Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 6, 2018, стр. 53 – 69

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СЛАБО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

В. Н. МАРГАРЯН, Г. Г. КАЗАРЯН

Российско - Армянский (Славянский) Университет, Армения
Институт Математики НАН Армении
E-mails: *haikghazaryan@mail.ru*; *vachagan.margaryan@yahoo.com*

Аннотация. Рассматривается задача Коши в мультианизотропных пространствах типа пространств Жевре. Найдено необходимое условие для однозначной разрешимости этой задачи и исследованы свойства гиперболических операторов (многочленов) с определенным весом.

MSC2010 number: 12E10.

Ключевые слова: гиперболический с весом оператор (многочлен); мультианизотропное пространство Жевре; вполне правильный многогранник Ньютона.

1. Введение. Постановка задачи

Пусть $\mathbb{E}^n$ и $\mathbb{R}^n$- n-мерные вещественные пространства точек соответственно $x = (x_1, ..., x_n)$ и $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$, $\mathbb{R}^{n,+} = \{\xi \in \mathbb{R}^n, \xi_j \geq 0,\ j = 1, ..., n\}$, $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \times i\mathbb{R}^n$, $\mathbb{N}$-множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = N \cup \{0\}$, $N_0^n = N_0 \times ... \times N_0$-множество n-мерных мультииндексов. Для $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ и $\nu \in \mathbb{R}^{n,+}$ положим $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + ... + \xi_n^2}$, $|\xi|^\nu = |\xi_1|^{\nu_1} \cdots |\xi_n|^{\nu_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} ... \xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \partial/\partial\xi_j$ либо $D_j = \frac{1}{i}.\partial/\partial x_j$ $(j = 1, ...n)$.

Для линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами $P(D) = \sum_\alpha \gamma_\alpha D^\alpha$, где сумма распространяется по конечному набору мультииндексов $(P) = \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \gamma_\alpha \neq 0\}$, через $P(\xi) = \sum_\alpha \gamma_\alpha \xi^\alpha$ обозначим характеристический многочлен (полный символ) отвечающий этому оператору, через $m = m(P)$ обозначим его порядок, а через P_m его главную (m−однородную) часть и представим многочлен P в виде суммы j−однородных многочленов $(j = 1, ..., m)$

---

[0] Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта N SCS 15T - 1A 197 и тематического фонда Российско - Армянского (Славянского) университета министерства образования и науки Российской Федерации.

$$P(\xi) = \sum_{\alpha} P_j(\xi) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{|\alpha|=j} \gamma_\alpha \xi^\alpha. \tag{1.1}$$

Пусть $N = (N_1, ..., N_n) \in \mathbb{E}^n$, Ω_N - полупространство, заданное неравенством $(x, N) > 0$, $f-$ заданная функция с носителем $supp f \subset \bar{\Omega}_N$. Задача Коши для оператора $P(D)$ в Ω_N с однородными начальными данными состоит в нахождении решения уравнения $P(D)u = f$ в $\mathbb{E}^n$ такого,что $supp u \subset \bar{\Omega}_N$. Далее, не оговоривая это каждый раз, будем полагать, что $N-$ единичный вектор.

Определение 1.1. *Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется гиперболическим (по Гордингу) относительно вектора $N \in \mathbb{E}^n$, если $P_m(N) \neq 0$ и для некоторого вещественного τ_0 $P(\xi + i\tau N) \neq 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\tau < \tau_0$.*

Замечание 1.1. *Легко убедится, что, если многочлен $P(\xi)$ и вектор $N \in \mathbb{E}^n$ такие, что $P_m(N) \neq 0$, то существует вещественное число C такое, что $P(\xi + i\tau N) \neq 0$ для всех $(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{n+1}$ и $|\tau| \geq C(|\xi| + 1)$.*

Если $N = (1, 0, ..., 0)$ часто бывает удобно рассматривать $(n+1)-$мерное пространство $\mathbb{E}^{n+1}$ (или $\mathbb{R}^{n+1}$) и выделить одну из переменных, которую обычно обозначают через t, а группу переменных через $(t, x) = (t, x_1, ..., x_n)$. Чтобы изложить некоторые известные результаты, непосредственно связанные с настоящей работой, мы поступим следующим образом: будем временно считать, что $N = (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{E}^{n+1}$ и вместо $P(D)$ запишем $P(D_t, D_x)$, а вместо $P(\xi)$ соответственно $P(\lambda, \xi)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Оператор

$$P(D_t, D_x) = D_t^m + \sum_{|\nu|+j \leq m, j \neq m} \gamma_{\nu,j} D_x^\nu D_t^j \tag{1.2}$$

с постоянными коэффициентами называется **слабо гиперболическим** относительно t, или, что то же самое, относительно $(n+1)-$мерного вектора $N = (1, 0, ..., 0)$, если для любой точки $\xi \in \mathbb{R}^n$, корни (по λ) многочлена

$$P_m(\lambda, \xi) = \lambda^m + \sum_{|\nu|+j=m, j<m} \gamma_{\nu,j} \xi^\nu \lambda^j \tag{1.3}$$

вещественны. При этом, если все эти корни простые, то оператор называется **строго гиперболическим** или **гиперболическим по Петровскому**.

Изучение задачи Коши для общих гиперболических и в частности слабо гиперболических уравнений началось с работы [3] Е. Е. Леви, где рассматривался двумерный случай. В 1951 - ом году Л.Гордингом было введено понятие общего гиперболического оператора (уравнения, многочлена), обобщающее понятие гиперболичности по Петровскому (см. [4], [5] или [6, определение 12.3.3]). Было доказано, что условие гиперболичности (и тем самым условие слабой гиперболичности) необходимо для того, чтобы нехарактеристическая задача Коши имела решение в классе распределений $D'(\mathbb{E}^n)$ Л. Шварца (см., например, [7], [8] или [6, теорема 12.3.1]).

