Известия НАН Армении, Математика, том 54, н. 1, 2019, стр. 60 – 75

О НЕПРЕРЫВНЫХ СЕЛЕКЦИЯХ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ПОЧТИ ВЫПУКЛЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

Р. А. ХАЧАТРЯН

Ереванский государственный университет
E-mails: *khachatryan.rafik@gmail.com*

Аннотация. Доказано, что через каждую точку графика непрерывного многозначного отображения с почти выпуклыми и звездными значениями проходит непрерывная селекция этого отображения.

MSC2010 number: 26E25; 49J52; 46J05.

Ключевые слова: многозначное отображение; звездное множество; почти выпуклость; селектор.

1. Введение

Одним из важных проблем в теории многозначных отображений является вопрос существования однозначных аппроксимаций и селекций с определенными свойствами. Вопрос о существовании селекций, обладающих некоторыми топологическими свойствами весьма интересен и находит разнообразные приложения во многих областях математики. Задача о существовании непрерывных селекций мультиотображения, восходящая к классической теореме Э. Майкла (см. [15]) получила в дальнейшем широкое развитие и нашла многочисленные приложения в теории дифференциальных включениях, управляемых системах и в общей топологии (см. [1, 4]). Теорема Майкла утверждает, что всякое полунепрерывное снизу отображение с выпуклыми значениями допускает непрерывную селекцию.

В работах [1, 16] приведены примеры, иллюстрирующие важность условия выпуклости многозначного отображения. А в статье [9] (пример 1(A)) построен пример непрерывного отображения со звездными значениями, недопускающий ни одного непрерывного селектора. Тем не менее, существование непрерывных селекций может быть доказано и для некоторых классов отображений с

[0]Исследование выполнено при подержке ГКН МОН РА в рамках совместного научного проекта NYSU-SFU-16/1 финансируемым международным конкурсом ТКН МОН РА-ЕГУ-ЮФУ РФ-2016.

невыпуклыми значениями. Так например в статье [9] рассмотрен некоторый подкласс (отображения с звездноподобными или **паравыпуклыми** значениями) непрерывных многозначных отображений со звездными значениями, допускающие непрерывные селекции (см. теорему 1 из [9]). В общем невыпуклом случае в статье [10] к каждому замкнутому множеству M ставят в соответсвие некоторую функцию $h : R_+ \to R_+$ невыпуклости множества M. Доказано(см. [10], теорема 5.1), что если a полунепрерывное снизу отображение, функции выпуклости $h_{a(x)}$ значений которого строго меньше некоторой монотонно неубывающей функции $\alpha : (0, \infty) \to [0, 1)$, то a имеет непрерывную однозначную селекцию. Однако, определение функции h имеет описательный характер и довольно сложно построить эту функцию для каждого замкнутого множества M.

Отметим также, что в статьях [11, 12] методом касательных конусов выделяются дифференцируемые или дифференцируемые по направлениям **локальные** селекции от многозначных отображений как с выпуклыми так и невыпуклыми значениями.

В настоящей статье рассматривается вопрос существования непрерывных селекций для нового класса многозначных отображений с невыпуклыми значениями, точнее отображениями с **почти выпуклыми** значениями. Понятие почти выпуклости введено в работах [7, 8]. Потребность изучения таких множеств возникла в теории дифференциальных игр [5].

2. Некоторые обозначения и определения

Пусть X– метрическое а Y– банахово пространства. В дальнейшем $B_r(a)$– замкнутый шар с центром a радиуса r; $M \subseteq Y$– замкнутое множество а $diam(M)$- диаметр множества M, $conv\{M\}$– выпуклая оболочка множества M. Положим

$$Pr_M(x) \equiv \{y \in M / \|x - y\| = \inf_{z \in M} \|x - z\| \equiv d(x, M)\}.$$

Напомним определения многозначного отображения и селектора. Пусть 2^Y совокупность всех непустых подмножеств из Y, а E– подмножество пространства X.

Отображение $a : E \longrightarrow 2^Y$ называется многозначным отображением. Непрерывное однозначное отображение $y : E \longrightarrow Y$ называется непрерывной селекцией (непрерывным селектором) отображения a, если $y(x) \in a(x),\ x \in E$.

Отображение $a : E \longrightarrow 2^Y$ называется полунепрерывным снизу в $x_0 \in E$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$a(x_0) \subseteq a(x) + B_\varepsilon(0),\ \forall x \in E \cap B_\delta(x_0).$$

Отображение $a : E \longrightarrow 2^Y$ называется полунепрерывным сверху в $x_0 \in E$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$a(x) \subseteq a(x_0) + B_\varepsilon(0)\ \forall x \in E \cap B_\delta(x_0).$$

Если отображение полунепрерывно снизу и сверху в x_0, то оно называется непрерывным в этой точке (см. [1], определение 1.2.43 непрерывности в смысле Хаусдорфа). Множество

$$graph(a) = \{(x, y) \in E \times R^m,\ y \in a(x)\}.$$

называется графиком отображения a.

