+i)^{-N} \prod_{k=1}^{m} (z-x_k)^{n_k}.$$

Тогда получаем $K(f, x+iy) - a(x)K(f, x-iy) = I_1(f,x,y) + I_2(f,x,y)$, где

$$I_1(f,x,y) = \frac{a(x)S(x+iy)(x+iy+i)}{2\pi i R(x+iy)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)R(t)}{(t+i)S^{+}(t)} \frac{y dt}{(t-x)^2+y^2} \tag{2.4}$$

$$I_2(f,x,y) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{S(x+iy)(x+iy+i)}{2\pi i R(x+iy)} - \frac{a(x)S(x-iy)(x-iy+i)}{2\pi i R(x-iy)}\right).$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)R(t)}{(t+i)S^{+}(t)} \frac{y dt}{t-x+iy} \tag{2.5}$$

Лемма 2.1. *Пусть $f \in \overline{C}(\rho)$. Тогда $\|I_1(f,x,y)\|_{\overline{C}(\rho)} \le M\|f\|_{\overline{C}(\rho)}$, где M постоянная, не зависящая от f и y.*

Доказательство. Положим $\tilde{R}(x) = \prod_{k=1}^{m} \left|\frac{x-x_k}{x+i}\right|^{\{\alpha_k\}}$, где $\{\alpha_k\}$ дробная часть числа $\alpha_k, k = 1,2,...,m$. Поскольку

$$c\tilde{R}(x) \le \frac{\rho(x)}{|R(x)|} \le C\tilde{R}(x), \tag{2.6}$$

то учитывая, что $S^{+}(z)$ ограничена, получаем

$$|I_1(f,x,y)\cdot\rho(x)| =$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi i} S(x+iy)(x+iy+i)\tilde{R}(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)R(t)}{(t+i)S^{+}(t)} \frac{y dt}{(t-x)^2+y^2}\right| \le$$

$$\le M|\tilde{R}(x)| \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{f(t)R(t)}{(t+i)}\right| \frac{|x+iy+i| y dt}{(t-x)^2+y^2} \le I_1^{(1)}(f,x,y) + I_1^{(2)}(f,x,y)$$

где

$$I_1^{(1)}(f,x,y) = M|\tilde{R}(x)| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)R(t)| y dt}{(t-x)^2+y^2}$$

$$I_1^{(2)}(f,x,y) = M|\tilde{R}(x)| \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{f(t)R(t)}{(t+i)S^{+}(t)}\right| \frac{|(x+iy+i)-(t+i)| y dt}{(t-x)^2+y^2}.$$

Имеем

$$I_1^{(1)}(f,x,y) \le M_1|\tilde{R}(x)| \cdot \max_{x\in(-\infty;+\infty)} \left\{|f(x)||R(x)|\right\}.$$

Поскольку $|(x+iy+i)-(t+i)| = |t-x-iy|$, получаем

$$I_1^{(2)}(f,x,y) \leq M_2|\tilde{R}(x)| \cdot \max_{x\in(-\infty;+\infty)} \Big\{|f(x)||R(x)|\Big\} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ydt}{|t+i||t-x+iy|} \leq$$

$$\leq M_2|\tilde{R}(x)| \cdot \max_{x\in(-\infty;+\infty)} \Big\{|f(x)||R(x)|\Big\} \Big\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ydt}{|t+i|^2} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ydt}{|t-x+iy|^2} \Big\}.$$

Учитывая, что $|R(x)| \cdot \tilde{R}(x) = \rho(x)$, получаем

$$I_1^{(1)}(f,x,y) \leq M_1\|f\|_{\overline{C}(\rho)}; \quad I_1^{(2)}(f,x,y) \leq M_2\|f\|_{\overline{C}(\rho)}.$$

Лемма 2.1 доказана. □

Лемма 2.2. *Пусть $f \in \overline{C}(\rho)$. Тогда $\|I_2(f,x,y)\|_{\overline{C}(\rho)} \leq M\|f\|_{\overline{C}(\rho)}$, где M постоянная, не зависящая от f и y.*

Доказательство. Из (2.5) имеем $I_2(f,x,y)\cdot\rho(x) = J_1(f,x,y) + J_2(f,x,y)$, где

$$J_1(f,x,y) = \frac{\rho(x)}{2\pi i} \cdot \frac{S(x+iy)(x+iy+i) - a(x)S(x-iy)(x-iy+i)}{R(x+iy)} \cdot$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)R(t)}{(t+i)S^+(t)} \frac{ydt}{t-x+iy}$$

$$J_2(f,x,y) = \frac{\rho(x)}{2\pi i} \cdot a(x)S(x-iy)(x-iy+i) \cdot \left(\frac{1}{R(x+iy)} - \frac{1}{R(x-iy)}\right) \cdot$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)R(t)}{(t+i)S^+(t)} \frac{ydt}{t-x+iy}.$$

Поскольку

$$S^+(x+iy)(x+iy+i) - a(x)S^-(x-iy)(x-iy+i) =$$

$$= (x+i)(S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)) + iy(S^+(x+iy) + a(x)S^-(x-iy))$$

