Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 6, 2018, стр. 70 – 82

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ДЕЛЬТА-СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОГО ТИПА В КРУГЕ

ДЖ. Э. РЕСТРЕПО

Институт математики, Университет Антиоквия, Меделлин, Колумбия
E-mail: *cocojoel89@yahoo.es*

Аннотация. В статье дано дельта-субгармоническое расширение части теории факторизации М. М. Джрбашяна - В. С. Захаряна, относящейся к параметрическим преставлениям классов $N\{\omega\}$ мероморфных в единичном круге функций, содержащихся в классе N Р. Неванлинны функций ограниченного вида.

MSC2010 number: 31A05, 31A20.

Ключевые слова: дельта-субгармонические функции; потенциалы Грина; заряды.

1. Введение

Данная статья распространяет на дельта-субгармонические функции часть теории факторизации М. М. Джрбашяна - В. С. Захаряна [1, 2], относящейся к параметрическим преставлениям классов $N\{\omega\}$ мероморфных в единичном круге функций, содержащихся в классе Р. Неванлинны N (для аналогов результатов статьи в полуплоскости см. [3, 4]). Применяются обозначения [1, 2] и их модификации.

Всюду ниже будем говорить, что функция $\omega(t)$ принадлежит классу Ω, если

(i) $\omega(t) > 0$, непрерывна и не убывает в $[0, 1)$,
(ii) $\omega(0) = 1$ и $\int_0^1 \omega(t)dt < +\infty$,
(iii) $\omega(t)$ удовлетворяет условию Липшица с $\lambda_t \in (0, 1]$ во всех точках $t \in [0, 1)$.

При функциональном параметре $\omega(t) \in \Omega$, будем применять следующие операторы, определенные формально на функциях $u(z)$, заданных в единичном круге

---

[0]Работа выполнена при финансовой поддержке Colciencias Scholarship Program No. 647, в рамках University of Antioquia CIEN Project 2016-11126.

$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, следующим образом:

$$L_{\omega_1} u(z) = -\int_0^1 u(zt) d\omega_1(t), \quad \text{где} \quad \omega_1(t) = \int_t^1 \frac{\omega(x)}{x} dx, \tag{1.1}$$

$$L_\omega u(z) = u(0) + L_{\omega_1} U(z), \quad \text{где} \quad U(z) = |z| \frac{\partial}{\partial |z|} u(z). \tag{1.2}$$

Отметим, что L_ω является упрощенной формой оператора, использованного в [1, 2] (см. лемму 1.1 в [5]). Кроме того, используем ядро типа Коши [1, 2]

$$C_\omega(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Delta_k}, \quad \Delta_0 = 1, \quad \Delta_k = k \int_0^1 t^{k-1} \omega(t) dt \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{1.3}$$

которое при любом $\omega(t) \in \Omega$ является голоморфной в $\mathbb{D}$ функцией и в частном случае степенных функций $\omega(x) = (1-x)^\alpha$ $(-1 < \alpha < 0)$ совпадает со степенью $1 + \alpha$ обычного ядра Коши:

$$C_\omega(z) = \frac{1}{(1-z)^{1+\alpha}} := C_\alpha(z), \quad C_0(z) = \frac{1}{1-z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Также будем пользоваться аналогичным ядром типа Шварца

$$S_\omega(z) := 2C_\omega(z) - 1 = 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{\Delta_k}, \quad z \in \mathbb{D},$$

для которого

$$S_\omega(z) \Big|_{\omega(x)=(1-x)^\alpha} = \frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}} - 1 := S_\alpha(z), \quad S_0(z) = \frac{1+z}{1-z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Легко видеть, что

$$L_\omega[r^k] = r^k \Delta_k, \quad r \in [0,1], \quad k = 0, 1, 2, \ldots, L_\omega u(z) \Big|_{u(z)\equiv 1} = 1, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{1.4}$$

и по (1.3), (1.4), $L_\omega C_\omega(z) = C_0(z)$, $z \in \mathbb{D}$.

2. Факторы типа Бляшке

2.1. Как и в [2], мы используем следующее представление обычного фактора Бляшке:

$$\log b_0(z, \zeta) = \log \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta} z} \frac{|\zeta|}{\zeta} = -\int_{|\zeta|}^1 \left\{ \frac{1}{1 - \frac{zt}{\zeta}} + \frac{1}{1 - \frac{z\bar{\zeta}}{t}} - 1 \right\} \frac{dt}{t}, \quad z, \zeta \in \mathbb{D}, \tag{2.1}$$

которое верно при всех $z \neq \zeta$, включая отрезок $l_\zeta = \{z \in \mathbb{D} : \operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} \zeta, \ |z| \geq |\zeta|\}$, где интеграл понимается в смысле главного значения. При фиксированном $\zeta \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ используем фактор типа Бляшке М. М. Джрбашяна

$$b_\omega(z, \zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp\{-W_\omega(z, \zeta)\}, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{2.2}$$

где функция

(2.3)
$$W_\omega(z,\zeta)=\int_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}dx-\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\zeta^{-k}\int_0^{|\zeta|}\omega(x)x^{k-1}dx-\overline{\zeta}^k\int_{|\zeta|}^{1}\omega(x)x^{-k-1}dx\right)\frac{z^k}{\Delta_k}$$

голоморфна в $\mathbb{D}$ (см. [2], стр. 42-43, формулы (1.60), (1.65)). Таким образом, функция $b_\omega(z,\zeta)$ голоморфна в $\mathbb{D}$, где имеет единственный, простой нуль в точке $z=\zeta$. Отметим, что $b_\omega(z,\zeta)\big|_{\omega\equiv 1}=b_0(z,\zeta)$, $z,\zeta\in\mathbb{D}$. Кроме того, справедливо представление

$$b_\omega(z,\zeta)=\exp\{-\Omega(z,\zeta)\},\quad 0\le|z|<|\zeta|<1, \tag{2.4}$$

где

$$\Omega(z,\zeta)=\int_{|\zeta|}^{1}\left[C_\omega\left(\frac{z\overline{\zeta}}{x}\right)+C_\omega\left(\frac{zx}{\zeta}\right)-1\right]\frac{\omega(x)}{x}dx$$

(см. [2], стр. 43-44, формулы (1.67), (1.68)). Мы будем пользоваться также другими свойствами функций $b_\omega(z,\zeta)$ и $b_0(z,\zeta)$, которые приводим ниже.