Определение 2.1. *(см. [3]). Пусть $M \subseteq Y$. Положим*

$$M^0 \equiv \{x \in M :\ \lambda x + (1-\lambda)y \in M,\ \forall y \in M, \lambda \in [0,1]\}.$$

Подмножество $M^0 \subseteq M$ называется ядром звездности множества M. Если $M^0 \neq \emptyset$, то множество M называется звездным. Нетрудно показать, что M^0- выпуклое множество. Очевидно, что если $M-$ выпуклое множество, то $M = M^0$.

Определение 2.2. *(см. [7]). Множество $M \subseteq Y$ удовлетворяет условию почти выпуклости с константой $\theta \geq 0$, если для любых*

$$x_j \in M, \lambda_j \geq 0, j \in J,$$

где $J-$ конечное множество индексов, таких, что $\sum_{j\in J} \lambda_j = 1$, выполняется

$$\sum_{j\in J} \lambda_j x_j \in M + \theta r^2 B_1(0),$$

где $r \equiv \max_{i,j\in J} \|x_i - x_j\|$.

Если нет необходимости уточнять константу θ, то будем просто говорить, что множество M почти выпукло. Заметим, что если $\theta = 0$, то $M-$ выпуклое множество. Класс почти выпуклых множеств достаточно широк.

3. Примеры

Пример 3.1. Множество $M = \{a, b\}$ состоящих из двух точек почти выпукло. Действительно, имеем

$$conv\{a,b\} \subseteq M + \frac{1}{2\|a-b\|}\|a-b\|^2 B_1(0),$$

т.е. в этом случае константу почти выпуклости θ можно выбрать $1/(2\|a-b\|)$.

Пример 3.2. Дуга на окружности является почти выпуклым множеством. Это непосредственно следует из достаточного условия почти выпуклости, доказанного в [8], Теорема 2. Найдем константу почти выпуклости. Предположим, что дуга M меньше полуокружности и множество $Q = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ находится на этой дуге. Пусть $A = x_1, B = x_k, d = diam(Q) = AB$. Тогда как видно из рисунка 1 множество $conv\{Q\}$ находится на α-окрестности множества M, где $\alpha = CD$. Имеем

$$DC = R - \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}}.$$

Теперь число θ выберем из неравенства $DC \leq \theta d^2$, т.е.

$$\frac{1}{R + \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}}} \leq \theta.$$

Очевидно, что этому неравенству удовлетворяют числа $\theta \geq 1/4R$. Если дуга больше полуокружности, то она почти выпукла по теореме 3 из [8] с некоторой константой ϑ. Тогда, как видно из рисунка 1, если $Q = \{a, b\}$, то множество $conv\{Q\}$ находится в β- окрестности дуги, где $\beta = \|a-b\|/2$. Таким образом

$$\theta \geq \frac{1}{2\|a-b\|}.$$

Значит, если $\|a-b\| \to 0$, то $\theta \to \infty$.

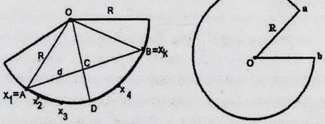

Рис. 1

Пример 3.3. Окружность M с радиусом R является почти выпуклым множеством с константой $\theta \geq 1/(\sqrt{3}R)$. Действительно, пусть множество $Q \equiv \{x_1, x_2, ..., x_k\} \subset M$. Рассмотрим две случаи. Если $0 \notin conv\{Q\}$. Это означает, что множество находится в некоторой полуокружности. Тогда из примера 3.2 следует включение

$$conv\{Q\} \subseteq M + \frac{1}{4R}(diam(Q))^2 B_1(0). \tag{3.1}$$

Если $0 \in intQ$. Тогда в $convQ$ существует некоторый остроугольный треугольник, содержащий внутри себя центр окружности 0. Значит, окружность описана к этому треугольнику. Следовательно, длина некоторой стороны треугольника больше или равно $R\sqrt{3}$. Отсюда

$$diam(Q) \geq \sqrt{3}R.$$

Очевидно, что множество Q находится в R-окрестности множества M. Теперь выберем число θ из условия

$$R \leq \theta(diam(Q))^2. \tag{3.2}$$

Это неравество имеет место, если $\theta \geq 1/(\sqrt{3}R)$. Если точка O находится на границе множества $conv\{Q\}$, то $diam(Q) = 2R$. Тогда неравенство (2) выполняется, если $\theta \geq 1/4R$. В общем случае, имея ввиду и включение(1), имеем

$$conv\{Q\} \subseteq M + \frac{1}{\sqrt{3}R}(diam(Q))^2 B_1(0).$$

Отсюда $M-$ почти выпуклое множество с константой $1/(\sqrt{3}R)$.

Приведем пример множества, являющегося почти выпуклым и звездным, но не выпуклым.