и

$$|S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)| < \frac{Ay}{|x+i|^{2\delta}}$$

(см. [9]) получаем

$$|J_1(f,x,y)| \leq C|\tilde{R}(x)| \cdot \frac{y^\delta}{|x+i|^{2\delta-1}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{f(t)R(t)}{(t+i)S^+(t)}\right| \frac{ydt}{|t-x+iy|} +$$

$$+Cy|\tilde{R}(x)||S^+(x+iy) + a(x)S^-(x-iy)| \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{f(t)R(t)}{(t+i)S^+(t)}\right| \frac{ydt}{|t-x+iy|}.$$

Учитывая, что функции S^+, S^- ограничены, и $a(x) \in \overline{C}^\delta(-\infty;+\infty)$, из (2.6) получаем

$$|J_1(f,x,y)| \leq M_1\|f\|_{C(\rho)},$$

$$|J_2(f,x,y)| \leq C\rho(x)\cdot(|x+i|+y)\cdot\left|\frac{1}{R(x+iy)} - \frac{1}{R(x-iy)}\right|.$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{f(t)R(t)}{(t+i)S^+(t)} \right| \frac{ydt}{|t-x+iy|}.$$

Так как

$$\rho(x) \cdot \left| \frac{1}{R(x+iy)} - \frac{1}{R(x-iy)} \right| = o\left(\frac{1}{|x|}\right),$$

то $|J_2(f,x,y)| \le M_2 \|f\|_{\overline{C}(\rho)}$. □

3. Задача R при $\alpha_k \ge 0$

Теорема 3.1. *Пусть $f \in \overline{C}(\rho)$ и $\Phi(z) \in A$ является решением задачи R. Тогда а) Если $N+\mu \ge -1$, то $\Phi(z)$ для $z \in \Pi^{\pm}$ представима в виде*

$$(3.1) \quad \Phi(z) = \frac{(z+i)S(z)}{2\pi i R(z)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)R(t)}{S^+(t)(t+i)} \frac{dt}{t-z} + (z+i)S(z)(R(z))^{-1}G(\frac{1}{z+i}),$$

где G - полином порядка $N+\mu$ $(N+\mu > 0)$ причем $G(\omega) \equiv 0$, если $N+\mu = 0$ или $N+\mu = -1$.

б) Если $N+\mu < -1$, то $\Phi(z)$ представима в виде (3.1), где $G \equiv 0$ и функция f удовлетворяет условиям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)R(t)}{S^+(t)} \frac{dt}{(t+i)^{k+1}} = 0, \qquad k = 1, 2, ..., -(N+\mu) - 1$$

Доказательство. а) Пусть $N+\mu > 0$. Положим

$$(3.2) \qquad \Phi^+(x+iy) - a(x)\Phi^-(x-iy) = f_y(x).$$

Умножая (3.2) на $R(x)S^+(x)(x+i)^{-1}$, получаем

$$\frac{R(x)\Phi^+(x+iy)}{S^+(x)(x+i)} - \frac{R(x)\Phi^-(x-iy)}{S^-(x)(x+i)} = \frac{R(x)f_y(x)}{S^+(x)(x+i)}$$

Обозначив

$$\Phi_y^+(z) = \frac{R(z)\Phi^+(z+iy)}{S^+(z)(z+i)}, \qquad z \in \Pi^+,$$

$$\Phi_y^-(z) = \frac{R(z)\Phi^-(z-iy)}{S^-(z)(z+i)}, \qquad z \in \Pi^-,$$

получаем

$$(3.3) \qquad \Phi_y^+(x) - \Phi_y^-(x) = \frac{R(x)f_y(x)}{S^+(x)(x+i)}.$$

Если $N+\mu \ge -1$, то функция $\Phi_y^-(z)$ имеет полюс порядка $N+\mu+1$ в точке $z = -i$.

Представим (3.3) в виде

$$(3.4) \qquad \Phi_y^+(x) - \tilde{\Phi}_y^-(x) = \frac{R(x)f_y(x)}{S^+(x)(x+i)} + G_y(x),$$

где $G_y(z)$ главная часть разложения Лорана функции $\Phi_y^-(z)$ в точке $z = -i$

$$G_y(z) = \frac{A_1(y)}{z+i} + \ldots + \frac{A_{N+\mu+1}(y)}{(z+i)^{N+\mu+1}},$$

а $\tilde{\Phi}_y^-(z) = \Phi_y^-(z) - G_y(z)$. Из (3.4) имеем

$$\Phi^{\pm}(z) = \frac{(z+i)S(z)}{2\pi i R(z)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_y(t)R(t)}{S^+(t)(t+i)} \frac{dt}{t-z} +$$

(3.5) $$+(z+i)S(z)(R(z))^{-1}[G(z) + P_y(z)]), \quad z \in \Pi^{\pm}$$

где $P_y(z)$ некоторый полином. Докажем, что $P_y \equiv 0$. Действительно, имеем

$$\Phi^+(x+iy) - a(x)\Phi^-(x-iy) = I_1(f,x,y) - I_2(f,x,y) +$$

$$+(x+iy+i)S^+(x+iy)G(\frac{1}{x+iy+i}) - (x-iy+i)S^+(x-iy)G(\frac{1}{x-iy+i}) +$$

$$+(x+iy+i)S^+(x+iy)P_y(x+iy) - (x-iy+i)S^+(x-iy)P_y(x-iy) = f_y(x),$$

где I_1, I_2 определяются из (2.4) и (2.5).