Лемма 2.1. *Если $\omega(t)\in\Omega$, то в любой точке $z=re^{i\vartheta}\in\mathbb{D}$*

$$L_\omega\log b_0(z,\zeta)=\log|\zeta|+\int_0^1\frac{\omega(t)dt}{t-\frac{\zeta}{z}}+\overline{\zeta}z\int_0^1\frac{\omega(t)dt}{1-\overline{\zeta}zt}, \tag{2.5}$$

$$L_\omega\log b_\omega(z,\zeta)=-\int_{|\zeta|}^{1}\left\{\frac{1}{1-\frac{tz}{\zeta}}+\frac{1}{1-\frac{\overline{\zeta}z}{t}}-1\right\}\frac{\omega(t)}{t}dt, \tag{2.6}$$

$$L_\omega\log|b_\omega(z,\zeta)|=-(1-r^2)\int_{|\zeta|}^{1}\frac{1-r\left(\frac{t}{|\zeta|}+\frac{|\zeta|}{t}\right)\cos(\vartheta-\arg\zeta)+r^2}{\left|1-\frac{tre^{i\vartheta}}{\zeta}\right|^2\left|1-\frac{\overline{\zeta}re^{i\vartheta}}{t}\right|^2}\frac{\omega(t)}{t}dt. \tag{2.7}$$

Доказательство. Формулы (2.5) и (2.6) следуют из (2.15) и первой формулы на стр. 50 [2], поскольку значения $\log b_0(0,\zeta)=\log|\zeta|$ и $\log b_\omega(0,\zeta)=-\int_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}dx$ вещественны. Формула (2.7) та же, что (2.12) на стр. 49 [2]. Сходимость интегралов на отрезке $l_\zeta=\{z\in\mathbb{D}:\operatorname{Arg}z=\operatorname{Arg}\zeta,\ |z|\ge|\zeta|\}$ обеспечена липшицевым свойством функции $\omega(t)$. □

Доказательство следующего утверждения можно найти на стр. 52-53 монографии [2].

Лемма 2.2. *Если $\omega(t)\in\Omega$, то при любом фиксированном ζ $(0<|\zeta|\le 1)$*

$$\varphi_\omega(z,\zeta)=L_\omega\log\frac{b_\omega(z,\zeta)}{b_0(z,\zeta)},$$

- голоморфная в $\mathbb{D}$ функция, и $\operatorname{Re}\varphi_\omega(z,\zeta)\le 0$, $z\in\mathbb{D}$.

Лемма 2.3. *Если $\omega(t) \in \Omega$, то при любом фиксированном ζ $(0 < |\zeta| \leq 1)$ и любом $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{D}$*

$$\log \frac{b_\omega(z,\zeta)}{b_0(z,\zeta)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_\omega(ze^{-i\vartheta}) L_\omega \log |b_0(e^{i\vartheta},\zeta)| d\vartheta := J_\omega(z,\zeta). \tag{2.8}$$

Если $0 < d_0 \leq |\zeta| < 1$, то при любом $z \in \mathbb{D}_\rho := \{z : |z| < \rho\}$ $(0 < \rho < 1)$

$$|J_\omega(z,\zeta)| \leq C_{\rho,d_0,\omega} \int_{|\zeta|}^1 \omega(x)dx < +\infty, \tag{2.9}$$

где $C_{\rho,d_0,\omega} > 0$ - постоянная, зависимая только ρ, d_0 и ω.

Доказательство. Ввиду (2.2), (2.3) и (2.1) функция $\log \frac{b_\omega(z,\zeta)}{b_0(z,\zeta)}$ голоморфна в $\mathbb{D}$, и (2.8) следует из леммы 2.2 и теоремы 1.6 на стр. 38-39 [2], поскольку ввиду (2.7) $L_\omega \log |b_\omega(e^{i\vartheta},\zeta)| = 0$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$, кроме $\vartheta = \arg\zeta$. Далее, используя (1.1), (1.2) и (2.1) получаем

$$\begin{aligned}
L_\omega \log |b_0(e^{i\vartheta},\zeta)| &= \log|\zeta| + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r} \log |b_0(re^{i\vartheta},\zeta)| \omega(r)dr \\
&= \log|\zeta| - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_{|\zeta|}^1 \frac{\zeta e^{i\vartheta} d\sigma}{(\zeta - \sigma re^{i\vartheta})^2} \right) \omega(r)dr - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_{|\zeta|}^1 \frac{\overline{\zeta} e^{-i\vartheta} d\sigma}{(\overline{\zeta} - \sigma re^{-i\vartheta})^2} \right) \omega(r)dr \\
&\quad - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_{|\zeta|}^1 \frac{\overline{\zeta} e^{i\vartheta} d\sigma}{(\sigma - \overline{\zeta} re^{i\vartheta})^2} \right) \omega(r)dr - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_{|\zeta|}^1 \frac{\zeta e^{-i\vartheta} d\sigma}{(\sigma - \zeta re^{-i\vartheta})^2} \right) \omega(r)dr.
\end{aligned}$$