Пример 3.4. Окрашенная область M на рис.2 с замкнутой границей $ACBDA$ является звездным множеством. Покажем, что оно почти выпукло. Выберем число $\theta > 0$ из условия

$$DE = R - \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} \leq \theta d^2, \text{ где } d = AB.$$

Это неравенство очевидным образом выполняется, если положим $\theta = \frac{1}{4R}$. Нетрудно заметить также, что область M является почти выпуклым множеством с константой θ. Заметим, что если $DO = R \to \infty$, то $\theta \to 0$, а область $ACDBA$ превращается в треугольник ACB.

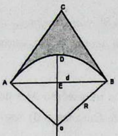

Рис. 2. Множество почти выщуклое и звездное

4. Свойства почти выпуклых множеств

Предложение 4.1. *([8], Теорема 3). Пусть замнутое множество $M \subseteq R^n$ удовлетворяет условию почти выпуклости с константой $\theta > 0$. Если $\varepsilon \leq 1/(16\theta)$, то отображение $x \longrightarrow Pr_M(x)$ однозначно на множестве $M + B_\varepsilon(0)$ и*

$$\|Pr_M(x_1) - Pr_M(x_2)\| \leq 2\|x_1 - x_2\|.$$

Следует отметить, что если $M-$ выпукло и замкнуто, то любая точка из R^n имеет единственную проекцию на M и оператор проектирования Pr_M удовлетворяет условию Липшица с постоянной 1.

Замечание 4.1. *Ф. Кларк и другие [14] определили понятие проксимально гладкого множества как множества, функция расстояния до которого от некоторой точки пространства непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности этого множества, за исключением самого множества. В той же работе показано (см. теорема 4.11 [14]), что в гильбертовых пространствах условие проксимальной гладкости множества эквивалентно тому, что метрическая проекция на это множество любой точки из достаточно малой окрестности множества существует, единственна и непрерывно зависит от проекцируемой точки. Затем в статье [13] доказан аналогичный результат в некоторых равномерно выпуклых и гладких банаховых пространствах. Из предложения 4.1 непосредственно следует, что если $M \subseteq R^n$ и почти выпукло, то оно и проксимально гладко.*

Таким образом, в пространстве R^n почти выпуклые множества составляют некоторый подкласс в семействе проксимально гладких множеств.

Предложение 4.2. *Если $M \subseteq R^n-$ замкнутое, звездное и почти выпуклое множество, то для достаточно малых $\varepsilon > 0$ множество $M + B_\varepsilon(0)$ также звездно и почти выпукло.*

Доказательство. Если замкнутое множество $M-$ почти выпукло с константой θ, то известно (см. [8], Теорема 3, Следствие 3) что, если $\varepsilon \leq 1/(16\theta)$, то множество $M + B_\varepsilon(0)$ является почти выпуклым с константой 16. Нетрудно также показать, что $(M^0 + B_\varepsilon(0)) \subseteq (M + B_\varepsilon(0))^0$. Значит, $M-$ звездное множество. □

Теорема 4.1. *Пусть непрерывное многозначное отображение $a : [a, b] \longrightarrow 2^{R^n}$ с почти выпуклыми значениями и с константой θ. Тогда через любую точку его графика проходит непрерывная селекция этого отображения.*

Доказательство. Поскольку отображение a непрерывно по Хаусдорфу на отрезке $[a, b,]$ то оно равномерно непрерывно на этом отрезке. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что при разбиении отрезка на частичные сегменты $[x_{i-1}, x_i]$, длины которых меньше δ колебание отображения a на каждом таком частичном сегменте будет меньше ε. Выберем $\varepsilon < 1/(16\theta)$. Тогда

$$a(x_{i-1}) \in a(x) + B_\varepsilon(0) \; x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Пусть $\overline{y_0} \in a(x_0)$. Положим $y_0(x) = Pr_{a(x)}\overline{y_0}$ $(x \in [x_0, x_1])$. Поскольку, согласно предложению 4.1, проекция точки $\overline{y_0}$ на множество $a(x)$ единственно и отображение a непрерывно, то непрерывным будет и отображение y_0 (см. [2], глава 3, п.5, лемма 3, стр. 344). Выберем точку $y_0(x_1)$ и спроектируем ее на множество $a(x)$ $(x \in [x_1, x_2].)$ Положим $y_1(x) = Pr_{a(x)}y_0(x_1)$. Оно также будет непрерывным отображение по вышеуказанным причинам.

Продолжая аналогично, мы построим непрерывное отображение $y(x)$, определенное на целом отрезке $[a, b]$ такое, что

$$y(x) = y_i(x), \; (x \in [x_{i-1}, x_i], \; i = 1, 2, ..., n.)$$

Теорема 4.1 доказана. □

Замечание 4.2. *Отображение y, построенное в теореме 4.1 зависит также от начальной точки $\overline{y_0}$. Используя предложение 4.1 легко заметить, что отображение y удовлетворяет условию Липшица относительно переменной $\overline{y_0}$*

равномерно по x. Следовательно, отображение y непрерывно по совокупности переменных $(x, \overline{y_0})$.

Существует пример непрерывного многозначного отображения $a : R^2 \longrightarrow R^2$ с почти выпуклыми и компактными значениями, который не допускает ни одного непрерывного селектора.