Нахождение наиболее широких функциональных пространств, где задача Коши для гиперболического оператора поставлена корректно, привело к классам Жевре (см. [9]). Эти классы являются промежуточными между классами бесконечно дифференцируемых и вещественно - аналитических функций. Однако, если условие строгой гиперболичности является достаточным для корректности постановки задачи Коши в C^∞, эта задача вообще говоря перестаёт быть корректно поставленной для слабо гиперболических уравнений, в чём легко убедится даже на примере оператора теплопроводности, для которого задача Коши поставлена корректно в классе Жевре G^s при $s < 2$, но поставлена некорректно в G^s при $s \geq 2$ или в C^∞ (см., например, [6, пункт 4.2]). При этом $G^s(\Omega)$– это множество функций $u \in C^\infty(\Omega)$ таких, что для каждого компакта $K \subset \Omega$ существует постоянная $C = C(K) > 0$ такая, что

$$\sup_{x\in K}|D^\alpha u(x)| \leq C^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s \quad \text{для любого } \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

Для слабо гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами критерии корректности задачи Коши получены в работах Леви, Гординга, Лакса, Свенссона и других (см., например, [3], [10] - [13]).

Оператор $P(D_t, D_x)$ называется s–гиперболическим ($1 < s < \infty$) относительно t, или, что то же самое относительно $(n+1)$–мерного вектора $N = (1, 0, ..., 0)$, если существует число $c > 0$ такое, что $Im\lambda \geq -c(1 + |\xi|)^{\frac{1}{s}}$ для тех точек $(\lambda, \xi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n$ для которых $P(\lambda, \xi) = 0$. Если $Im\lambda \geq -c$, то оператор $P(D_t, D_x)$ называют гиперболическим (по Гордингу) (см.[5], [15]). Для более подробных сведений см. монографию Л. Родино [16, глава 12].

В работах [12] и [13] доказано, что для s–гиперболического оператора (1.2) задача Коши с начальными условиями $D_t^k u(0, x) = f_k(x)$ $(x \in \mathbb{E}^n)$ и начальными функциями $f_k \in G_0^{s_1}(\mathbb{E}^n) := G^{s_1}(\mathbb{E}^n) \cap C_0^\infty(\mathbb{E}^n)$ $k = 0, 1, ..., m-1$, $(1 < s_1 < s)$, имеет решение $u \in G^{s_1}(\mathbb{E}^{n+1})$. При этом оказалось, что каждый s - гиперболический оператор является слабо гиперболическим и каждый слабо гиперболический оператор является $\frac{r}{r-1}$-гиперболическим, где $r-$ максимальная кратность характеристик (нулей символа $P_m(\lambda,\xi)$ по λ) (см. [13] и [9]).

В работе [14] О. Лиссом и Л. Родино (для более подробных сведений см. монографию [16]) для символа $P(t,\xi)$ оператора $P(D_t, D_x)$ введено понятие весовой функции гиперболичности, зависящей только от переменных $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ и определены неоднородные классы Жевре, порожденные такими весами. Ими, а далее в более общем случае Д. Калво в [17] изучены вопросы существования решения задачи Коши в этих пространствах.

Д. Калво в [17] введено также понятие $(s\cdot\Re)-$гиперболического (мультиквазигиперболического) относительно $(n+1)-$мерного вектора $N=(1,0,...,0)$, оператора, обобщающее понятие $s-$гиперболичности. Это оператор $P(D_t, D_x)$ вида (1.2), для которого существует число $c>0$ такое, что символ (1.3) удовлетворяет условию: если $P(\lambda,\xi)=0$, то $Im\lambda \geq -c|\xi|_{\Re}^{\frac{1}{s}}$, где $h(\xi)\equiv|\xi|_{\Re}-$ некоторый (вполне определённый) вес, зависящий от ξ, но не зависящий от t. В [17] доказывается существование единственного решения соответствующей задачи Коши в $C^\infty([\ T,T])\cap G^{s_1\cdot\Re}(\mathbb{E}^n_x)$ для любых (T,s) : $T>0$, $1<s_1<s$ и для произвольных начальных данных из $G_0^{s_1\cdot\Re}(\mathbb{E}^n_x)$.

Во всех работах, посвящённых $s-$гиперболическим или $(s\cdot\Re)-$гиперболическим относительно вектора $N\in\mathbb{E}^{n+1}$ операторам $P(D_t,D_x)$, выделялось одно переменное t, т.е. рассматривался случай $N=(1,0,...,0)$, при этом вес гиперболичности не зависел от t.

В настоящей работе мы выводим необходимые условия для существования единственного решения нехарактеристической задачи Коши для гиперболических уравнений с весом, когда а) (единичный) вектор $N\in\mathbb{E}^{n+1}$ произвольный, б) вес гиперболичности зависит от всех переменных, следовательно, мультианизотропное пространство Жевре, где ищется решение, порождается общим весом. При этом, так как переменные будут играть одинаковую роль, то будем считать, что изучаемые операторы действуют в $n-$ мерном пространстве. Исследуются свойства символов, отвечающих рассмотренным линейным дифференциальным операторам.

Для набора точек $\aleph = \{a^1, ..., a^M\}$, $a^k \in \mathbb{R}^{n,0}$ $(k = 1, ..., M)$ наименьший выпуклый многогранник $\Re(\aleph)$ в $\mathbb{R}^{n,0}$, содержащий все точки набора $\aleph$ называется **многогранником Ньютона** набора $\aleph$ (см [1] или [2]).

Многогранник $\mathfrak{R}$ с вершинами из $\mathbb{R}^{n,+}$ называется полным, если $\mathfrak{R}$ имеет вершину в начале координат и дополнительную вершину на каждой оси координат $\mathbb{R}^{n,+}$. Полный многогранник $\mathfrak{R}$ называется **вполне правильным** , если (единичные) внешние нормали всех $(n-1)$–мерных некоординатных граней $\mathfrak{R}$ (множество которых обозначим через $\Lambda(\mathfrak{R})$) имеют положительные координаты.

Мы намерены, используя установленные в настоящей работе свойства h - гиперболических многочленов, в другой работе привести достаточные условия корректной постановки задачи Коши в соответствующих пространствах Жевре для уравнений, символы которых являются h–гиперболическими.