Тем самым

$$J_\omega(z,\zeta) = \log|\zeta| - \frac{1}{2}\int_0^1 \omega(r)dr \int_{|\zeta|}^1 [I_1(\sigma) + I_2(\sigma) + I_3(\sigma) + I_4(\sigma)]d\sigma,$$

где в силу интегральной формулы Коши

$$\begin{aligned}
I_1(\sigma) &= \frac{\zeta}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{S_\omega(ze^{-i\vartheta})e^{i\vartheta}}{(\zeta - \sigma e^{i\vartheta} r)^2} d\vartheta = \frac{\zeta}{2\pi} \int_{-2\pi}^0 \frac{S_\omega(ze^{i\vartheta})e^{i\vartheta}}{(\zeta e^{i\vartheta} - \sigma r)^2} d\vartheta \\
&= \frac{\zeta}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{S_\omega(zw)}{(w\zeta - \sigma r)^2} dw = \begin{cases} \frac{z}{\zeta} S'_\omega\left(\frac{z\sigma r}{\zeta}\right), & \sigma < \frac{|\zeta|}{r}, \\ 0, & \sigma > \frac{|\zeta|}{r}, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2(\sigma) &= \frac{\overline{\zeta}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{S_\omega(ze^{-i\vartheta})e^{-i\vartheta}}{(\overline{\zeta} - \sigma e^{-i\vartheta} r)^2} d\vartheta = \frac{\overline{\zeta}}{2\pi} \int_{-2\pi}^0 \frac{S_\omega(ze^{i\vartheta})e^{i\vartheta}}{(\overline{\zeta} - \sigma e^{i\vartheta} r)^2} d\vartheta \\
&= \frac{\overline{\zeta}}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{S_\omega(zw)}{(\overline{\zeta} - \sigma wr)^2} dw = \begin{cases} \frac{z\overline{\zeta}}{(\sigma r)^2} S'_\omega\left(\frac{z\overline{\zeta}}{\sigma r}\right), & \sigma > \frac{|\zeta|}{r}, \\ 0, & \sigma < \frac{|\zeta|}{r}, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$I_3(\sigma) = \frac{\overline{\zeta}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{S_\omega(ze^{-i\vartheta})e^{i\vartheta}}{(\sigma-\overline{\zeta}re^{i\vartheta})^2}d\vartheta = \frac{\overline{\zeta}}{2\pi}\int_{-2\pi}^{0} \frac{S_\omega(ze^{i\vartheta})e^{i\vartheta}}{(\sigma e^{i\vartheta}-\overline{\zeta}r)^2}d\vartheta$$
$$= \frac{\overline{\zeta}}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{S_\omega(zw)}{(\sigma w-\overline{\zeta}r)^2}dw = \begin{cases} \frac{z\overline{\zeta}}{\sigma^2}S'_\omega\left(\frac{z\overline{\zeta}r}{\sigma}\right), & \sigma > |\zeta|r, \\ 0, & \sigma < |\zeta|r. \end{cases}$$

$$I_4(\sigma) = \frac{\zeta}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{S_\omega(ze^{-i\vartheta})e^{-i\vartheta}}{(\sigma-\zeta e^{-i\vartheta}r)^2}d\vartheta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{S_\omega(zw)\zeta dw}{(\sigma-\zeta wr)^2}$$
$$= \begin{cases} \frac{z}{\zeta r^2}S'_\omega\left(\frac{z\sigma}{\zeta r}\right), & \sigma < |\zeta|r, \\ 0, & \sigma > |\zeta|r. \end{cases}$$

Следовательно, получаем

$$J_\omega(z,\zeta) = \log|\zeta| - \frac{1}{2}\int_{|\zeta|}^1 \omega(r)dr\int_{|\zeta|}^{|\zeta|/r} \frac{z}{\zeta}S'_\omega\left(\frac{z\sigma r}{\zeta}\right)d\sigma$$
$$-\frac{1}{2}\int_{|\zeta|}^1 \omega(r)dr\int_{|\zeta|/r}^1 \frac{z\overline{\zeta}}{(\sigma r)^2}S'_\omega\left(\frac{z\overline{\zeta}}{\sigma r}\right)d\sigma - \frac{1}{2}\int_0^1 \omega(r)dr\int_{|\zeta|}^1 \frac{z\overline{\zeta}}{\sigma^2}S'_\omega\left(\frac{z\overline{\zeta}r}{\sigma}\right)d\sigma$$
$$:= \log|\zeta| + K_1 + K_2 + K_3.$$

Если $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{D}_\rho$ (и $d_0 \le |\zeta| \le 1$), то

$$|\log|\zeta|| = \log\frac{1}{|\zeta|} \le \frac{1}{\omega(d_0)}\int_{|\zeta|}^1 \frac{\omega(t)}{t}dt \le \frac{1}{d_0\omega(d_0)}\int_{|\zeta|}^1 \omega(t)dt.$$

Далее, при $|\zeta| \le \sigma \le |\zeta|/r$

$$\left|\frac{z}{\zeta}S'_\omega\left(\frac{z\sigma r}{\zeta}\right)\right| \le \frac{1}{d_0}S'_\omega(\rho), \quad \text{и, тем самым,} \quad |K_1| \le \frac{S'_\omega(\rho)}{2d_0}\int_{|\zeta|}^1 \omega(r)dr.$$

При $|\zeta|/r \le \sigma \le 1$

$$\frac{|z\overline{\zeta}|}{(\sigma r)^2}\left|S'_\omega\left(\frac{z\overline{\zeta}}{\sigma r}\right)\right| \le \frac{S'_\omega(\rho)}{d_0}, \quad \text{и, тем самым,} \quad |K_2| \le \frac{S'_\omega(\rho)}{2d_0}\int_{|\zeta|}^1 \omega(r)dr.$$