Учитывая, что (см.[9]) для некоторой постоянной A

$$\left\| \frac{S^+(x+iy)}{(x+iy+i)^k} - a(x)\frac{S^-(x-iy)}{(x-iy+i)^k} \right\|_C \leq A\, y, \quad k \geq 1,$$

и

$$\left\| \frac{1}{R(x+iy)} - \frac{1}{R(x-iy)} \right\|_C \to 0 \text{ при } y \to +0,$$

получаем

(3.6) $$\left\| \frac{S^+(x+iy)}{R(x+iy)(x+iy+i)^k} - a(x)\frac{S^-(x-iy)}{R(x-iy)(x-iy+i)^k} \right\|_C \leq A\, y, k \geq 1.$$

Так, как $f \in \overline{C}(\rho)$, то в силу лемм 2.1 и 2.2 и (3.6) $P_y \equiv 0$.

Переходя к пределу в (3.5) при $y \to +0$, для $z \in \Pi^{\pm}$ будем иметь

$$\Phi^{\pm}(z) = \frac{(z+i)S(z)}{2\pi i R(z)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)R(t)}{S^+(t)(t+i)} \frac{dt}{t-z} + (z+i)S(z)(R(z))^{-1}G(z),$$

где $G(z)$ главная часть разложения Лорана функции $R(z)\Phi^-(z)(S^-(z)(z+i))^{-1}$ в точке $z = -i$.

б) Если $N+\mu < -1$ то $\Phi_y^-(z)$ голоморфна в Π^-, поэтому ее главная часть обращается в нуль, т.е. $G(z) \equiv 0$. С другой стороны, функция$R(z)\Phi^-(z)(S^-(z)(z+i))^{-1}$ имеет ноль порядка $|N+\mu-1|$ в точке $z = -i$. Следовательно $f(x)$ удовлетворяет условиям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)R(t)}{S^+(t)} \frac{dt}{(t+i)^{k+1}} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, -(N+\mu) - 1$$

Теорема 3.1 доказана. □

Через $\overline{C}^{\delta}(\rho)$ обозначим класс функций на $(-\infty, +\infty)$ таких, что $f\rho \in \overline{C}^{\delta}(-\infty, +\infty)$.

Теорема 3.2. *Пусть $f \in \overline{C}(\rho)$. Тогда*

а) Если $N+\mu \geq -1$, то общее решение задачи R можно представить в виде

$$\Phi(z)=\frac{(z+i)S(z)}{2\pi i R(z)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)R(t)}{S^{+}(t)(t+i)}\frac{dt}{t-z}+$$

$$+(z+i)S(z)(R(z))^{-1}G(\frac{1}{z+i}),\qquad z\in\Pi^{\pm} \tag{3.7}$$

где $G(z)$ полином порядка $N+\mu$, если $N+\mu>0$, $G(\omega)\equiv 0$ при $N+\mu=0$, или $N+\mu=-1$.

б) Если $N+\mu<-1$, то задача разрешима тогда и только тогда, когда $f(t)$ удовлетворяет условиям

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)R(t)}{S^{+}(t)}\frac{dt}{(t+i)^{k+1}}=0,\qquad k=1,2,...,-(N+\mu)-1$$

Общее решение можно представить в виде (3.7), где $G(z)\equiv 0$.

Доказательство. Пусть $f_n(x)\in \overline{C}^{\delta}(\rho)$ последовательность финитных функций таких, что

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n(x)-f(x)\|_{\overline{C}(\rho)}=0$$

Для любого n и $z\in\Pi^{\pm}$ положим

$$\Phi_n(z)=\frac{(z+i)S(z)}{2\pi i R(z)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_n(t)R(t)}{S^{+}(t)(t+i)}\frac{dt}{t-z}+(z+i)S(z)(R(z))^{-1}G\left(\frac{1}{z+i}\right),$$

Докажем, что

$$\lim_{y\to+0}\|\Phi_n^{+}(x+iy)-a(x)\Phi_n^{-}(x-iy)-f_n(x)\|_{\overline{C}(\rho)}=0. \tag{3.8}$$

Из формулы Сохоцкого-Племеля имеем

$$\Phi_n^{+}(x+iy)-a(x)\Phi_n^{-}(x-iy)=f_n(x),\qquad x\in(-A,A) \tag{3.9}$$

Если $|x|>A$, то учитывая что

$$\Phi_n^{+}(x+iy)-a(x)\Phi_n^{-}(x-iy)=$$

$$=\frac{S^{+}(x+iy)(x+iy+i)}{2\pi i R(x+iy)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_n(t)R(t)}{S^{+}(t)(t+i)}\frac{ydt}{(t-x)^2+y^2}+$$

$$+\Big(\frac{S(x+iy)(x+iy+i)}{2\pi i R(x+iy)}-\frac{a(x)S(x-iy)(x-iy+i)}{2\pi i R(x-iy)}\Big)\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)R(t)}{(t+i)S^{+}(t)}\frac{ydt}{t-x+iy}+J(x,y),$$