Пусть $\mathfrak{R} \in \mathbb{R}^{n,+}$ вполне правильный многогранник и $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{R})$. Через $\mathfrak{R}^0$ обозначим множество его вершин и положим

$$d(\lambda) = d(\lambda, \mathfrak{R}) = \max_{\nu \in \Re}(\nu, \lambda) = \max_{\nu \in \Re} \sum_{j=1}^{n} \nu_j \lambda_j,$$

$$r_j = r_j(\mathfrak{R}) = \max_{\lambda \in \Lambda(\Re)} \frac{d(\lambda)}{\lambda_j} \ (j = 1, ..., n), \ r_0 = \max_{1 \le j \le n} r_j,$$

$$h_{\mathfrak{R}}(\xi) = \sum_{\nu \in \mathfrak{R}^0} |\xi|^\nu = \sum_{\nu \in \mathfrak{R}^0} |\xi_1|^{\nu_1} ... |\xi_n|^{\nu_n}; \ g(\xi) = 1 + |\xi|^{r_0}.$$

В [18] доказано существование числа $C = C(\Re) > 0$ такого, что

$$h_{\mathfrak{R}}(\xi + \eta) \le C[h_{\mathfrak{R}}(\xi) + g(\eta)] \ \ \forall \xi, \eta \in \mathbb{C}^n \tag{1.4}$$

Для вполне правильного многогранника $\mathfrak{R}$, числа $r \ge 1$ и области $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ введём следующие анизотропные и мультианизотропные классы и пространства Жевре.

Через $\Gamma^r(\Omega)$ обозначим (см. [18]) множество функций $f \in C^\infty(\Omega)$ таких, что для каждого компакта $K \subset\subset \Omega$ существует число $C = C(f, K) > 0$ такое, что

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| \le C^{|\alpha|+1} |\alpha|^{r|\alpha|} \ \ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

Положим $\mathfrak{R}^j = \{\nu \in R^{n,0};\ \nu/j \in \mathfrak{R},\ (j = 1, 2, ...)\}$ и обозначим через $\Gamma^{\mathfrak{R}}(\Omega)$ множество функций $f \in C^\infty(\Omega)$ таких, что для каждого компакта $K \subset\subset \Omega$ существует число $C = C(f, K) > 0$ такое, что

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| \le C^{j+1} j^j \ \ \forall \alpha \in \mathfrak{R}^j, \ j = 0, 1, ...$$

Теорема 2.1. *Пусть $\Re$ вполне правильный многогранник, для которого $r_0 - r_0(\Re) < 1$. Пусть $N \in \mathbb{E}^n$ и $P(D)$ линейный дифференциальный оператор такой, что для любой $f \in G_0^{\Re}(\Omega_N)$ уравнение $P(D)u = f$ имеет единственное решение $u \in G_0^{\Re}(\Omega_N)$. Тогда существует вещественное число с такое, что*

$$(2.1) \qquad P(\xi + i\tau N) \neq 0 \ \ \forall (\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{n+1}, \ \ \tau \leq c\, h_{\Re}(\xi).$$

Замечание 2.1. *Очевидно, любой гиперболический по Гордингу оператор удовлетворяет условию (2.1)*

Доказательство теоремы 2.1 Так как $G_0^{\Re}(\Omega_N)$ является замкнутым подпространством пространства Фреше $G^{\Re}(\mathbb{E}^n)$, отображение $P(D) : G^{\Re}(\mathbb{E}^n) \to G^{\Re}(\mathbb{E}^n)$ непрерывно и по условию теоремы задача Коши для уравнения $P(D)u = f$ при всех $f \in G_0^{\Re}(\Omega_N)$ имеет единственное решение с носителем в Ω_N, то из теоремы Банаха об обратном операторе следует, что оператор $P(D)$ порождает автоморфизм пространства $G_0^{\Re}(\Omega_N)$.

Пусть $y \in \Omega_N$ и $\sigma = \frac{1}{2}(y, N)$. В силу сказанного, для точки $y \in \Omega_N$ существует компакт $K \subset \Omega_N$ и число $\kappa > 0$ такие, что с некоторой постоянной $C_1 > 0$

$$(2.2) \qquad |u(y)| \leq C_1\, |||P(D)u|||_{\Re,\, K,\, \kappa} \ \ \forall u \in G_0^{\Re}(\Omega_N).$$

Выберем функцию $\chi \in \Gamma^{1/r_0}$ такую, что $\chi(t) = 0$ при $t \leq 0$ и $\chi(t) = 1$ при $t > \sigma$. (Существование такой функции доказано в [21]).

Предположим обратное, что существует последовательность $\{(\xi^s, \tau_s)\}_{s=1}^{\infty} \subset R^{n+1}$ такая, что $\tau_s / h_{\Re}(\xi^s) \to -\infty$ при $s \to \infty$ и $P(z^s) \equiv P(\xi^s + i\tau_s N) = 0$ $(s = 1, 2, ...)$. Положим

$$u_s(x) = e^{i(x-y,\, z^s)}\, \chi((x, N)) \ \ (s = 1, 2, ...).$$

Так как (см. [18]) $f\varphi \in G^{\Re}(\Omega)$ для любых $f \in G^{\Re}(\Omega)$ и $\varphi \in \Gamma^{1/r_0}(\Omega)$, то по определению функции χ имеем $u_s \in G_0^{\Re}(\Omega_N)$ $(s = 1, 2, ...)$. Поэтому, в силу (2.2) и определения последовательности $\{z_s\}$, применяя обобщённую формулу Лейбница, имеем с некоторой постоянной $C_2 > 0$ для всех $s = 1, 2, ...$

$$1 = |u_s(y)| \leq C_1 |||P(D)u_s|||_{\Re,\, K,\, \kappa} \leq$$

$$(2.3) \qquad \leq C_2 \sum_{0 \neq \alpha \in \mathbb{N}_0^n} |P^{(\alpha)}(z^s)|\ |||D^{\alpha}\chi((x, N))\, e^{i(x-y,\, z^s)}|||_{\Re,\, K,\, \kappa},$$

где $P^{(\alpha)}(\xi) \equiv D^{\alpha}P(\xi)$.

Отметим, что в правой части (2.3) стоит конечная сумма, так как $P^{(\alpha)}(\xi) \equiv 0$ при $|\alpha| > m$.