Пример 4.1. Пусть

$$a(x) = S_1 \setminus B_{\|x\|}\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \ x \neq 0, \ a(0) = S_1.$$

В [1](пример 1.4.6., стр. 58) доказано, что отображение a является непрерывным и не допускает непрерывного селектора. Заметим еще, что отображение a с почти выпуклыми значениями. Действительно, так как множество $a(x)$– дуга на единичной окружности S_1, то как отмечено выше в примере 3.3 оно почти выпукла. Причем если дуга $a(x)$ меньше полуокружности, то она почти выпукла с постоянной $\theta = 1/4$. Если дуга $a(x)$ больше полуокружности, то она почти выпукла с некоторой константой θ. А единичная окружность S_1 почти выпукла с константой $1/\sqrt{3}$.

5. Основные результаты

Пусть $a : E \to 2^{R^m}$ – многозначное отображение. Определим отображение a_0 по правилу: $a_0(x) \equiv (a(x))^0 \ \forall x \in E$. Очевидно, что многозначное отображение $a_0 : E \to 2^{R^m}$ имеет выпуклые значения.

Теорема 5.1. *Пусть E– компактое подмножество метрического пространства X а $a : E \to 2^{R^m}$ – непрерывное многозначное отображение с компактными, звездными и почти выпуклыми значениями. Предположим также, константы $\theta(x)$ почти выпуклости множеств $a(x)$, $x \in E$ удовлетворяют условию:*

$$\sup_{x \in E} \theta(x) = \eta < \infty.$$

Пусть $(x_0, y_0) \in graph(a)$. Тогда существует непрерывная селекция y отображения a, проходящая через точку (x_0, y_0), т.е.

$$y(x_0) = y_0, \ y(x) \in a(x) \ \forall x \in E.$$

Доказательство основано на утверждениях следующих лемм.

Лемма 5.1. *Пусть X– метрическое, а Y– банахово пространства. $a: X \to 2^Y$– и $b: X \to 2^Y$– многозначные отображения со звездными и компактными значениями. Пусть отображения a, a_0 и b, b_0 непрерывны в точке x_0 и*

$$0 \subseteq int\,(a_0(x_0) - b_0(x_0)). \tag{5.1}$$

Тогда отображение $c(x) \equiv a(x) \bigcap b(x)$ непрерывно в x_0.

Доказательство. Сначала докажем полунепрерыность снизу отображения c в точке x_0. Поскольку полунепрерывное снизу отображение $\Gamma \equiv a_0^* - b_0$ имеет выпуклые, замкнутые значения и справедливо включение (5.1), то существуют некоторое число $\tau > 0$ и окрестность U точки x_0, такие, что

$$B_\tau(0) \subseteq \Gamma(x) = (a_0(x) - b_0(x))\ \forall x \in U. \tag{5.2}$$

Дейтвительно, так как отображение Γ полунепрерывно в точке x_0, то существуют число $\tau > 0$ и окрестность U точки x_0 такие, что

$$B_{2\tau}(0) \subseteq \Gamma(x) + B_\tau(0).$$

Отсюда для произвольного непрерывного линейного функционала y^*, $\| y^* \| = 1$ имеем

$$\max_{u \in B_{2\tau}(0)} < y^*, u > \le \max_{u \in \Gamma(x)} < y^*, u > + \max_{u \in B_\tau(0)} < y^*, u > .$$

Отсюда

$$2\tau \le \max_{u \in \Gamma(x))} < y^*, u > + \tau,$$

т.е. $\tau \le \max_{u \in \Gamma(x)} < y^*, u >$. Отсюда, так как $\Gamma(x)$– выпуклое замкнутое множество в банаховом пространстве Y, то

$$B_\tau(0) \subseteq \Gamma(x),\ \forall x \in U.$$

Далее, так как многозначное отображение b полунепрерывно сверху в окрестности U, то оно ограничено на этой окресности, т.е. существует ограниченое множество G, такое, что $b(x) \subseteq G$, $\forall x \in U$. Пусть $diam(G) = D$. Пусть $\varepsilon > 0$ и такое, что $\varepsilon < 2D$.Положим $\alpha = \tau\varepsilon/(2D - \varepsilon)$ и выберем $\tau > 0$ настолько малым, что $\alpha < \varepsilon/2$. Поскольку a и b являются полунепрерывными снизу отображениями в x_0, то можно найти такую окрестность $\overline{U} \subseteq U$ точки x_0, что

$$a(x_0) \subseteq a(x) + B_{\alpha/2}(0),\ b(x_0) \subseteq b(x) + B_{\alpha/2}(0),\ x \in \overline{U}.$$

Пусть точка $x \in \overline{U}$. Тогда для любого $y \in c(x_0)$ существует вектор $\overline{y}_x \in b(x)$ такой, что

$$\overline{y}_x \in a(x) + B_\alpha(0) \text{ и } \|y - \overline{y}_x\| \le \alpha. \tag{5.3}$$