где

$$J(x,y)=\sum_{k=1}^{\mu}c_k[\frac{S^{+}(x+iy)}{R(x+iy)(x+iy+i)^k}-\frac{S^{-}(x-iy)}{R(x-iy)(x-iy+i)^k}],$$

получаем

$$\max_{|z|>A} \rho(x)|\Phi_n^+(x+iy) - a(x)\Phi_n^-(x-iy) - f_n(x)| \le J_1(x,y) + J_2(x,y) + J_3(x,y),$$

где

$$J_1(x,y) = \max_{|z|>A} \rho(x)\Big|\frac{S^+(x+iy)(x+iy+i)}{2\pi i R(x+iy)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_n(t)R(t)}{S^+(t)(t+i)} \frac{ydt}{(t-x)^2+y^2}\Big|$$

$$J_2(x,y) = \max_{|z|>A} \rho(x)\Big|\Big(\frac{S(x+iy)(x+iy+i)}{2\pi i R(x+iy)} - \frac{a(x)S(x-iy)(x-iy+i)}{2\pi i R(x-iy)}\Big)\cdot$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)R(t)}{(t+i)S^+(t)} \frac{ydt}{t-x+iy}\Big|$$

$$J_3(x,y) = \max_{|z|>A} \rho(x)|(x+iy+i)S^+(x+iy)(R(x+iy))^{-1}G\Big(\frac{1}{x+iy+i}\Big) -$$

$$-(x-iy+i)S^+(x-iy)(R(x-iy))^{-1}G\Big(\frac{1}{x-iy+i}\Big)|$$

Учитывая, что $f_n(x) = 0, |x| > A$, и $\frac{\rho(z)}{|R(z)|} = O(1), z \in \Pi^+ \cup \Pi^-$, будем иметь

$$J_1(x,y) \le C \max_{|z|>A}\{y|x+iy+i| \int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{f_n(t)}{S^+(t)(t+i)}| \frac{ydt}{(t-x)^2+y^2}\} \le$$

$$\le C\|f_n\|_C \max_{|z|>A}\{y|x+iy+i| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t-x)^2}\} = C_1\|f_n\|_C \max_{|z|>A}\{\frac{y|x+iy+i|}{|x^2-A^2|}\},$$

где $C = const$. Следовательно, $J_1(x,y)$ стремится к нулю при $y \to +0$. Аналогично доказательству леммы 2.2 получаем, что $J_2(x,y)$ тоже стремится к нулю, при $y \to +0$. Учитывая оценку (3.6) для $J_3(x,y)$, и равенство (3.9), получаем (3.8). Используя леммы 2.1 и 2.2 и (3.8), будем иметь

$$\|\Phi^+(x+iy) - a(x)\Phi^-(x-iy) - f(x)\|_{\overline{C}(\rho)} \le \|\Phi_n^+(x+iy) - a(x)\Phi_n^-(x-iy) - f_n(x)\|_{\overline{C}(\rho)} +$$

$$+\|f_n(x) - f(x)\|_{\overline{C}(\rho)} + \|[\Phi_n^+(x+iy) - \Phi^+(x+iy)] - a(x)[\Phi_n^-(x-iy)] - \Phi^-(x-iy)\|_{\overline{C}(\rho)} \le$$

$$\le \|\Phi_n^+(x+iy) - a(x)\Phi_n^-(x-iy) - f_n(x)\|_{\overline{C}(\rho)} + 2\|f_n(x) - f(x)\|_{\overline{C}(\rho)}.$$

При $y \to +0$, получаем $\lim_{y\to+0}\|\Phi^+(x+iy) - a(x)\Phi^-(x-iy) - f(x)\|_{\overline{C}(\rho)} = 0$. Теорема 3.2 доказана. □

4. Задача R для произвольных α_k

Положим

$$\rho_y(x) = \begin{cases} \rho(x), & \text{если } \alpha_k > 0,\ k = 1,2,...,m \\ |x+i|^{-\beta}\prod_{k=1}^{p}|x-x_k|^{\alpha_k}\cdot\prod_{k=1}^{q}|x+iy-x_k|^{\overline{\alpha}_k}, \end{cases}$$

где $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_m$, $p + q = m$, $\alpha_k > 0$ и $\overline{\alpha}_k < 0$.