В силу определеня функции χ отсюда следует существование положительных чисел $\kappa_1 = \kappa_1(\kappa, \chi)$ и $C_3 = C_3(C_2, \chi)$ таких, что

$$1 \leq C_3 \sum_{|\alpha| \leq m} |P^{(\alpha)}(z^s)| \, |||e^{i(x-y,z^s)}|||_{\mathfrak{R},\, K',\, \kappa_1} \; (s = 1, 2, ...),$$

где $K' = \{x \in K;\, 0 \leq (x, N) \leq \sigma\}$.

В силу определения полунормы $|||\,.\,|||$ отсюда имеем для всех $s = 1, 2, ...$

$$1 \leq C_3 \sum_{|\alpha| \leq m} |P^{(\alpha)}(z^s)| \sup_j \max_{\beta \in \mathfrak{R}^j} \sup_{x \in K'} |D^\beta e^{i(x-y,\, z^s)}| \, \frac{\kappa_1^j}{j^j} =$$

$$= C_3 \sum_{|\alpha| \leq m} |P^{(\alpha)}(z^s)| \sup_j [\max_{\beta \in \mathfrak{R}^j} |(z^s)^\beta|] \sup_{x \in K'} |e^{i(x-y,\, z^s)}| \, \frac{\kappa_1^j}{j^j}.$$

Так как многогранник $\mathfrak{R}$ полный, то существует натуральное число l такое, что $\{\alpha \in N_0^n,\ |\alpha| \leq m\} \subset \mathfrak{R}^l$. Тогда (см. [1], Лемма 2.1) существует число $C_4 > 0$ такое, что

$$\sum_{\beta \in \mathfrak{R}^l} |\eta^\beta| \leq C_4 h_{\mathfrak{R}}^l(\eta) \text{ для всех } \eta \in \mathbb{C}^n.$$

Из последних двух неравенств следует существование постоянной $C_5 > 0$ такой, что для всех $s = 1, 2, ...$

$$1 \leq C_5 \sup_j \{[C_4 h_{\mathfrak{R}}(z^s)]^{j+l} \, e^{-\sigma|\tau_s|} \, \frac{\kappa_1^j}{j^j}\}.$$

Отсюда, в свою очередь имеем для $\kappa_2 = C_4\kappa_1$ и с некоторой постоянной $C_6 > 0$

$$1 \leq C_6 \sup_j h_{\mathfrak{R}}^j(z^s) \, e^{-\sigma|\tau_s|} \, \frac{\kappa_2^j}{j^j} \; (s = 1, 2, ...).$$

Отсюда и из свойства (1.4) весовой функции $h_{\mathfrak{R}}$ имеем

$$1 \leq C_6 \sup_j [h_{\mathfrak{R}}(\xi^s) + 1 + |\tau_s|^{r_0}]^j \, e^{-\sigma|\tau_s|} \, \frac{(C\kappa_2)^j}{j^j} \; (s = 1, 2, ...), \tag{2.4}$$

где C - постоянная из (1.4).

Так как последовательности $\{x_s = C\kappa_2[h_{\mathfrak{R}}(\xi^s) + 1]\}_{s=1}^\infty$ и $y_s = \{|\tau_s| \, (C\kappa_2)^{1/r_0}\}$ при $r = r_0 < 1$ и $\sigma > 0$ удовлетворяют условиям леммы 2.1, то из (2.4) следует, что

$$\lim_{s \to \infty} \sup_j [(h_{\mathfrak{R}}(\xi^s) + 1 + |\tau_s|^{r_0}) \, \frac{C\kappa_2}{j}]^j e^{-\sigma|\tau_s|} = 0,$$

что противоречит (2.4) и доказывает теорему 2.1.

Исходя из теоремы 2.1, введем понятие весовой функции гиперболичности и понятие гиперболического оператора с весом. Причем введенное здесь понятие весовой функции отличается от соответствующего понятия, введённого

Л. Хёрмандером, О. Лиссом, Л. Родино и другими (см. [14] или Определение 1.8.1 в [16]) тем, что весовая функция h может не удовлетворять неравенству $h(\xi+\eta) \leq C\,h(\xi)\,(1+|\eta|^M)$.

Определение 2.1. *Локально ограниченную функцию h, определенную в $\mathbb{R}^n$ назовем весом гиперболичности, если h удовлетворяет следующим условиям*

$$1)\ h(\xi) \geq c > 0\ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad 2)\ \lim_{|\xi|\to\infty} h(\xi)/|\xi| = 0,$$

3) для каждого $t > 0$ существуют числа $0 < a_1(t) < a_2(t)$ такие, что

$$a_1(t)\,h(\xi) \leq h(t\,\xi) \leq a_2(t)\,h(\xi)\ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Множество всех весовых функций обозначим через H. Очевидно, что для любой функции $h \in H$ и числа $C > 0$ $Ch \in H$.

Определение 2.2. *Пусть $N \in \mathbb{R}^n$ и $h \in H$. Многочлен P назовем $h-$гиперболическим относительно вектора N если (см. представление (1.1)) $P_m(N) \neq 0$ и существует вещественное число c такое, что*

$$P(\xi + i\tau N) \neq 0\ \ \forall (\xi,\tau) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \ \tau < c\,h(\xi). \tag{2.5}$$

Из условия 1) на функцию h непосредственно следует, что гиперболический по Гордингу (относительно вектора N) многочлен является $h-$гиперболическим (относительно N) для любой весовой функции $h \in H$.

