Известия НАН Армении. Математика, том 53, н. 6, 2018, стр. 46 – 52

О КОМПАКТНОСТИ РЕГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ L_1

Б. Н. ЕНГИБАРЯН, Н. Б. ЕНГИБАРЯН

Институт Математики НАН Армении
E-mails: *b.yengibaryan@eif.am*, *yengib@instmath.sci.am*

Аннотация. Получено достаточное условие полной непрерывности интегральных операторов типа Фредгольма в пространстве $L_1(a,b)$. Построены равномерные аппроксимации операторами с вырожденными ядрами горизонтально полосатой структуры. Получена количественная оценка погрешности. Указана возможность применения результатов к интегральным уравнениям второго рода, включая уравнения свертки на конечном промежутке, к уравнениям с полярными ядрами, к одномерным уравнениям с ядрами типа потенциала, а также к некоторым уравнениям переноса в неоднородной среде.

MSC2010 number: 45A05, 45H05, 45D05.

Ключевые слова: компактность интегрального оператора в пространстве суммируемых функций; оценка погрешности; ядро типа потенциала; уравнение свертки; уравнение переноса.

1. Введение

Рассмотрим линейный интегральный оператор $\hat{K}$:

$$\hat{K}f(x) = \int_a^b K(x,t)f(t)dt, \quad -\infty < a < b < \infty, \tag{1.1}$$

где K - измеримая функция на $(a,b) \times (a,b)$.
Пусть $\hat{K}$ переводит пространство $L_p(a,b)$ в $L_q(a,b)$, где $p, q \geq 1$. Регулярность $\hat{K}$ означает, что оператор $|\hat{K}|$ с ядром $|K(x,t)|$ также переводит $L_p(a,b)$ в $L_q(a,b)$. Из регулярности $\hat{K}$ следует его ограниченность (см. [1]). Имеет место следующая теорема о компактности (полной непрерывности) регулярных операторов (см. [1]).

Теорема 1.1. *Линейный регулярный интегральный оператор, действующий из $L_p(a,b)$ в $L_q(a,b)$, где $p > q \geq 1$, вполне непрерывен.*

Утверждение теоремы не имеет места в случае $p = q$, который представляет основной интерес с точки зрения теории и решения интегральных уравнений второго рода

$$f(x) = g(x) + \int_a^b K(x,t)f(t)dt. \tag{1.2}$$

В математической физике, в теории случайных процессов и др., возникает вопрос решения уравнения (1.2) в пространстве $L_1(a,b)$. Регулярность $\hat{K}$ в $L_1(a,b)$ эквивалентна выполнению условия

$$\mu(K) = \sup_t \operatorname{ess} \int_a^b |K(x,t)|dx < +\infty. \tag{1.3}$$

Имеет место неравенство $\|\hat{K}\|_{L_1} \le \mu(K)$. В настоящей работе приводится достаточное условие компактности одного широкого класса интегральных операторов в $L_1(a,b)$. Доказательство носит конструктивный характер. Использован простой и естественный, конечномерный аппроксимирующий агрегат, структура которого согласована с определением величины $\mu(K)$. Получена априорная оценка погрешности. Специально рассмотрен оператор с ядром вида

$$K(x,t) = \lambda(x,t)T(x-t), \tag{1.4}$$

где $T \in L_1(-r,r)$, $r = b - a$ а функция λ ограничена:

$$|\lambda(x,y)| \le \lambda_0. \tag{1.5}$$

Обозначим через W класс ядер, удовлетворяющих условию (1.3). Класс W является банаховой алгеброй с μ - нормой $\mu(K)$, в которой умножение определяется через композицию ядер.

Введем подкласс $W_U \subset W$ ядер, обладающих свойством

$$\int_a^b |K(x,t) - K(x,y)|dx \le \sigma(|y-t|), \quad \text{где} \quad \sigma(t) \to 0, \ t \to 0+. \tag{1.6}$$

Через $\hat{W}$ и $\hat{W}_U$ обозначаются алгебры операторов вида (1.1) с ядрами из W и W_U соответственно. $\hat{W}_U$ является подалгеброй и правосторонним идеалом в $\hat{W}$.

Отметим, что выполнение условия (1.6) не предполагает непрерывность или ограниченность ядра по второму аргументу.

2. Аппроксимация оператора $\hat{K} \in \hat{W}_U$

Ниже будет представлен способ конечномерной аппроксимации оператора $\hat{K} \subset \hat{W}_U$. Этот способ примыкает к методу усреднения ядра (МУЯ) работы [2] и имеет некоторое сходство с методом полос (см.[3], статью "Полос метод").

Пусть $\Pi = (s_m)_{m=0}^{n}$ - некоторое разбиение отрезка $[a,b]$:

$$a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b \quad \text{и} \quad G_m \equiv [s_m, s_{m+1}], \ \ m = 0, \cdots, (n-1).$$

Для $K \in W_U$ обозначим

$$(2.1) \qquad \delta_m = \delta_m(K) \equiv \sup_{t,y \in G_m} \int_a^b |K(x,y) - K(x,t)| dx < +\infty .$$

Определение 2.1. *Разбиение* Π *назовем* δ *- разбиением для ядра* $K \in W_U$, *где* $\delta > 0$, *если* $\delta_m(K) \leq \delta$, $\quad m = 0, \cdots, (n-1)$.