Положим $\theta = \tau/(\alpha+\tau) < 1$. Умножим включение (5.3) на θ и замечая, что $\theta\alpha = (1-\theta)\tau$, получим

$$\theta\overline{y}_x \in \theta a(x) + \theta\alpha B_1(0) = \theta a(x) + (1-\theta)\tau B_1(0). \tag{5.4}$$

Умножим включение (5.2) на $(1-\theta)$, получим

$$(1-\theta)\tau B_1(0) \subseteq (1-\theta)a_0(x) - (1-\theta)b_0(x).$$

Отсюда и из (5.4) получим, что существует вектор $y' \in b_0(x)$ такой, что

$$\theta\overline{y}_x + (1-\theta)y' \in a(x) \tag{5.5}$$

С другой стороны, так как $\overline{y}_x \in b(x)$ и $y' \in b_0(x)$, то

$$\overline{y} \equiv \theta\overline{y}_x + (1-\theta)y' \in b(x). \tag{5.6}$$

Из соотношений (5.5) и (5.6) следует, что $\overline{y} \in c(x)$. Проверим, что $\|y-\overline{y}\| \le \varepsilon$. Действительно,

$$\|y-\overline{y}\| \le \|y-(\theta\overline{y}_x+(1-\theta)y')\| = \|\theta y + (1-\theta)y - \theta\overline{y}_x - (1-\theta)y'\| \le$$

$$\le \theta\|y-\overline{y}_x\| + (1-\theta)\|y-y'\| \le \alpha + \frac{\alpha}{\alpha+\tau}D \le \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Таким образом $c(x_0) \subseteq c(x) + B_\varepsilon(0)$ $\forall x \in \overline{U}$. Это означает, что отображение c полунепрерывно снизу в x_0. Аналогично доказывается полунепрерывность сверху отображения c. $\square$

Пример 5.1. Пусть для каждого $t \in [0,1/2]$ множество $a(t)$ есть область с замкнутой границей $OADBCO$ на рис.3. Тогда $a_0(t)$- треугольник ODC. Положим $b(t) \equiv \{(x_1,x_2) \in [0,1]\times[0,1]/x_2 = tx_1\}, t \in R$. Легко заметить, что отображения a и b со звездными значениями непрерывны, но их пересечение $a \cap b$ разрывно в точке $t = 1/2$. Это связано с тем, что здесь условие (5.1) леммы 5.1 не выполняется в точке $t = 1/2$.

Приведем пример непрерывного многозначного отображения a такое, что отображение a_0 не является непрерывным.

Пример 5.2. Пусть область на рис. 4 с границей $OAFDHO$- множество $a(t)$, $t \in [1/2,1]$. Оно является звездным множеством а его ядро $a_0(t)$- множество с границей $OFEHO$. При $t=1$ множеством значений отображения a_0 является квадрат $OAEH$. Очевидно, что многозначное отображение $a : [1/2,1] \longrightarrow 2^{R^2}$ непрерывно во всех точках отрезка $[1/2,1]$, но отображение a_0 терпит разрыв в

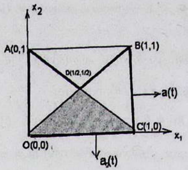

Рис. 3. Пересечение непрерывных отображений со звездными значениями

точке 1. Отметим также, что значения $a(t)$, $t \in [1/2, 1)$ отображения a не являются почти выпуклыми, поскольку любая точка на биссектрисе угла $\angle AFD$ имеет две проекции на множество $a(t)$, что противоречит предложению 4.1.

В общем случае имеет место следующий результат о непрерывности отображения a_0.

Предложение 5.1. *Пусть $E \subseteq X-$ компактное подмножество метрического пространства X, $Y-$ банахово пространство; отображение $a : E \to 2^Y$ со звездными компактными значениями непрерывно. Тогда внутренность точек, где a_0 не непрерывно, пуста.*

Доказательство. Сначала покажем, что отображение $a_0 : E \to 2^{R^m}$ полунепрерывно сверху. Пусть $x_n \to x_0$, $y_n \in a_0(x_n), y_n \to y_0$. Покажем, что $y_0 \in a_0(x)$. Пусть $z_0 \in a(x_0)$. Так как a является полунепрерывным снизу отображением, то существует последовательность $z_n \in a(x_n)$ такая, что $z_n \to z_0$. С другой стороны, поскольку $y_n \in a_0(x_n)$, то для любого $\lambda \in [0,1]$ имеем

$$\lambda z_n + (1-\lambda) y_n \in a(x_n).$$

Отсюда следует, что $\lambda z_0 + (1-\lambda)y_0 \in a(x_0)$. Это означает, чт о $y_0 \in a_0(x_0)$. Итак, отображение a_0 имеет замкнутый график. Теперь согласно теореме 10 [6] (гл. 1, п.1, стр.118) внутренность множества точек, где a_0 не непрерывно, пуста. □

Как иллюстрацию этого утверждения можно рассматривать пример 5.2, где отображение a_0 определено на отрезке $[1/2, 1]$ и оно разрывно только в точке $t = 1$. Однако, если значения непрерывного отображения a являются звездными и почти выпуклыми множествами, то отображение a_0 будет непрерывным. А именно, верна следующая лемма.