3. Свойства $h-$гиперболических многочленов

Теорема 3.1. *Пусть $h \in H$. Если многочлен P вида (1.1) $h-$гиперболичен относительно $N \in \mathbb{R}^n$, то его главная часть P_m гиперболична по Гордингу относительно $N \in \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Покажем, что при условиях теоремы существует вещественное число τ_0, для которого

$$P_m(\xi + i\tau N) \neq 0\ \ \forall (\xi,\tau) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \ \tau < \tau_0. \tag{3.1}$$

Положим для $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $t > 0$

$$O(\xi,t) = \{\theta = \theta(\xi,t) \in \mathbb{C}, P(t\,\xi + i\,t\,\theta\,N) = 0\}.$$

Так как для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\ t > 0$ и $\theta \in O(\xi,t)$

$$0 = P(t\,\xi + i\,t\theta\,N) = P(t\,[\xi - (Im\,\theta)\,N] + i\,t\,(Re\theta)\,N),$$

то из $h-$гиперболичности многочлена P следует существование числа C_1 такого, что

$$(3.2) \qquad t\, Re\,\theta \geq C_1\, h(t\,[\xi - (Im\,\theta)\,N]) \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}^n, t > 0, \theta \in O(\xi, t).$$

Очевидно, для каждой пары $(\xi, \theta):\ \xi \in \mathbb{R}^n, \theta \in \mathbb{C}$

$$P_m(\xi + i\,\theta N) = \lim_{t \to \infty} t^{-m} P(t\xi + i\,t\,\theta\,N).$$

Так как $P_m(N) \neq 0$, то нули (по θ) многочлена $Q_t(\theta) := P(t\,\xi + i\,t\theta\,N)$ непрерывно зависят от t. Следовательно, в силу (3.2), нули (по θ) многочлена $P_m(\xi + i\,\theta\,N)$ принадлежат множеству

$$\bigcap_{t>0} \{\theta \in \mathbb{C},\ t\,Re\theta \geq C_1\ h(t[\xi - (Im\theta)N])\} = \bigcap_{t>0} \{\theta \in \mathbb{C},\ Re\theta \geq \frac{C_1}{t} h(t\,[\xi - (Im\theta)\,N])\}.$$

Отсюда непосредственно получаем, что для тех θ, для которых $P_m(\xi + i\,\theta\,N) = 0$

$$Re\,\theta \geq c\, \lim_{t \to \infty} h(t\,[\xi - (Im\,\theta)\,N])\,/t,$$

где $c-$ постоянная из (2.5).

Если $\xi - (Im\,\theta)\,N = 0$ для пары (ξ, θ), то отсюда следует, что $Re\,\theta \geq 0$. Если же $\xi - (Im\,\theta)\,N \neq 0$, то в силу условия 2) на функцию h имеем

$$Re\,\theta \geq \lim_{t \to \infty} \frac{h(t\,[\xi - (Im\,\theta)\,N])}{t|\,\xi - (Im\,\theta)\,N|} |\xi - (Im\,\theta)\,N| = 0.$$

Это значит, что нули (по $\tau = \tau(\xi)$) многочлена $P_m(\xi + i\,\theta\,N)$ лежат в полупространстве $Re\,\tau \geq 0$ для всех $\xi \in R^n$. Поэтому $P_m(\xi + i\theta N) \neq 0$ для любых $\xi \subset R^n$, $\tau < 0$, что и означает, что многочлен P_m гиперболичен по Гордингу относительно вектора N. □

Теорема 3.2. *Если многочлен P $h-$гиперболичен относительно вектора N, то он $h-$гиперболичен относительно вектора $-N$.*

Доказательство. По теореме 3.1 многочлен P_m гиперболичен по Гордингу относительно N, поэтому (см. [6], лемма 8.7.3) можно считать, что коэффициенты P_m вещественны.

Пусть $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\{\tau_j(\xi) : j = 1, ..., m\}$ нули (по τ) многочлена $P(\xi + i\theta N)$. Применяя формулу Тейлора, получим для каждого $l = 0, 1, ..., m$

$$P_{m-\,l}(\xi + i\tau N) = \sum_{\alpha} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} D^\alpha P_{m-\,l}(i\,N) =$$

$$= \tau^{m-l}\ P_{m-\,l}(iN) + \sum_{j=1}^{m-l} \tau^{m-l-j} \sum_{|\alpha|=j} \frac{\xi^\alpha}{\alpha!} D^\alpha P_{m-\,l}(i\,N).$$

Поэтому

$$P(\xi + i\tau N) = \tau^m\, P_m(iN) + \tau^{m-1}[\sum_{j=1}^{n}(D_jP_m)(iN)\xi_j + P_{m-1}(iN)] + ...,$$

где не выписаны члены, содержащие τ в степены меньше $(m-1)$. Следовательно

$$\sum_{j=1}^{m}\tau_j(\xi) = -[\sum_{j=1}^{n}(D_jP_m)(iN)\xi_j + P_{m-1}(iN)]/P_m(iN) =$$

$$= i\left[\sum_{j=1}^{n}(D_jP_m)(N)\xi_j + P_{m-1}(N)\right]/P_m(N).$$

Так как P_m многочлен с вещественными коэффициентами и $N \in \mathbb{R}^n$, то для $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$Re\left[\sum_{j=1}^{m}\tau_j(\xi)\right] = Re[iP_{m-1}(N)]/P_m(N) \equiv const := C_1.$$

Тогда в силу $h-$гиперболичности многочлена P и условия 1) на функцию $h \in H$ имеем с некоторыми вещественными постоянными C_2, C_3

$$Re\,\tau_k = C_1 - \sum_{j\neq k} Re\,\tau_j \leq C_1 - C_2\sum_{j\neq k} h(\xi - Im\,\tau_j(\xi)N) \leq$$

$$\leq C_3\sum_{j\neq k} h(\xi - Im\,\tau_j(\xi)\,N);\quad k = 1, ..., n.$$

Отсюда непосредственно получаем, что $P(\xi + i\tau N) \neq 0$ для произвольных $\xi \in R^n$ и $\tau > C_3\,(n-1)\,h(\xi)$, т.е. многочлен P $h-$гиперболичен относительно вектора $-N$. $\sqcap$

Из этой теоремы непосредственно следует следующее утверждение.