Функцию $a(x)$ отнесем к классу R^α $(a(x) \in R^\alpha)$, если

$$\lim_{y \to +0} \|S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)\|_{\overline{C}(\rho_y)} = 0. \tag{4.1}$$

К примеру, пусть

$$a(x) = cos^\theta\Big(\frac{\pi}{2}\Big(\prod_{k=1}^{m}\Big(1 - \frac{x_k(x-\overline{z}_0)}{e^{i\alpha}(x-z_0)}\Big)^{\lambda_k}\Big)\Big)$$

где θ произвольное целое число, а λ_k неотрицательные целые числа. Имеем $\theta = inda(x)$ и, если $\lambda_k > -n_k - 1$, то $(a(x) \in R^\alpha)$. Действительно, пусть $\theta \geq 0$, тогда $S^+(z) \equiv 1$ и

$$S^-(z) = cos^{-\theta}\Big(\frac{\pi}{2}\Big(\prod_{k=1}^{m}\Big(1 - \frac{x_k(z-\overline{z}_0)}{e^{i\alpha}(z-z_0)}\Big)^{\lambda_k}\Big)\Big),$$

$$|S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)| \leq$$

$$\leq \Big|cos^\theta\Big(\frac{\pi}{2}\Big(\prod_{k=1}^{m}\Big(1 - \frac{x_k(x-iy-\overline{z}_0)}{e^{i\alpha}(x-iy-z_0)}\Big)^{\lambda_k}\Big)\Big) - cos^\theta\Big(\frac{\pi}{2}\Big(\prod_{k=1}^{m}\Big(1 - \frac{x_k(x-\overline{z}_0)}{e^{i\alpha}(x-z_0)}\Big)^{\lambda_k}\Big)\Big)\Big| \leq$$

$$\leq \Big|\prod_{k=1}^{m}\Big(\frac{e^{i\alpha}(x-iy-z_0)}{(x-iy-\overline{z}_0)} - x_k\Big)^{\lambda_k} - \prod_{k=1}^{m}\Big(\frac{e^{i\alpha}(x-z_0)}{(x-\overline{z}_0)} - x_k\Big)^{\lambda_k}\Big|.$$

Поэтому

$$|S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)|\rho_y(x) \leq$$

$$\leq Cy|x_k - x - iy|^{\lambda_k}\Big|\frac{e^{i\alpha}(x-iy-z_0)}{(x-iy-\overline{z}_0)} - x_k\Big|^{n_k-1}|x_k - x|^{\alpha_k - n_k}$$

Так как $\lambda_k + n_k > -1$, то $a(x) \in R^\alpha$. Аналогично устанавливается, что $a(x) \in R^\alpha$ при $\theta < 0$.

Лемма 4.1. *Пусть $a(x) \in R^\alpha$ и $\alpha_k \leq -2$, $k \in 1, 2, ..., m$. Если*

$$P(z) = A_1(x_k - z) + A_2(x_k - z)^2 + ... + A_{-n_k-1}(x_k - z)^{-n_k-1}$$

удовлетворяет условиям

$$\lim_{y \to +0}\max_{|x-x_k|<\delta}\{|S^+(x+iy)P(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)P(x-iy)||\rho_y|\} = 0$$

для некоторых $0 < \delta < \min|x_k - x_j|, k \neq j$ то $P(z) \equiv 0$.

Доказательство. Так как

$$S^+(x+iy)P(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)P(x-iy) = I_1(x,y) + I_2(x,y),$$

где

$$I_1(x,y) = (S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy))P(x+iy),$$

$$I_2(x,y) = a(x)S^-(x-iy)(P(x+iy) - P(x-iy)),$$

то из условий леммы 4.1 имеем

$$\lim_{y\to+0}\|I_1(x,y)\|_{C(\rho_y)}=0.$$

Пусть $A_1\neq 0$ тогда имеем $|P(x+iy)-P(x-iy)|>y$, где $|x-x_k|<Cy, C>0$. Поэтому

$$\max_{x\in(-\infty,+\infty)}\{|I_2(x,y)|\rho_y\}\geq\max_{|x_k-(x+iy)|<cy}\frac{y}{|x_k-(x+iy)|^{-n_k}\cdot|x_k-x|^{n_k-\alpha_k}}$$

Так как $|x_k-(x+iy)|=O(y)$ при $|x_k-x|<Cy$, получаем

$$\max_{|x_k-(x+iy)|<cy}\{|I_2(x,y)|\rho_y\}\geq y^{n_k+1}\max_{0<x<Cy}|x_k-x|^{\alpha_k-n_k}\geq y^{n_k+1}\delta^{\alpha_k-n_k}$$

Учитывая, что $\alpha_k\leq-2,\ k\in 1,2,...,m$ получаем $A_1=0$.

Пусть $A_j\neq 0$, $A_1=A_2=...=A_{j-1}=0$. Тогда

$$|P(x+iy)-P(x-iy)|>y|x_k-x|^{j-1},\text{ при } ky^2<|x_k-(x+iy)|<Cy.$$

Поэтому

$$\max_{|x-x_k|<\delta}\{|I_2(x,y)|\rho_y\}\geq\max_{|x_k-(x+iy)|<cy}\frac{Cy|x_k-x|^{j+\alpha_k-n_k-1}}{|x_k-(x+iy)|^{-n_k}}\geq Cy^{n_k+1}\delta^{j+\alpha_k-n_k-1}$$

Так как $n_k+1<0$ и учитывая, что $\delta>0$ постоянное число, получаем

$$\lim_{y\to+0}\|I_2(x,y)\|_{C(\rho_y)}>0.$$

Лемма 4.1 доказана. □

В дальнейшем предполагаем, что $\alpha_1\leq\alpha_2\leq...\leq\alpha_m,\ \alpha_m\leq-1$.