Наконец, при $|\zeta| \le \sigma \le 1$

$$\frac{|z\overline{\zeta}|}{\sigma^2}\left|S'_\omega\left(\frac{z\overline{\zeta}r}{\sigma}\right)\right| \le \frac{S'_\omega(\rho)}{d_0^2}, \quad \text{и, тем самым,} \quad |K_3| \le \frac{S'_\omega(\rho)}{2d_0^2\omega(d_0)}\int_0^1 \omega(r)dr\int_{|\zeta|}^1 \omega(\sigma)d\sigma.$$

Из этих оценок следует неравенство (2.9). □

3. Потенциалы типа Грина

Как хорошо известно, обычным потенциалом Грина в $\mathbb{D}$ является интеграл

$$P_0(z) = -\iint_{|\zeta|<1} \log\left|\frac{\zeta - z}{1-\overline{\zeta}z}\right|d\nu(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{3.1}$$

сходящийся при любой борелевой мере $\nu(\zeta) \geq 0$, подчиненной условию Бляшке

$$\iint_{|\zeta|<1} (1-|\zeta|)d\nu(\zeta) < +\infty.$$

Следующая теорема относится к сходимости потенциалов типа Грина, содержащих факторы Бляшке-Джрбашяна (2.2)-(2.3).

Теорема 3.1. *Пусть $\omega(t) \in \Omega$ и $\nu(\zeta) \geq 0$ - борелева мера в $\mathbb{D}$, с носителем в кольце $\{\zeta \in \mathbb{D} : 0 < d_0 \leq |\zeta| < 1\}$ и такая, что*

$$\iint_{|\zeta|<1} \left(\int_{|\zeta|}^1 \omega(t)dt \right) d\nu(\zeta) < +\infty. \tag{3.2}$$

Тогда потенциал типа Грина

$$P_\omega(z) = \iint_{|\zeta|<1} \log |b_\omega(z,\zeta)| d\nu(\zeta)$$

сходится в $\mathbb{D}$, где является субгармонической функцией с риссовской мерой $\nu(\zeta)$.

Доказательство. В любом круге $\mathbb{D}_\rho$ $(0 < d_0 < \rho < 1)$ будем понимать потенциал типа Грина как сумму $P_\omega(z) = P_0(z,\rho) + U_\omega(z,\rho), \quad z \in \mathbb{D}_\rho$, где

$$P_0(z,\rho) = \iint_{\mathbb{D}_\rho} \log \left| \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta} z} \right| d\nu(\zeta) = \iint_{\mathbb{D}_\rho} \log |b_0(z,\zeta)| d\nu(\zeta)$$

- обычный потенциал Грина, сходящийся в $\mathbb{D}$, поскольку

$$+\infty > \iint_{|\zeta|<1} \left(\int_{|\zeta|}^1 \omega(t)dt \right) d\nu(\zeta) \geq \omega(d_0) \iint_{|\zeta|<1} (1-|\zeta|)d\nu(\zeta),$$

а

$$U_\omega(z,\rho) = \iint_{\mathbb{D}\setminus\mathbb{D}_\rho} \log |b_\omega(z,\zeta)| d\nu(\zeta) + \iint_{\mathbb{D}_\rho} \log \left| \frac{b_\omega(z,\zeta)}{b_0(z,\zeta)} \right| d\nu(\zeta)$$
$$:= U_\omega^{(1)}(z,\rho) + U_\omega^{(2)}(z,\rho).$$

Докажем, что $P_\omega(z)$ сходится в $\mathbb{D}$ в том смысле, что при любом $\rho \in (d_0, 1)$ потенциал $P_0(z,\rho)$ сходится в $\mathbb{D}$, а функция $U_\omega(z,\rho)$ is гармонична в $\mathbb{D}_\rho$.

Ввиду голоморфности функции $b_\omega(z,\zeta)$ в $\mathbb{D}$ и ее единственного нуля в точке $z = \zeta$, в $U_\omega^{(1)}(z,\rho)$ подынтегральная функция $\log |b_\omega(z,\zeta)|$ гармонична в $\mathbb{D}_\rho$. Поэтому, полагая, что $z = re^{i\vartheta}$, $\zeta = \lambda e^{i\varphi}$, где $0 \leq \vartheta, \varphi < 2\pi$, $r < \rho_1$, и $\rho_1 \in (0,\rho)$ фиксировано, затем используя определение (2.4) $b_\omega(z,\zeta)$ получаем

$$\left| \log |b_\omega(z,\zeta)| \right| \leq \int_{|\zeta|}^1 \left| C_\omega\left(\frac{\bar{\zeta}z}{x}\right) + C_\omega\left(\frac{zx}{\zeta}\right) - 1 \right| \frac{\omega(x)}{x} dx$$
$$\leq \frac{1}{d_0} \left[C_\omega(\rho_1) + C_\omega\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right) + 1 \right] \int_{|\zeta|}^1 \omega(x)dx.$$

Следовательно, получаем

$$|U_\omega^{(1)}(z,\rho)| \le \iint_{\mathbb{D}\setminus\mathbb{D}_\rho} |\log|b_\omega(z,\zeta)||d\nu(\zeta) \le M \iint_{\mathbb{D}\setminus\mathbb{D}_\rho} \left(\int_{|\zeta|}^1 \omega(x)dx\right) d\nu(\zeta) < +\infty,$$

где $M > 0$ постоянная, зависящая только от ρ_1, ρ и d_0. Тем самым, модуль подынтегральной функции в $U_\omega^{(1)}(z,\rho)$ обладает независимой от $z \in \mathbb{D}_{\rho_1}$, суммируемой мажорантой, и следовательно, интеграла $U_\omega^{(1)}(z,\rho)$ гармонична в $\mathbb{D}_\rho$. Для доказательства гармоничности $U_\omega^{(2)}(z,\rho)$ в $\mathbb{D}_\rho$, заметим, что его подынтегральная функция гармонична в $z \in \mathbb{D}$, а интеграл равномерно сходится внутри $\mathbb{D}_\rho$ ввиду оценки (2.9). □

Следующая лемма относится к обратному оператору для L_ω.