Следствие 3.1. *Многочлена P $h-$гиперболичен относительно вектора N тогда и только тогда, когда существует положительное число c такое, что $P(\xi + i\tau N) \neq 0$ для всех $(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $|\tau| \geq c\,h(\xi)$.*

Следуя Л. Хермандеру для точки $\xi \in R^n$, многочлена P и числа $t > 0$ введём следующие функции (Хермандера) (см. [6], формулы (10.1.7) и (10.4.2))

$$\tilde{R}(\xi) = \sqrt{\sum_{\alpha}|R^{\alpha}(\xi)|^2},\quad \tilde{R}(\xi, t) = \sqrt{\sum_{\alpha}|R^{\alpha}(\xi)|^2\, t^{2|\alpha|}}.$$

Говорят, что многочлен P сильнее многочлена Q и записывают $Q \prec P$, если с некоторой постоянной $C > 0$

$$\tilde{Q}(\xi) \leq C\tilde{P}(\xi)\ \ \forall\xi \in \mathbb{R}^n.$$

Оказывается (см.[6], теорема 10.4.1), что $Q \prec P$ тогда и только тогда, когда существует постоянная $C_1 > 0$ такя, что

$$\tilde{Q}(\xi,t) \le C_1 \tilde{P}(\xi,t) \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ \ \forall t > 1.$$

Определение 3.1. *Пусть $h \in H$. Будем говорить, что многочлен P $h-$сильнее многочлена Q и запишем $Q \prec^h P$, если с некоторой постоянной $C > 0$*

$$\tilde{Q}(\xi,t) \le C \tilde{P}(\xi,t) \ \ \forall (\xi,t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \ \ \forall t \ge h(\xi).$$

Из условия 1) на функции множества H следует, что $Q \prec P$ влечёт $Q \prec^h P$, для любой $h \in H$. Обратное не верно, что подтверждается следующим примером

Пример 3.1. Пусть $n = 2$, $P(\xi) = (\xi_1^2 - \xi_2^2)^2$, $Q(\xi) = \xi_1^3$ и $h(\xi) = (1 + |\xi|)^{1/2}$. Легко проверить, что с некоторыми положительными постоянными C_1, C_2, многочлены P и Q на последовательности $\xi^s = (s,s)$; $s = 1.2, ...$ удовлетворяют следующим соотношениям

$$C_1^{-1} \, s^3 \le \tilde{Q}(\xi^s) \le C_1 \, s^3; \ C_2^{-1} \, s^2 \le \tilde{P}(\xi^s) \le C_2 \, s^2; \ s = 1.2, ...,$$

т.е. P не сильнее Q.

С другой стороны, простые подсчёты показывают, что с некоторыми положительными постоянными C_3, C_4 и для всех $\xi \in \mathbb{R}^2, t > 0$ многочлены P и Q удовлетворяют соотношениям

$$\tilde{Q}(\xi,t) \le C_3(|\xi_1|^3 + |\xi_1|^2 \, t + |\xi_1| \, t^2 + t^4), \ \ \tilde{P}(\xi,t) \ge C_4[(\xi_1^2 + \xi_2^2)t + t^4]$$

из которых непосредственно следует существование постоянной $C_5 > 0$ такой, что $\tilde{Q}(\xi,t) \le C_5 \tilde{P}(\xi,t)$ для всех $(\xi,t) \in \mathbb{R}^3$, $t \ge h(\xi)$ т.е. $Q \prec^h P$.

Лемма 3.1. *Пусть P и Q многочлены от n переменных, а функции $h, h_1 \in H$ удовлетворяют условию*

$$C_1 h(\xi) \le h_1(\xi) \le C_2 h(\xi) \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{3.3}$$

где C_1 и C_2 некоторые положительные постоянные. Тогда 1) $Q \prec^h P$ тогда и только тогда, когда $Q \prec^{h_1} P$, 2) $Q(\theta \cdot) \prec^h P(\theta \cdot)$ для любого $\theta > 0$.

Доказательство. Ясно, что для любого многочлена R порядка не выше m и для произвольных $\tau > 0, \xi \in \mathbb{R}^n, t > 0$

$$(min\{1,t\})^m \tilde{R}(\xi,t) \le \tilde{R}(\xi,t) \le (max\{1,t\})^m \tilde{R}(\xi,t).$$

Следовательно $Q \prec^h P$ тогда и только тогда, когда для любого $\tau > 0$ существует число $C_3 = C_3(\tau) > 0$ такое, что $\tilde{Q}(\xi, \tau t) \leq C_3 \tilde{P}(\xi, \tau t)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $t \geq h(\xi)$, или, что то же самое $\tilde{Q}(\xi, \theta) \leq C_3 \tilde{P}(\xi, \theta)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\theta \geq \tau h(\xi)$.

Пусть $\tau = C_1$ (см. неравенство (3.3)). Тогда в силу левой части (3.3) неравенство $\theta \geq h_1(\xi)$ влечёт неравенство $\theta \geq \tau h(\xi)$, поэтому отсюда следует, что $\tilde{Q}(\xi, \theta) \leq C_3 \tilde{P}(\xi, \theta)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\theta \geq h_1(\xi)$, т.е. $Q \prec^{h_1} P$.

Для доказательства того, что $Q \prec^{h_1} P$ влечёт $Q \prec^h P$ достаточно воспользоваться неравенством $\frac{1}{C_2} h_1(\xi) \leq h(\xi) \leq \frac{1}{C_1} h_1(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, являющимся следствием неравенства (3.3).

Докажем пункт 2) леммы. Пусть $Q \prec^h P$, т.е. с некоторой постоянной $C_4 > 0$ $\tilde{Q}(\xi, t) \leq C_4 \tilde{P}(\xi, t)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $t \geq h(\xi)$, или, что тоже самое

$$\tilde{Q}(\theta\eta, t) \leq C_4 \tilde{P}(\theta\eta, t) \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n, t \geq h(\theta\eta).$$

Применяя свойство 3) функций $h \in H$ и доказанный пункт настоящей леммы, получаем доказательство пункта 2). □

Лемма 3.2. *Если однородный многочлен P_m гиперболичен относительно вектора $N \in \mathbb{R}^n$, то существует число $c > 0$ такое, что*

$$c^{-1} \tilde{P}_m(\xi, t) \leq |P_m(\xi + itN)| \leq c \tilde{P}_m(\xi, t) \quad \forall (\xi, t) \in \mathbb{R}^{n+1}, t > 0 \tag{3.4}$$