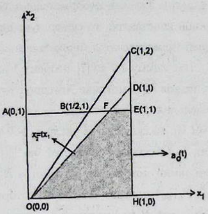

РИС. 4. Отображение a - непрерывно, а отображение a_0 не непрерывно

Лемма 5.2. *Пусть $E \subseteq X$ – компактное подмножество метрического пространства X; отображение $a : E \to 2^{R^m}$ непрерывно. Пусть далее множества $a(x)$ компактны, звездны и удовлетворяют условию выпуклости с некоторой константой $\theta(x)$. Предположим, что для каждого x $int\ a_0(x) \neq \emptyset$ и $\eta = \sup_{x \in E} \theta(x) < \infty$. Тогда отображение a_0 непрерывно.*

Доказательство. Полунепрерывность сверху отображения a_0 доказана в предложении 5.1. Покажем, что оно и полунепрервно снизу. Пусть $y_0 \in int\ a_0(x_0)$. Предположим, что существуют последовательность $x_k \to x_0$ и число $\delta > 0$ такие, что $d(y_0, a_0(x_k)) \geq \delta$ для достаточно больших k. Тогда можно считать, что $B_\delta(y_0) \subseteq a_0(x_0)$, но для больших k $B_\delta(y_0) \bigcap a_0(x_k) = \emptyset$. Так как отображение a точечно непрерывно (см. [1], теорема 1.38, стр. 45), то существует такая окрстность $B_{\delta_0}(y_0) \subseteq B_\delta(y_0)$, что $B_{\delta_0}(y_0) \subseteq a(x_k)$ для достаточно больших k. Отсюда, поскольку $y_0 \notin a_0(x_k)$, то существует такая точка $y_k \in a(x_k)$, которая не видна из точки y_0, т.е. на отрезке $[y_0, y_k]$ существует точка $\overline{y_k} \notin a(x_k)$. По замкнутости множества $a(x_k)$ существует шар V_k с центром $\overline{y_k}$ и такой, что $V_k \bigcap a(x_k) = \emptyset$. Будем сдвигать этот шар от точки $\overline{y_k}$ к y_k по отрезку $[y_0, y_k]$. В силу компактности $a(x_k)$ среди этих шаров существует такой шар V'_k, который касается множества $a(x_k)$ только в одной точке $z_k \in a(x_k)$. Очевидно, что касательная к V'_k в точке z_k гиперплоскость L_k сильно отделяет точку y_0 от множества $a_0(x_k)$. Пусть H_{z_k} – полупространство, содержащее точку y_0. Заметим, что по построению в этом полупространстве находится шар V'_k. Не нарушая общности, можно считать, что $z_k \to z_0 \in a(x_0)$. Так как отображение a удовлетворяет условию выпуклости с определенной константой, то существует шар $\widetilde{V_k}$ фиксированного радиуса $r = 1/8\eta$, который также касается множества в z_k и который находится в полупространстве H_{z_k}. (см. лемму 2.7 из [7], теорему 1 из [8]). Можно считать, что последовательность шаров $\widetilde{V_k}$ в метрике Хаусдорфа сходится к некоторому шару V_0 радиуса r. Предельная гиперплоскость L_0 касается шара V_0 в точке z_0. Заметим, что если $u \in int\ V_0$, то существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $B_{\varepsilon_0}(u) \subseteq \widetilde{V_k}$ для достаточно больших k. Отсюда следует, что $int\ V_0 \bigcap a(x_0) = \emptyset$. Заметим также, что в предельном замкнутом полупространстве H_{z_0} находится шар V_0 и точка y_0. Значит, в шаре $B_\delta(y_0)$ существуют точки, которые не видны из z_0. Но это невозможно, поскольку шар $B_\delta(y_0)$ целиком входит в ядро множества $a(x_0)$. Полученное противоречие и доказывает лемму 5.2. □

Лемма 5.3. *Пусть $E \subseteq X$– компактное подмножество метрического пространства X; $a : E \to 2^{R^m}$ – многозначное отображение с компактными звездными значениями и такое, что для любого x $int\ a_0(x) \neq \emptyset$. Предположим также, что отображения a и a_0 непрерывны. Тогда для любого $(x_0, y_0) \in graf(a)$ существует непрерывное отображение $y(x)$ такое, что $y(x) \in a(x)$ $\forall x \in E$ и $y(x_0) = y_0$.*