Лемма 3.1. *Если $\omega \in \Omega$, то уравнение Вольтерра*

$$-\int_x^1 \omega\left(\frac{x}{t}\right) d\widetilde{\omega}(t) \equiv 1 \quad \textit{для п.в.} \quad x \in (0,1) \tag{3.3}$$

имеет имеет неубывающее решение $\widetilde{\omega}(x)$ такое, что $\widetilde{\omega}(1) = 0$, $\widetilde{\omega}(+0) = 1$ и $\widetilde{\omega}(x) \le [\omega(x)]^{-1}$ для всех $0 < x < 1$. Более того, оператор L_ω взаимоодназначно переводит любую гармоническую в круге $|z| < R < +\infty$ функцию в функцию гармоническую в том же круге, и

$$L_\omega^{-1}u(z) = L_{\widetilde{\omega}}u(z) = -\int_{+0}^1 u(z\sigma)d\widetilde{\omega}(\sigma), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Доказательство. Пользуясь теоремой 1.1 из [6] с $\omega_1(x) \equiv 1$, $\omega_2(x) \equiv \omega(x)$ получаем функцию $\widetilde{\omega}(x) := \beta(x)$ с нужными свойствами. Далее, нетрудно видеть, что применение оператора L_ω к функции $u(z)$ гармонической в круге $|z| < R < +\infty$ означает лишь умножение коэффициентов гармонического ряда $u(z)$ на $\Delta_k := \Delta_k(\omega)$. Таким образом, L_ω является взаимоодназначным соответствием между гармоническими функциями. С другой стороны, в силу (3.3)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k} &= \int_{+0}^1 x^{k-1}dx = -\int_{+0}^1 x^{k-1}dx \int_x^1 \omega\left(\frac{x}{t}\right) d\widetilde{\omega}(t) \\
&= -\int_{+0}^1 d\widetilde{\omega}(t) \int_{+0}^t x^{k-1}\omega\left(\frac{x}{t}\right) dx = -\int_{+0}^1 t^k d\widetilde{\omega}(t) \int_0^1 x^{k-1}\omega(x)dx \\
&= k\int_0^1 t^{k-1}\widetilde{\omega}(t)dt \int_0^1 x^{k-1}\omega(x)dx.
\end{aligned}$$

Следовательно $\Delta_k(\omega) = \{\Delta_k(\widetilde{\omega})\}^{-1}$, а применение $L_{\widetilde{\omega}}$ означает умножение коэффициентов гармонического ряда на $\Delta_k(\widetilde{\omega})$. □

Теперь применим оператор L_ω к потенциалу типа Грина.

Теорема 3.2. *Пусть $\omega(x) \in \Omega$ и борелева мера $\nu(\zeta) \geq 0$ с носителем в $0 < d_0 \leq |\zeta| < 1$ потенциала типа Грина $P_\omega(z)$ удовлетворяет условию (3.2). Далее пусть при любом $\rho \in (0,1)$ замыкание множества $\operatorname{Arg}\{(\text{support } \nu) \cap \mathbb{D}_\rho\}$ имеет и нулевую лебегову меру. Тогда функция $L_\omega P_\omega(z)$ гармонична в области*

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{D} : z \notin \bigcup_{\zeta \in \text{supp}\,\nu} l_\zeta \right\}$$

и внутри $\mathcal{D}$ представима абсолютно и равномерно сходящимся интегралом:

$$L_\omega P_\omega(z) = \iint_{|\zeta|<1} L_\omega \log |b_\omega(z,\zeta)| d\nu(\zeta), \quad z \in \mathcal{D}. \tag{3.4}$$

Кроме того,

$$\lim_{r\to 1-0} \int_0^{2\pi} \left| L_\omega P_\omega(re^{i\vartheta}) \right| d\vartheta = 0. \tag{3.5}$$

Доказательство. Отметим, что функция

$$F(z) = \iint_{|\zeta|<1} L_\omega \log |b_\omega(z,\zeta)| d\nu(\zeta) \tag{3.6}$$

гармонична в $\mathcal{D}$. Действительно, любой компакт $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$ - на расстоянии $\rho_1 > 0$ от $\partial\mathcal{D}$, и оценивая модули подынтегральных функций в (2.6) получаем мажоранту модуля подынтегральной функции (3.6) в любой точке $z = re^{i\vartheta} \in \mathcal{K}$: при любом $t \in (0,1]$

$$L_\omega \log |b_\omega(zt,\zeta)| = -\text{Re} \int_{|\zeta|}^1 \left(\frac{1}{\frac{\zeta}{tre^{i\vartheta}} - x} + \frac{1}{x - \bar{\zeta} re^{i\vartheta} t} \right) \omega(x) dx := J_1 + J_2,$$

и очевидно

$$|J_1| \leq M'_{d_0,\rho_1} \int_{|\zeta|}^1 \omega(x) dx, \quad |J_2| \leq M''_{d_0,\rho_1} \int_{|\zeta|}^1 \omega(x) dx,$$

где M'_{d_0,ρ_1}, M''_{d_0,ρ_1} - постоянные, зависящие только от d_0 и ρ_1. Тем самым,

$$\begin{aligned} |F(z)| &\leq \iint_{|\zeta|<1} \left| L_\omega \log |b_\omega(z,\zeta)| \right| d\nu(\zeta) \\ &\leq M_{d_0,\rho_1} \iint_{|\zeta|<1} \left(\int_{|\zeta|}^1 \omega(t) dt \right) d\nu(\zeta) < +\infty, \end{aligned}$$

где $M_{d_0,\rho_1} = \max\{M'_{d_0,\rho_1}, M''_{d_0,\rho_1}\}$, и интеграл в (3.6) абсолютно и равномерно сходится в $\mathcal{K}$, внутри которого представляет гармоническую функцию, поскольку ввиду (2.6) функция $L_\omega \log |b_\omega(z,\zeta)|$ гармонична в $\mathbb{D} \setminus l_\zeta$.