Лемма 4.2. *Пусть $k_j\geq n_j, j=1,2...m$. Тогда*

$$\lim_{y\to+0}\|S^+(x+iy)\prod_{j=1}^m|x_j-(x+iy)|^{k_j}-a(x)S^-(x-iy)\prod_{j=1}^m|x_j-(x-iy)|^{k_j}\|_{C(\rho)}=0$$

Доказательство. Имеем

$$S^+(x+iy)\prod_{j=1}^m|x_j-(x+iy)|^{k_j}-a(x)S^-(x-iy)\prod_{j=1}^m|x_j-(x-iy)|^{k_j}=I_1(x,y)+I_2(x,y)$$

где

$$I_1(x,y)=(S^+(x+iy)-a(x)S^-(x-iy))\prod_{j=1}^m|x_j-(x+iy)|^{k_j}$$

$$I_2(x,y)=a(x)S^-(x-iy)\Big(\prod_{j=1}^m|x_j-(x+iy)|^{k_j}-\prod_{j=1}^m|x_j-(x-iy)|^{k_j}\Big)$$

Учитывая, что $|S^+(x+iy)-a(x)S^-(x-iy)|<Cy^\delta$, $\delta>0$, получаем

$$\max_{x\in(-\infty,+\infty)}\{|I_1(x,y)|\rho_y(x)\}\leq Cy^\delta\prod_{j=1}^m\max_{\{x_j\}}\Big\{\frac{|x_j-(x+iy)|^{k_j}|x-x_j|^{\alpha_j-n_j}}{|x_j-(x+iy)|^{-n_j}}\Big\}.$$

Так как $k_j \geq -n_j$ и $\alpha_j - n_j > 0$, то

$$\frac{|x_j - (x+iy)|^{k_j}|x-x_j|^{\alpha_j - n_j}}{|x_j - (x+iy)|^{-n_j}} \leq C.$$

Получаем $\lim_{y\to+0} \|I_1(x,y)\|_{C(\rho)} = 0$. Далее имеем

$$\left|\prod_{j=1}^{m} |x_j - (x+iy)|^{k_j} - \prod_{j=1}^{m} |x_j - (x-iy)|^{k_j}\right| \leq$$

$$\leq \left||x_j - (x+iy)|^{k} - |x_j - (x-iy)|^{k}\right| < Cy|x_j - (x+iy)|^{k-1},$$

где $k = min\{k_j\}$. Поэтому

$$\max_{x\in(-\infty,+\infty)} \{|I_2(x,y)|\rho_y(x)\} \leq Cy \sum_{j=1}^{m} \max_{\{x_j\}} \left\{\frac{|x_j-(x+iy)|^{k-1}|x-x_j|^{\alpha_j-n_j}}{|x_j-(x+iy)|^{-n_j}}\right\}$$

учитывая, что

$$\frac{|x_j - (x+iy)|^{k-1}}{|x_j - (x+iy)|^{-n_j}} = o\left(\frac{1}{y}\right)$$

при $y \to \infty$, получаем $\lim_{y\to+0} \|I_2(x,y)\|_{C(\rho)} = 0$. □

Лемма 4.3. *Пусть $\alpha_k \leq -2$, $1 \leq k \leq m$, $a(t) \in R^{\alpha}$ и*

$$\Phi_k(z) = |x_k - z|^{-n_k} \prod_{j=1}^{m} |x_j - z|^{n_j}.$$

Если функция

$$\varphi_k(z) = \left(\frac{A_1}{(x_k - z)} + \frac{A_2}{(x_k-z)^2} + ... + \frac{A_{-n_k}}{(x_k - z)^{-n_k}}\right)\Phi_k(z)$$

удовлетворяет условию

$$\max_{x\in(-\infty,+\infty)} \{|S^+(x+iy)\phi_k^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)\phi_k^-(x-iy)|\rho_y(x)\} \to 0,$$

то $\varphi_k(z)$ можно представить в виде $\varphi_k(z) = A_0 + (x_k - z)^{-n_k}\Phi_0(z)$, где $\Phi_0(z)$ аналитическая функция в точке x_k, а A_0 некоторое комплексное число.

Доказательство. Из леммы 4.2 имеем

$$\max_{|x_k - x|<\epsilon} \{|(x_k - (x+iy))^{-n_k} S^+(x+iy)\varphi_k^+(x+iy) -$$

$$-a(x)(x_k - (x-iy))^{-n_k} S^-(x-iy)\varphi_k^-(x-iy)|\rho_y(x)\} \to 0, \text{ при } y \to +0.$$

Заключаем, что функция

$$\phi_k(z) = \varphi_k'(x_k) + ... + \frac{\varphi_k^{-n_k-1}(x_k)(x_k - z)^{-n_k-1}}{(-n_k)!}$$

также удовлетворяет условию

$$\max_{|x_k - x|<\epsilon} \{|S^+(x+iy)\phi_k^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)\phi_k^-(x-iy)|\rho_y(x)\} \to 0.$$