Доказательство. Поскольку отображение a_0 полунепрерывно снизу, то существует непрерывное отображение $\tilde{y}(x)$ такое, что $\tilde{y}(x) \in int a_0(x)$ $\forall x \in R^n$. Действительно, поскольку отображение a_0 точечно непрерывно, то для любого $y \in int\ a_0(x)$ существуют такие окрестности $V(y)$, $U_y(x)$, что $V(y) \subseteq a_0(x')$ $\forall x' \in U_y(x)$. Пусть $U_y = \bigcup_{x \in E} U_y(x)$. Система открытых множеств $\{U_y\}_{y \in Y}$, ($Y \equiv \bigcup_{x \in E} a_0(x)$) образует открытое покрытие компактного множества E. Пусть $\{U_{y_j}\}_{j \in J}$ конечное подпокрытие этого покрытия. Рассмотрим $\{p_{y_j}\}_{j \in J}$– разбиение единицы, соотвествующее покрытию $\{U_{y_j}\}_{j \in J}$ и определим непрерывное отображение y следующим образом: $\tilde{y}(x) = \sum_{j \in J} p_{y_j}(x) y_j$. Нетрудно проверить, что $\tilde{y}(x) \in int a_0(x)$, $x \in E$. Рассмотрим отображение b следующим образом:

$$b(x) = \{y : y = \lambda y_0 + (1 - \lambda)\tilde{y}(x),\ \lambda \in [0, 1]\}.$$

Очевидно, что оно полунепрерывно снизу и для любого x имеем $0 \in int(a_0(x) - b(x))$. Тогда согласно лемме 5.1 отображение $c(x) \equiv a(x) \bigcap b(x)$ полунепрерывно снизу. Ясно также, что оно имеет выпуклые замкнутые значения. Значит, согласно теореме Майкла через точку $(x_0, y_0) \in graf(c)$ проходит непрерывная селекция y этого отображения. $\square$

Доказательство теоремы 5.1. Пусть $\epsilon < 1/(16\eta)$. Рассмотрим многозначное отображение $a(x) + B_\varepsilon(0)$. Оно по предложению 5.1 удовлетворяет всем предположениям леммы 5.3. Поэтому через точку $(x_0, y_0) \in graph(a)$ проходит непрерывное одночначное отображение $\tilde{y}$ такое, что $\tilde{y}(x) \in a(x)+B_\varepsilon(0)$, $x \in E$. Так как $\tilde{y}(x) \in a(x) + B_{1/(16\theta(x))}(0), x \in E$, то согласно предложению 5.1 проекция $y(x)$ точки $\tilde{y}(x)$ на множество $a(x)$ однозначно. Поскольку отображения $a, \tilde{y}$ непрерывны, то как уже отмечено выше, непрерывным будет и отображение y. Очевидно, что отображение y является искомым. $\square$

Приведем достаточное условие о существовании непрерывных селекций многозначных отображений с почти выпуклыми значениями (без условия звездности). Верна следующая теорема.

Теорема 5.2. *Пусть $E \subseteq X$– компактное подмножество метрического пространства X; отображение $a : E \to 2^{R^m}$ непрерывно, причем для любого $x \in E$ множество $a(x)$ компактно и удовлетворяет условию выпуклости с константой $\theta(x)$. Допустим также, что*

$$\eta = \sup_{x\in E} \theta(x) < \infty, \quad diam(a(x)) \le \frac{1}{4\theta(x)}. \tag{5.7}$$

Тогда через любую точку графика отображения a проходит непрерывная селекция этого отображения.

Доказательство. Сначала предположим, что $int\ a(x) \neq \emptyset$. Покажем, что отображение a точечно непрерывно. Пусть $y_0 \in int\ a(x_0)$. Тогда, в силу полунепрерывности снизу отображения a для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать окрестность U точки x_0 таким образом, что $y_0 + B_{2\varepsilon} \subseteq a(x) + B_\varepsilon(0), x \in U$. Отсюда следует, что

$$y_0 + B_\varepsilon(0) \subseteq \bigcap_{s\in B_\varepsilon(0)} (a(x) + B_\varepsilon(0) - s). \tag{5.8}$$

Так как $a(x)$ удовлетворяет условию выпуклости с константой $\theta(x)$, то по лемме 2.11 [7](см. также [8], теорема 5) при $\varepsilon \le 1/16\eta$ правая часть включения (5.8) равна $a(x)$. Поэтому $y_0 + B_\varepsilon(0) \subseteq a(x)\ \forall x \in U$. Покажем теперь, что существует такое непрерывное отображение $\tilde{y}(x)$, что $\tilde{y}(x) \in a(x) + (diam(a(x)))^2\theta(x)B_1(0)$. Действительно, пусть $u_x \in int\ a(x)$. Тогда, в силу точечной непрерывности, существует такая окрестность $U(x)$, что $u_x \in int\ a(\overline{x})\ \forall \overline{x} \in U_x \equiv U(x)$.