Теперь, применив лемму 3.1, где $\widetilde{\omega}(t)$ - невозрастающая на $0 < t \leq 1$ функция такая, что $\widetilde{\omega}(1) = 0$, $\widetilde{\omega}(+0) = 1$ и $\widetilde{\omega}(t) \leq [\omega(t)]^{-1}$, при $z \in \mathcal{K}$ получаем

$$|L_{\widetilde{\omega}}F(z)| \leq M_{d_0,\rho_1} \iint_{|\zeta|<1} \left(\int_{|\zeta|}^1 \omega(x)dx \right) d\nu(\zeta) < +\infty.$$

Эта мажоранта подынтегральной функции в (3.6) обеспечивает гармоничность функции $L_{\widetilde{\omega}}F(z)$ во всем круге $\mathcal{D}$ и позволяет перенести примененный к $F(z)$ оператор $L_{\widetilde{\omega}}$ под знак интеграла по $|\zeta| < 1$. Таким образом, в силу (2.6) и равенства $L_{\widetilde{\omega}}L_\omega C_\omega(z) = C_\omega(z)$ получаем, что при любом $z \in \mathcal{K}$

$$L_{\widetilde{\omega}}F(z) = -\int_{+0}^1 F(z\sigma)d\widetilde{\omega}(\sigma) = \iint_{|\zeta|<1} \left[-\int_{+0}^1 L_\omega \log|b_\omega(z\sigma,\zeta)|d\widetilde{\omega}(\sigma) \right] d\nu(\zeta)$$
$$= \iint_{|\zeta|<1} L_{\widetilde{\omega}}L_\omega \log|b_\omega(z,\zeta)|d\nu(\zeta) = \iint_{|\zeta|<1} \log|b_\omega(z,\zeta)|d\nu(\zeta) = P_\omega(z),$$

что верно для всех $z \in \mathcal{D}$ в силу единственности гармонической функции. Отсюда, применив оператор L_ω в силу леммы 3.1 заключаем, что $L_\omega P_\omega(z) = F(z)$, $|z| < d_0$, т.е. формула (3.4) верна в $|z| < d_0$ и, теме самым, во всей области $\mathcal{D}$. Наконец, для доказательства (3.5) отметим, что

$$\int_0^{2\pi} \left|L_\omega \log|b_\omega(re^{i\vartheta},\zeta)|\right| d\vartheta \leq C_{\omega,d_0} \int_{|\zeta|}^1 \omega(t)dt, \quad |\zeta| < 1, \tag{3.7}$$

где C_{ω,d_0} постоянная, зависящая лишь от ω и d_0 (см. (2.14) на стр. 50 [2]), и очевидно

$$\int_0^{2\pi} |L_\omega P_\omega(re^{i\vartheta})| d\vartheta \leq C_{\omega,d_0} \iint_{|\zeta|<1} \left(\int_{|\zeta|}^1 \omega(t)dt \right) d\nu(\zeta) < +\infty. \tag{3.8}$$

Поэтому, в силу (3.4), одной версии леммы Фату (см. [7], том I, III.9.35) и формулы (2.7) получаем

$$\limsup_{r\to 1-0} \int_0^{2\pi} |L_\omega P_\omega(re^{i\vartheta})| d\vartheta \leq \limsup_{r\to 1-0} \iint_{|\zeta|<1} d\nu(\zeta) \int_0^{2\pi} \left|L_\omega \log|b_\omega(re^{i\vartheta},\zeta)|\right| d\vartheta$$
$$\leq \iint_{|\zeta|<1} d\nu(\zeta) \int_0^{2\pi} \limsup_{r\to 1-0} \left|L_\omega \log|b_\omega(re^{i\vartheta},\zeta)|\right| d\vartheta = 0. \quad \square$$

4. Весовые классы дельта-субгармонических функций

Всюду ниже полагаем, что $U(z)$ - дельта-субгармоническая в $\mathbb{D}$ функция, т.е. является разностью $U(z) = U_1(z) - U_2(z)$ двух субгармонических в $\mathbb{D}$ функций. Кроме того, полагаем, что риссовская ассоциированная мера функции $U(z)$, т.е. ее заряд $\nu(\zeta)$, минимально разложен в смысле Жордана, т.е. $\nu(\zeta) = \nu_+(\zeta) - \nu_-(\zeta)$, где $\nu_\pm(\zeta)$ - положительная и отрицательная вариации меры $\nu(\zeta)$ - суть неотрицательные борелевы меры с не пересекающимися носителями в $\mathbb{D}$. Две дельта-субгармонические в $\mathbb{D}$ функции $U(z) = U_1(z) - U_2(z)$ и $V(z) = V_1(z) - V_2(z)$ равны, т.е. $U(z) = V(z)$, если $U_1(z) + V_2(z) = U_2(z) + V_1(z)$ всюду в $\mathbb{D}$.