Доказательство. В монографии [6], формула (12.4.3) доказано, что в условиях настоящей леммы, с некоторым числом $C_1 > 0$ имеет место неравенство

$$C_1 \widetilde{P_m}(\eta) \leq |P_m(\eta + iN)| \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда и из однородности многочлена P_m следует, что

$$C_1 t^m |\tilde{P}_m(\frac{\xi}{t}) \leq t^m P_m(\frac{\xi}{t} + iN)| = |P_m(\xi + itN)| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Так как для однородного многочлена P_m справедливо тождество

$$t^m \tilde{P}_m(\frac{\xi}{t}) = \sqrt{\sum_\alpha |P_m^{(\alpha)}(\frac{\xi}{t})| \, t^{2m}} =$$

$$= \sqrt{\sum_\alpha |P_m^{(\alpha)}(\xi)| \, \frac{t^{2m}}{t^{2(m-|\alpha|)}}} = \tilde{P}_m(\xi, t) \quad \forall (\xi, t) \in \mathbb{R}^{n+1}, t > 0,$$

то из последних двух соотношений получаем

$$C_1 \tilde{P}_m(\xi, t) \leq |P_m(\xi + itN)| \quad \forall (\xi, t) \in \mathbb{R}^{n+1}, t > 0,$$

что доказывает левую часть (3.4). Правая часть (3.4) получается непосредственным применением формулы Тейлора. □

Лемма 3.3. *Пусть $h \in H$, P_m однородный многочлен порядка m и Q многочлен порядка $k \le m$, представленный в виде суммы j однородных многочленов*

$$Q(\xi) = \sum_{j=0}^{k} Q_j(\xi). \tag{3.5}$$

Если $Q \prec^h P_m$, то $Q_j \prec^h P_m$ $j = 0, 1, ..., k$.

Доказательство. Пусть $t_0, t_1, ..., t_k$ попарно различные, отличные от нуля числа. Так как определитель матрицы $(t_j^l)_{j,l=0}^k$ отличен от нуля и

$$Q(t_j\xi) = \sum_{l=0}^{k} t_j^l\, Q_l(\xi) \;\; j = 0, 1, ..., k,$$

то существуют числа $\{b_{l,j}\}_{l,j=0}^k$ такие, что

$$Q_l(\xi) = \sum_{j=0}^{k} b_{l,j} Q(t_j\xi) \;\; j = 0, 1, ..., k. \tag{3.6}$$

Применяя лемму 3.1, в силу условий настоящей леммы и тождества (3.6), получим существование положительных чисел C_1, C_2 таких, что для всех $l = 0, 1, ..., k$

$$\tilde{Q}_l(\xi, t) \le C_1 \sum_{j=0}^{k} \tilde{Q}(t_j\xi, t) \le C_2 \sum_{j=0}^{k} \tilde{P}_m(t_j\xi, t) \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}^n, t \ge h(\xi).$$

С другой стороны, из однородности многочленов $\{P_m^{(\alpha)}\}$ следует, что для любого числа $\theta \ne 0$ справедливо неравенство

$$\tilde{P}_m(\theta\xi, t) = \sqrt{\sum_{\alpha} |P_m^{(\alpha)}(\theta\xi)|^2 t^{2|\alpha|}} = \sqrt{\sum_{\alpha} |\theta|^{2(m-|\alpha|)} |P_m^{(\alpha)}(\xi)|^2 t^{2|\alpha|}} \le$$

$$\le C(\theta)\tilde{P}_m(\xi, t) \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$

где $C(\theta) = max\{1, \theta^m\}$. Поэтому положив $C_3 = max\{C(t_j) \;\; 0 \le j \le k\}$ получим для всех $l = 0, 1, ..., k$ $\tilde{Q}_l(\xi, t) \le C_3 \tilde{P}_m(\xi, t)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $t \ge h(\xi)$. □

Теорема 3.3. *Пусть $h \in H$ и P_m–однородный многочлен порядка m гиперболический по Гордингу относительно N. Если многочлен Q порядка $ordQ = k < m$ h– слабее P_m, то многочлен $P_m + Q$ h– гиперболичен относительно N.*

Доказательство. В силу леммы 3.3 имеем (см. (3.5)), что $Q_j \prec^h P_m$ $j = 0, 1, ..., k$. Применяя формулу Тейлора и лемму 3.2, получим с некоторыми положительными числами C_1, C_2, C_3 для всех $j = 0, 1, ..., k$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\tau \in \mathbb{R}^1, |\tau| > h(\xi)$

$$|Q_j(\xi + i\tau N)| \le C_1 \tilde{Q}_j(\xi, \tau) \le C_2 \tilde{P}_m(\xi, \tau) \le C_3 |P_m(\xi + i\tau N)|.$$

Отсюда для любого $\sigma > 0$ и для всех $j = 0, 1, ..., k$ получим

$$|Q_j(\sigma\xi + i\tau N)| \leq C_3 |P_m(\sigma\xi + i\tau N)| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ \tau \in \mathbb{R}^1, |\tau| > h(\sigma\xi).$$

В силу однородности многочленов P_m и $\{Q_j\}$ отсюда получаем для всех $\xi \in R^n, \tau \in R^1, |\tau| > h(\sigma\xi)$

$$|Q_j(\xi + i\frac{\tau}{\sigma}N)| \leq C_3\sigma^{m-j}|P_m(\xi + i\frac{\tau}{\sigma}N)| \ j = 0, 1, ..., k. \tag{3.7}$$

Выберем число $\sigma_0 > 0$ так, чтобы $C_2 \sum\limits_{j=0}^{k} \sigma_0^{m-j} \leq \frac{1}{2}$, тогда в силу (3.7) имеем

$$\frac{1}{2}|P_m(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0}N)| \leq |P_m(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0}N)| - \sum_{j=0}^{k} |Q_j(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0}N)| \leq$$

$$\leq |P_m(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0}N) + \sum_{j=0}^{k} Q_j(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0}N)| = |P_m(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0}N) +$$

$$+ Q(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0}N)| \leq |P_m(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0}N)| + \sum_{j=0}^{k} |Q_j(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0}N)| \leq$$

$$\leq \frac{3}{2}|P_m(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0}N)| \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ \tau \in \mathbb{R}^1, |\tau| > h(\sigma_0\xi).$$

В итоге получается, что при соответствующем выборе числа σ_0 для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in \mathbb{R}^1, |\tau| > h(\sigma_0\xi)$ справедливо соотношение

$$\frac{1}{2}|P_m(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0}N)| \leq |(P_m + Q)(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0}N)| \leq \frac{3}{2}|P_m(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0}N)|. \tag{3.8}$$

Так как в силу условий теоремы (см. также доказательство теоремы 3.1) $P_m(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0}N) \neq 0$ при $\tau \neq 0$, то (см. Определение 2.1) имеем $P_m(\xi + i\frac{\tau}{\sigma_0}N) \neq 0$ при $|\tau| \geq h(\sigma_0\xi)$. Тогда из (3.8) непосредственно следует, что $P_m(\xi + i\theta N) + Q(\xi + i\theta N) \neq 0$ при всех $\xi \in \mathbb{R}^n, \theta \in \mathbb{R}^1$ и $\theta > \sigma_0 h(\sigma_0\xi)$.