Семейство открытых окрстностей $\{U_x\}_{x\in E}$ образует покрытие компактного множества . Пусть $\{U_{x_j}\}_{j\in J}$ конечное покрытие этого покрытия. Рассмотрим $\{p_j\}_{j\in J}-$ разбиение единицы, соответствующее этому покрытию и определим непрерывное отображение $\tilde{y}$ следующим образом: $\tilde{y}(x) = \sum_{j\in J} p_j(x)u_j$. Пусть $J(x) = \{j \in J : x \in U_{x_j}\}$. Тогда, если $x \in U(x_j)$, то $u_j \in a(x)$, поэтому имеем

$$\tilde{y}(x) = \sum_{j\in J(x)} p_j(x)u_j \in a(x) + \theta(\max_{i,j\in J(x)} \|u_j - u_i\|)^2 B_1(0) \subseteq$$

$$\subseteq a(x) + \theta(x)(diam(a(x)))^2 B_1(0).$$

Теперь, если $\theta(x)(diam(a(x)))^2 \leq 1/16\theta(x)$, т.е. $diam(a(x)) \leq 1/4\theta(x)$, то согласно предложению 4.1 существует единственная проекция $y(x)$ точки $\tilde{y}(x)$ на множестве $a(x)$. Так как отображение a с компактными значениями непрерывно, то отображение $y(x)$ также будет непрерывным. Теперь рассмотрим общий случай. Положим $b(x) = a(x) + B_\varepsilon(0)$, $\varepsilon < 1/(16\eta)$. По предложению 4.2 множество $b(x)$ почти выпукло с константой $4\theta(x)$. Очевидно также, что $diam(b(x)) = diama(x) + \varepsilon$. Теперь, согласно вышеуказанному, через любую точку его графика проходит непрерывная селекция этого отображения, если $diamb(x) \leq 1/(4(4\theta(x))) = 1/16\theta(x)$. Отсюда, если $diama(x) \leq 1/16\theta(x) - \varepsilon < 1/4\theta(x)$, то существует непрерывное отображние $\overline{y}$ такое, что $\overline{y}(x_0) = y_0$, $\overline{y}(x) \in b(x) \forall x \in E$. Очевидно, что отображение $y(x) = Pr_{a(x)}\overline{y}(x)$ будет искомым. □

Замечание 5.1. *Для примера 4.1 неравенство (5.7) теоремы 5.2 не выполняется. Действительно, для единичной окружности S_1 имеем $diam(S_1) = 2$, $\theta = 1/\sqrt{3}$, поэтому неравенство $diam(S_1) \leq 1/4\theta$ не имеет место. Неравенство $sup_{x\in E}\theta(x) < \infty$ также не имеет место, поскольку пример 3.2 показывает, что $sup_{x\in E}\theta(x) = \infty$.*

Abstract. It is proved that through each point of the graph of a continuous set-valued mapping with almost convex and star-like values can be passed a continuous selection of that mapping.

Список литературы

[1] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, Введение в Теорию Многозначных Отображений и Дифференциальных Включений, Москва, КомКнига (2005).

[2] Ф. П. Васильев, Методы Решения Экстремальных Задач, Москва, Наука (1981).

[3] М. А. Красносельский, "Об одном критерии звездности", Матем. сборник, 19(61), no. 2, 309 – 310 (1946).

[4] Е. С. Половинкин, Многозначный Анализ и Дифференциальные Включения, Москва, Физматлит (2014).
[5] Л. С. Понтрягин, "Линейные дифференциальные игры преследования", Мат. сб., Новая сер., **112**, no. 3, 307 – 330 (1980).
[6] Ж. П. Обен, И. Экланд, Прикладной Нелинейный Анализ, Мир, Москва (1988).
[7] В. В. Остапенко, Приближенное Решение Задач Сближения-Уклонения, Препринт-82-16, Институт Кибернетики АН УССР, Киев (1982).
[8] В. В. Остапенко, "Об одном условии почти выпуклости", Украинский мат. журнал, **35**, no. 2, 169 – 172 (1983).
[9] П. В. Семенов, "О паравыпуклости звездноподобных множеств", Сиб. матем. журнал, **37**, no. 2, 399 – 405 (1996).
[10] Д. Реповш, П. В. Семенов, "Теория Э. Майкла непрерывных селекций", Развитие и приложения, УМН, **49**, no. 6, 151 – 188 (1994).
[11] Р. А. Хачатрян, "О производных по направлению селекций многозначных отображений", Известия НАН Армении, **51**, no. 3, 65 – 84 (2016).
[12] Р. А. Хачатрян, "О существовании непрерывных и гладких селекций многозначных отображений", Известия НАН Армении, Математика, **37**, no. 2, 65 – 76 (2002).
[13] F. Bernard, L. Thibold, N. Zlateva, "Characterizations of prox-regular sets in uniformly convex Banach spaces", Journal Convex Analysis, **13**, 3/4, 525 – 559 (2006).
[14] F. H. Clarke, R. J. Stern, P. R. Wolenski, "Proximal smoothness and the lower-C^2 property", Journal of Convex Analysis, **2**, 1/2, 117 – 144 (1995).
[15] E. Michael, "Continuous selections 1", Ann. Math., **63**, 361 – 381 (1956).
[16] H. Heremes, "On continuos and measurables selections and the existence of solutions of generalized differential equations", Proc. Amer. Math. Sci., **29**, no. 3, 535 – 542 (1971).

Поступила 10 декабря 2017

После доработки 3 апреля 2018

Принята к публикации 25 мая 2018