Отметим, что если заряд $\nu(\zeta)$ функции $U(z)$ таков, что потенциал $P_\omega(z)$ сходится, то функция $u(z) = U(z) - P_\omega(z)$ гармонична в $\mathbb{D}$, и $L_\omega U(z) = L_\omega u(z) + L_\omega P_\omega(z)$, $z \in \mathbb{D}$, где $L_\omega u(z)$ и $L_\omega P_\omega(z)$ вполне определены выше. Далее, если функция $U(z)$ дельта-субгармонична в круге $\mathbb{D}_R$ $(0 < R < 1)$, то при любом $r \in (0, R)$

$$u(z) = U(z) - \iint_{|\zeta|<r} \log\left|b_\omega\left(\frac{z}{r}, \frac{\zeta}{r}\right)\right| d\nu(\zeta)$$

гармонична в $|z| < r$. Тем самым, ввиду леммы 3.1 и теоремы 3.2 функция

$$L_\omega u(z) = L_\omega U(z) - \iint_{|\zeta|<r} L_\omega \log\left|b_\omega\left(\frac{z}{r}, \frac{\zeta}{r}\right)\right| d\nu(z) \tag{4.1}$$

гармонична в $|z| < r$, и в силу (3.7)

$$\sup_{0<\rho<r'} \int_0^{2\pi} \left|L_\omega u(\rho e^{i\vartheta})\right| d\vartheta < +\infty$$

при любом $r' \in (0, r)$. Очевидно, этот супремум ограничен и при $r' = r$. Следовательно, по (3.5) приходим к пуассоновскому представлению

$$L_\omega u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\vartheta} - z|^2} L_\omega U(re^{i\vartheta}) d\vartheta, \quad |z| < r.$$

Подставляя $z = 0$ в разности двух представлений (4.1) в $|z| < r < R$ и в $|z| < r_0 < r$, где r_0 фиксировано, приходим к аналогу формулы Йенсена-Неванлинны:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_\omega U(r_0 e^{i\vartheta}) d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_\omega U(re^{i\vartheta}) d\vartheta \tag{4.2}$$
$$- \iint_{r_0<|\zeta|<r} \left(\int_{|\zeta|/r}^1 \frac{\omega(x)}{x} dx\right) d\nu(\zeta) - \iint_{|\zeta|\le r_0} \left(\int_{|\zeta|/r}^{|\zeta|/r_0} \frac{\omega(x)}{x} dx\right) d\nu(\zeta),$$

где $r_0 < r < R$. Далее, вводим ω-характеристики неванлинновского типа:

$$m_\omega(r, \pm\infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [L_\omega U(re^{i\vartheta})]^{\pm} d\vartheta,$$

$$N_\omega(r, r_0, \pm\infty) = \int_{r_0}^r \frac{n_\pm(t) - n_\pm(r_0)}{t} \omega\left(\frac{t}{r}\right) dt + \int_0^{r_0} \left(\int_{t/r}^{t/r_0} \frac{\omega(x)}{x} dx\right) dn_\pm(t),$$
$$= \int_{r_0}^r \frac{n_\pm(t) - n_\pm(r_0)}{t} \omega\left(\frac{t}{r}\right) dt$$
$$+ \left\{ n_\pm(r_0) \int_{r_0/r}^1 \frac{\omega(x)}{x} dx + \int_0^{r_0} \frac{n_\pm(t)}{t} \left[\omega\left(\frac{t}{r}\right) - \omega\left(\frac{t}{r_0}\right)\right] dt \right\},$$

$$T_\omega(r, r_0, \pm\infty) = m_\omega(r, \pm\infty) + N_\omega(r, r_0, \pm\infty),$$

где $n_{\pm}(t) = \iint_{|\zeta|\le t} d\nu_{\mp}(\zeta)$, а $a^+ = \max\{a, 0\}$, $a^- = a^+ - a$. Отметим, что приведенные величины с $+\infty$ характеризуют близость функции $L_\omega U(z)$ к $+\infty$, а те, которые с $-\infty$ - близость $L_\omega U(z)$ к $-\infty$. Тем самым, формулу (4.2) можно написать в виде равновесия между характеристиками роста и убывания функции $L_\omega U(z)$:

$$(4.3) \quad T_\omega(r, r_0, +\infty) = T_\omega(r, r_0, -\infty) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L_\omega U(r_0 e^{i\vartheta})d\vartheta, \quad 0 < r_0 < r < 1,$$

где интеграл справа - постоянная.

Определение 4.1. *Если $\omega(t) \in \Omega$, то N_ω - класс дельта-субгармонических в $\mathbb{D}$ функций $U(z)$ таких, что:*

(i) *носитель асоцированного с $U(z)$ заряда ν лежит вне круга $|z| < d_0 < 1$ и при любом $\rho \in (0, 1)$ замыкание множества $\{\mathrm{Arg}\ (\mathrm{supp}\,\nu) \cap \mathbb{D}_\rho\}$ имеет нулевую лебегову меру.*

(ii) *При некотором $0 < r_0 < 1$*

$$(4.4) \qquad \sup_{r_0 < r < 1} T_\omega(r, r_0, +\infty) < +\infty.$$

Отметим, что если соотношение (4.3) имеет место при каком-либо $0 < r_0 < 1$, то оно справедливо при любом $r_0 \in (0, 1)$.

В следующей теореме дано параметрическое представление классов N_ω.