Используя лемму 4.1 числа $A_1, A_2, ..., A_{-n_k-1}$ можно однозначно определить. Выбираем произвольное число A_{-n_k}, остальные числа $A_1, A_2, ..., A_{-n_k-1}$ можно однозначно определить. Учитывая леммы 4.1 и 4.2, получаем доказательство леммы 4.3. □

Теорема 4.1. *Пусть существует k такое, что $1 \leq k \leq m$, $\alpha_k < 0$ и $a(x) \in R^{\nu}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) если $N + \mu \geq 0$, то общее решение задачи R можно представить в виде

$$\Phi(z) = K(f, z) + S(z)\Big(A_0 + \frac{P(z)}{R(z)}\Big), \tag{4.2}$$

где $K(f, z)$ определяется формулой (2.3), A_0 - произвольное комплексное число, когда $\mu > 0$ и $A_0 = 0$ при $\mu \leq 0$. $P(z)$ полином порядка $N + \mu - 1$.

б) если $N + \mu < 0$ и $\mu > 0$, то общее решение задачи R представимо в виде $\Phi(z) = K(f, z) + A_0 S(z)$, где A_0 - произвольное число и $f(x)$ удовлетворяет условиям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)R(t)}{S^+(t)} \frac{dt}{(t+i)^{k+1}} = 0, \quad k = 1, 2, ..., -(N+\mu) - 1 \tag{4.3}$$

в) если $N + \mu < 0$ и $\mu \leq 0$, то решение задачи R единственно, представимо в виде $\Phi(z) = K(f, z) + A_0 \Phi_0(z)$, где $\Phi_0(z)$ - решение однородной задачи R

$$A_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)R(t)}{S^+(t)} \frac{dt}{(t+i)^{N+1}}$$

и $f(t)$ удовлетворяет условиям (4.3) если $\mu \neq -N - 1$.

Доказательство. а) Предположим, что $\Phi(z)$ решение задачи R при заданной $f \in \overline{C}(\rho)$. Тогда из (1.2) имеем

$$\lim_{y \to +0} \max_{x \in (-\infty, +\infty)} \Big| \frac{\Phi^+(x+iy)}{S^+(x)} - \frac{\Phi^-(x-iy)}{S^-(x)} - \frac{f(x)}{S^+(x)} \Big| |R(x)| = 0$$

Обозначим

$$\Phi_y^+(z) = \frac{R(z)\Phi^+(z+iy)}{S^+(z)}, \qquad z \in \Pi^+$$

$$\Phi_y^-(z) = \frac{R(z)\Phi^-(z-iy)}{S^-(z)}, \qquad z \in \Pi^-$$

получаем

$$\Phi_y^+(x) - \Phi_y^-(x) = \frac{R(x) f_y(x)}{S^+(x)}, \tag{4.4}$$

где $\Phi_y^+(z)$ имеет полюс порядка $-n_k$ в точке $z = x_k - iy$. Пусть

$$G_{ky}(z) = \frac{A_1^k(y)}{(t_k + iy - z)} + \frac{A_2^k(y)}{(t_k + iy - z)^2} + ... + \frac{A_{-n_k}^k(y)}{(t_k + iy - z)^{-n_k}}$$

главная часть разложения Лорана функции $\Phi_y^+(z)$ в окрестности точки $x_k + iy$. Тогда будем иметь

$$\Phi_y^+(x) - \Big(\Phi_y^-(x) - \sum_{k=1}^m G_{ky}(x)\Big) = f_y(x) + \sum_{k=1}^m G_{ky}(x) \tag{4.5}$$

Пусть теперь $N + \mu \geq 0$. Тогда

$$\Phi_y(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_y(t)}{S^+(t)}\frac{dt}{t-z} + \sum_{k=1}^m G_{ky}(z) + P_y(z),$$

где $P_y(z)$ некоторый полином порядка $N + \mu - 1$, если $N + \mu > 0$ и $P_y(z) \equiv 0$, если $N + \mu = 0$. Так как $f_y(x) \to f(x) \cdot R(x)(S^+(x))^{-1}$ в C, то

$$\Phi(z) = K(f, z) + R(z)S(z)\sum_{k=1}^m G_k(z) + P(z)$$

где

$$G_k(z) = \frac{C_1^k}{(t_k - z)} + \frac{C_2^k}{(t_k - z)^2} + ... + \frac{C_{-n_k}^k}{(t_k - z)^{-n_k}}, \;\; k = 1, 2, ..., m$$

Так как функция $\frac{S(z)P(z)}{R(z)}$ удовлетворяет (1.2) при $\rho = \rho_y$, то $\frac{1}{R(z)}\sum_{k=1}^m G_k(z)$ также удовлетворяет условию (1.2). В силу леммы 4.1, получаем

$$\Phi(z) = K(f, z) + S(z)\Big(A_0 + \frac{P(z)}{R(z)}\Big),$$

Пусть теперь $N + \mu < 0$, $\mu > 0$. Так как $a(x) \in R^\alpha$ то $A_0 S(z)$ удовлетворяет однородному условию (1.2). Поэтому общее решение задачи R представимо в виде $\Phi(z) = K(f, z) + A_0 S(z)$. □