Отсюда и из условия 3) на функцию h получаем, что многочлен $P_m + Q$ h-гиперболичен относительно N. □

Приведем два примера многочленов, не являющимися гиперболическими по Гордингу, но являющимися h-гиперболическими для определённых функций $h \in H$. При этом во втором примере обе координаты вектора N отличны от нуля.

Пример 3.2. Пусть $n = 2$ и $P(\xi) = (\xi_1^2 - \xi_2^2)^2 + \xi_1^3 \equiv P_4(\xi) + P_3(\xi)$. Легко убедится, что многочлен P_4 гиперболичен по Гордингу относительно вектора $N = (0, 1)$. С другой стороны, так как многочлен P_3 не слабее многочлена P_4 (см. пример 3.1), то по теореме Гординга - Свенссона (см. [11] или [6], теорема 12.4.6) многочлен P не является гиперболическим по Гордингу относительно $N = (0, 1)$. Однако, так как (см. пример 3.1) $P_3 \prec^h P_4$ для $h(\xi) = (1 + |\xi|)^{1/2} \in H$, то по теореме 3.3 многочлен P является $h-$гиперболическим относительно вектора $N = (0, 1)$.

Пример 3.3. Пусть $n = 2$, $P_{10}(\xi) = \xi_1^6 \xi_2^4$, $Q(\xi) = \xi_1^3 \xi_2^2 (\xi_1^4 + \xi_2^4) + \xi_1^8 + \xi_2^8$, $h(\xi) = 1 + |\xi_1|^{1/2} + |\xi_2|^{2/3}$, $N = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Легко убедиться в том, что P_{10} гиперболический по Гордингу относительно N многочлен, $Q \prec^h P_{10}$, но Q не слабее P_{10}. Поэтому многочлен $P_{10} + Q$ не является гиперболическим по Гордингу, но является $h-$гиперболическим относительно N.

Abstract. The paper considers Cauchy problem in the Gevre type multianisotropic spaces. Necessary and sufficient conditions for unique solvability of this problem are obtained and the properties of operators (polynomials) that are hyperbolic with a specified weight are investigated.

Список литературы

[1] В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, **91**, 59 – 91 (1967).

[2] Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин, "Об одном классе гипоэллиптических операторов", Мат. Сборник, **75** (117), но. 3, 400 – 416 (1968).

[3] E. E. Levi, "Caracterische multiple e probleme di Kauchy", Ann. Mat. Pure Apple., **16** (3), 161 – 201 (1909).

[4] И. Г. Петровский, "О проблеме Коши для систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными в области неаналитических функций", Бюлл. Моск. ун - та, (A), **1**, но. 7, 1 – 72 (1951).

[5] L. Görding, "Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients", Acta Math. **85**, 1 – 62 (1951).

[6] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators. 2, Springer - Verlag (1983).

[7] S. Mizohata, On the Cauchy Problem, Notes and Repotes in Mathematics, in Science and Enginering **3**, Academic Press, Inc., Orlando, FL, Science Press, Beiging (1985).

[8] W. Matsumoto, H. Yamahara, "On Cauchy - Kowalevskaya theorem for sistem", Proc. Japan Acad. ser. A, Math. Sci. **67**, no. 6, 181 – 185 (1991).

[9] M. Gevre, "Sur la nature analitique des solutions des equations aux derivatives partielles", Ann. Ec. Norm. Sup., Paris, **35**, 129 – 190 (1918).

[10] P. D. Lax, "Asimptotic solutions of oscillatory initial value problems". Duke Math. J. **24**, 627 – 646 (1974).

[11] S. L. Svensson, "Necessary and sufficient conditions for the hyperbolisity of polynomials with hyperbolic principal parts", Ark. Mat. **8**, 145 – 162 (1969).

[12] E. Larsson, "Generalized hyperbolisity", Ark. Mat. **7**, 11 – 32 (1967).

[13] L. Cattabriga, Alcuni Problemi per Equazioni Differenziali Lineari con Coefficienti Constanti, Quad. Un. Mat. It. **24**, Pitagora, Bologna (1983).

[14] O. Liess, L. Rodino, "Inhomogeneous Gevrey klasses and related pseudodifferetial operators", Anal. Funz. Appl. Suppl. Boll. Un. Mat. It., **3C**, no. 1, 233 – 323 (1984).

[15] L. Görding, "Local hyperbolisity", Proc. of the International Simposium on Partial Diff. Equations (Jerusalim, 1972) Israel J. Math. **13**, 65 – 81 (1972).

[16] L. Rodino, Linear Partial Diff. Operators in Gevrey Spaces, Word Scientific, Singapure (1993).

[17] D. Calvo, "Multianizotropic Gevrey Classes and Caushy Problem", Ph. D. Thesis in Mathematics, Universita degli Studi di Pisa.

[18] V. N.Margaryan, G. H. Hakobyan, "On Gevrey type solutions of hypoelliptic equations", Contemporary Math. Analysis, **31**, no. 2, 33 – 47 (1996).

[19] A. Corli, "Un teorema di rappresentazione per certe classi generelizzate di Gevrey", Boll. Un. Mat. It. Serie **6**, 4 -C, no. 1, 245 – 257 (1985).

[20] L. Zanghirati, "Iterati di operatori e regolarita Gevrey microlocale anisotropa", Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **67**, 85 – 104, (1982).

[21] H. Komatsu, "Ultradistributions. Structure theorems and a characterisation", J. Pac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. JA, **20**, 25 – 105 (1973).

Поступила 19 сентября 2016