Теорема 4.1. *При любом $\omega \in \Omega$ класс N_ω совпадает с множеством функций представимых в виде*

$$(4.5) \quad U(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\{S_\omega(ze^{-i\vartheta})\}d\mu(\vartheta) + \iint_{|\zeta|<1} \log\left|b_\omega(z, \zeta)\right| d\nu(\zeta), \quad z \in \mathbb{D},$$

где $\mu(\vartheta)$ - функция ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$, а $\nu(\zeta) = \nu_+(\zeta) - \nu_-(\zeta)$, где $\nu_\pm(\zeta) \ge 0$ - борелевы меры с носителями в каком-либо кольце $d_0 < |\zeta| < 1$. далее, при любом $\rho \in (0, 1)$ замыкание множества $\{\mathrm{Arg}\ (\mathrm{supp}\,\nu_\pm) \cap \mathbb{D}_\rho\}$ имеет нулевую лебегову меру, и

$$(4.6) \qquad \iint_{|\zeta|<1} \left(\int_{|\zeta|}^1 \omega(x)dx\right) d\nu_\pm(\zeta) < +\infty.$$

Меру $\mu(\vartheta)$ в (4.5) можно найти по формуле обращения Стильтьеса:

$$(4.7) \qquad \mu(\vartheta) = \lim_{r\to 1-0}\int_0^\vartheta L_\omega U(re^{i\varphi})d\varphi \quad \text{для п.в.} \quad 0 < \vartheta < 2\pi.$$

Доказательство. Если $U(z) \in N_\omega$, то ввиду (4.3) условие (4.4) обеспечивает ограниченность характеристик $N_\omega(r, r_0, \pm\infty)$, откуда следует (3.2). Таким образом, потенциалы типа Грина с мерами $\nu_\pm$ сходятся. Следовательно, функция

$$V(z) = U(z) - \iint_{|\zeta|<1} \log\left|b_\omega(z,\zeta)\right| d\nu(\zeta)$$

гармонична в $\mathbb{D}$, что верно также для функции

$$L_\omega V(z) = L_\omega U(z) - \iint_{|\zeta|<1} L_\omega \log\left|b_\omega(z,\zeta)\right| d\nu(\zeta).$$

Кроме того, ясно что $\sup\limits_{r_0<r<1} m_\omega\big(r, r_0, +\infty, \pm L_\omega U\big) < +\infty$, и поэтому

$$\sup_{r_0<r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|L_\omega U(re^{i\vartheta})\right| d\vartheta \\ \le \sup_{r_0<r<1} \left[m_\omega\big(r, r_0, +\infty, L_\omega U\big) + m_\omega\big(r, r_0, +\infty, -L_\omega U\big)\right] < +\infty.$$

Следовательно, ввиду (3.8)

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \left|L_\omega V(re^{i\vartheta})\right| d\vartheta < +\infty,$$

и воспользовавшись теоремой 1.5 на стр. 37 [2] приходим к представлению (4.5):

$$V(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left\{S_\omega(ze^{-i\vartheta})\right\} d\mu(\vartheta) = U(z) - \iint_{|\zeta|<1} \log\left|b_\omega(z,\zeta)\right| d\nu(\zeta), \quad z \in \mathbb{D},$$

где $\mu(\vartheta)$ - функция ограниченной вариации в $[0, 2\pi]$. Далее, применив оператор L_ω приходим к следующему пуассоновскому представлению, влекущую (4.7):

$$L_\omega V(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\vartheta}-z|^2} d\mu(\vartheta), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Обратно, если $U(z)$ представима в виде (4.5), то функция $u(z) = U(z) - P_\omega(z)$ гармонична в $\mathbb{D}$ и принадлежит классу U_ω из теоремы 1.5 на стр. 37 [2], т.е.

$$\sup_{0<r<1} \left\{\int_0^{2\pi} \left|u_\omega(re^{i\varphi})\right| d\varphi\right\} < +\infty \quad \text{для} \quad u_\omega(z) := L_\omega u(z).$$

Кроме того, это соотношение верно для $P_\omega(z)$ в силу (3.8). Следовательно,

$$\sup_{0<r<1} m_\omega\big(r, +\infty, L_\omega U\big) < +\infty.$$

Отсюда и из (4.6) получаем

$$\sup_{r_0<r<1} T_\omega\big(r, r_0, +\infty, L_\omega U\big) < +\infty, \quad \text{т.е.} \quad U(z) \in N_\omega. \qquad \square$$

Автор благодарен академику В.С. Захаряну за полезные обсуждения и ценные советы.

Abstract. The paper gives the delta-subharmonic extension of the part of the factorization theory of M. M. Djrbashian - V. S. Zakaryan, which relates with the descriptive representations of the classes $N\{\omega\}$ of functions meromorphic in the unit disc, contained in Nevanlinna's class N of functions of bounded type.

Список литературы

[1] M. M. Džrbašjan, Theory of Factorization and Boundary Properties of Functions Meromorphic in the Disc, Proc. International Congress of Mathematicians (Vancouver 1974), **2**, Canad. Math. Congress, Montreal (1975).

[2] М. М. Джрбашян, В. С. Захарян, Классы и Граничные Свойства Функций Мероморфных в Круге, Наука, Москва (1993).

[3] А. М. Джрбашян, Дж. Э. Рестрепо, "О некоторых классах гармонических функций с неотрицательными гармоническими мажорантами в полуплоскости", Изв. НАН Армении, Математика, **51** (2), 51 – 61 (2016).

[4] А. М. Джрбашян, Дж. Э. Рестрепо, "О некоторых подклассах дельта-субгармонических функций с неотрицательными гармоническими мажорантами в полуплоскости", Изв. НАН Армении, Математика, **51**, но. 3, 111 – 124 (2016).

[5] А. М. Джрбашян, "Расширение теории факторизации М. М. Джрбашяна", Изв. НАН Армении, Математика, **30**, но. 2, 39 – 61 (1995).

[6] А. М. Джрбашян, "О вложении классов N_ω типа Неванлинны", Изв. РАН, **63**, 59 – 78 (1999).

[7] N. Dunford, J. I. Schwarz, Linear operators, Vol. I, New York: Interscience Publishers (1971).

Поступила 23 декабря 2016