Задачу R называют нетеровой, если количество линейно независимых решений N_0 однородной задачи и количество условий P на f, при которых задача R имеет решение, конечны. Разница $N_0 - P$ называется индексом задачи R. Из теорем 3.1 и 3.2 следует, что если $\alpha_k \geq 0$, $k = 1, 2, ..., m$ то $N_0 = N + \mu$ при $N + \mu \geq 0$ и $P = -N - \mu$ при $N + \mu < 0$. Это означает, что при $\alpha_k \geq 0$, $k = 1, 2, ..., m$ числа N_0 и P зависят только от α_k, $k = 1, 2, ..., m$ и $\mu = inda(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Отметим, что для произвольных α_k, $k = 1, 2, ..., m$ числа N_0 и P зависят не только от α_k и μ. В случае, когда $a(x) \in R^\alpha$ и $N + \mu \geq 0$, мы имеем $N_0 = N + \mu + 1$. Можно привести примеры, когда $a(x) \notin R^\alpha$ и $N_0 = N + \mu$.

Теорема 4.2. *Пусть $\alpha_k \leq -2$, $k = 1, 2, ..., m$ и $a(x) \notin R^\alpha$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) если $N + \mu \geq 0$, то общее решение задачи R можно представить в виде (4.1), где $A_0 = 0$.

(б) если $N+\mu<0$, то задача R разрешима тогда и только тогда, когда $f(t)$ удовлетворяет условиям (4.3). Решение единственно и $\Phi(z)=K(f,z)$.

Abstract. Let $C(\rho)$ be the class of functions f such that $f(x)\rho(x)$ is continuous on $(-\infty,+\infty)$. In the upper half-plane of complex plane z we consider the Riemann boundary value problem in the weighted space $C(\rho)$ with $\rho(x)=\prod_{k=1}^{m}\left|\frac{x-x_k}{x+i}\right|^{\alpha_k}$, where α_k and x_k, $k=1,2,...,m$, are real numbers. The problem is to determine an analytic in the upper and lower half-planes function $\Phi(z)$ to satisfy $\lim_{y\to+0}\|\Phi^+(x+iy)-a(x)\Phi^-(x-iy)-f(x)\|_{C(\rho)}=0$, where $f\in C(\rho)$, $a(x)\in C^{\delta}[-A;A]$ for any $A>0$, $a(x)\neq 0$, the limit $\lim_{|x|\to\infty}a(x)=a(\infty)$ exists and $|a(x)-a(\infty)|<C|x|^{-\delta}$ for $|x|\geq A>0$. The normal solvability of this problem is established.

Список литературы

[1] Б. В. Хведелидзе, "О разрывной задаче Римана-Привалова для нескольких функций", Сообщение АН Груз. ССР., **17**, no. 10, 865 – 872 (1956).

[2] Б. В. Хведелидзе, "Методы интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной", Современные проблемы математики, **7**, М: Наука, 5 – 162 (1975).

[3] R. Hunt, B. Muchenhoupt, R. Wheedon, "Wheighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform", Trans. Amer. Math. Soc., **176**, 227 – 251 (1973).

[4] M. Rosenblum, "Summability of Fourier series in $L_p(d\mu)$", Trans. Amer. Math. Soc., **165**, 326 – 342 (1962).

[5] К. Казарян, И. Спитковский, Ф. Сориа, "Краевая задача Римана в пространствах с весом", ДАН России, **357**(6), 717 – 719 (1997).

[6] K. S. Kazarian, "Weighted norm inequalities for some classes of singular integrals", Studia Math., **86**, no. 3, 311 – 317 (1987).

[7] A. P. Soldatov, "A Function theory method in elliptic problems in the plane", Russian Acad. Sci. Izv. Math., **40**, no. 3, 529 – 563 (1993).

[8] N. E. Tovmasyan, Non-Regular Dirichlet Equations of Electromagnetic Fields, Word Scientific, Singapore (1998).

[9] S. A. Aghekyan, "On a Hilbert problem in the half-plane in the class of continuous functions", Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences, no. 2, 9 – 14 (2016).

[10] Г. М. Айрапетян, В. А. Бабаян, "Граничная задача Римана-Гильберта в пространстве непрерывных функций", Научные ведомости Белгород. госуд. универс., **19**(162), вып. 32, 22 – 32 (2013).

[11] Г. М. Айрапетян, В. А. Бабаян, "О задаче Дирихле в пространстве непрерывных с весом функций", Научные ведомости Белгород. госуд. универс., **17**(112), вып. 24, 5 – 15 (2011).

[12] Г. М. Айрапетян, В. Ш. Петросян, "Граничная задача Гильберта в полуплоскости в смысле L^1-сходимости", Изв. НАН Армении, Математика, **32**, no. 5 (1997).

[13] H. M. Hayrapetian, "Dirichlet problem in the half-plane for RO-varying weight functions", Topics in Analysis and its Aplications, Dordrecht, Boston, London, Kluwer Academic Publishers, **147**, 311 - 317 (2004).

Поступила 27 февраля 2018

После доработки 13 июля 2018

Принята к публикации 15 сентября 2018