Из леммы Гейне-Бореля следует, что для произвольного $\delta > 0$ существует конечное δ - разбиение для $K \in W_U$:

$$(2.2) \qquad \int_a^b |K(x,t) - K(x,y)| dx \leq \delta \quad \text{при} \quad t, y \in G_m, \ \ m = 0, \cdots, (n-1).$$

Пусть $\eta_m \in G_m$, $m = 0, \cdots, (n-1)$. Обозначим через Γ набор $\{\Pi, (\eta_m)\}$. Набору Γ сопоставим интегральный оператор $\hat{K}_\Gamma$ со следующим вырожденным ядром K_Γ "горизонтально полосатой"структуры:

$$K_\Gamma(x,t) = K(x,\eta_m), \ \ t \in G_m, \quad m = 0, \cdots, (n-1).$$

Имеем:

$$(2.3) \qquad K_\Gamma(x,t) = \sum_{m=0}^{n-1} K(x,\eta_m) \chi_m(t) ,$$

где χ_m - характеристическая функция промежутка G_m. Легко проверить, что $\mu(K_\Gamma) \leq \mu(K)$.

Конечномерный оператор $\hat{K}_\Gamma$ переводит $L_1(a,b)$ в подпространство линейных комбинаций вида $\sum\limits_{m=0}^{n-1} c_m K(x,\eta_m)$.

Займемся оценкой близости K и K_Γ по μ - норме. При $t \in G_m$ имеем:

$$(2.4) \qquad \int_a^b |K(x,t) - K_\Gamma(x,t)| dx = \int_a^b |K(x,t) - K(x,\eta_m)| dx \leq \delta_m(K) ,$$

где δ_m определяется согласно (2.1). Если Π является δ - разбиением ядра K, то $\mu(K - K_\Gamma) \leq \delta$, при произвольном выборе промежуточных точек (η_m). Нами получен следующий результат.

Теорема 2.1. *Оператор $\hat{K} \in W_U$ вполне непрерывный в $L_1(a,b)$ и допускает равномерную аппроксимацию конечномерными операторами с ядрами вида (2.3). В случае δ - разбиения Π имеет место оценка*

$$\|\hat{K} - \hat{K}_\Gamma\| \leq \delta. \tag{2.5}$$

3. Операторы с ядрами вида (1.4)

Рассмотрим оператор $\hat{K}$ в случае ядра K вида (1.4),(1.5). Из (1.5) следует, что $K \in W$ и имеет место неравенство

$$\mu(K) \leq \lambda_0 \int_{-r}^{r} |T(x)|dx, \tag{3.1}$$

где $\mu(K)$ определяется согласно (1.3). Поэтому оператор $\hat{K}$ ограниченно действует в пространстве $L_1(a,b)$. Интегральное уравнение (1.2) с таким ядром имеет широкие применения в математической физике. Отметим некоторые известные классы уравнений с ядром (1.4),(1.5).

а) Если $\lambda(x,t) = \lambda = const$, то (1.2) обращается в уравнение свертки на конечном промежутке.

б) Если $T(x) = |x|^{-\gamma}$, $0 < \gamma < 1$, то (1.2) представляет собой одномерное уравнение с ядром типа потенциала. Если к тому же функция $\lambda(x,t)$ непрерывна в квадрате $[a,b] \times [a,b]$, то (1.4) является полярным ядром.

в) Если функция зависит только от второго аргумента t:

$$\lambda(x,t) = \lambda(t), \quad \lambda \in C[a,b], \tag{3.2}$$

то уравнением (1.2) описывается большой круг задач переноса излучения в неоднородном плоском слое. В этих задачах λ представляет собой альбедо рассеяния, зависящее от глубины t.

Уравнение (1.2) с полярным ядром достаточно подробно изучено в пространствах $C[a,b]$ и $L_2(a,b)$ (см. [4]). Приведем основной результат по компактности оператора с ядром (1.4) (см. [5]).

Лемма 3.1. *Пусть ядро K оператора* (1.1) *имеет вид* (1.4). *Если функция λ непрерывна в квадрате $[a,b]\times[a,b]$, то оператор $\hat{K}$ компактен в пространствах $L_1(a,b)$ и $C[a,b]$.*

Применение теоремы в прикладных вопросах выглядит проблематичным. В случае ядер типа потенциала не предполагается выполнение условия теоремы В о непрерывности функции λ.

Ниже будет установлена компактность оператора с ядром (1.4) при более слабом ограничении на функцию λ по сравнению с теоремой В. Предполагается, что λ обладает следующим свойством равномерной непрерывности по второму аргументу:

$$|\lambda(x,y)-\lambda(x,t)|\le\omega(|y-t|),\quad \text{где}\quad \omega(t)\to 0,\ t\to 0+\,. \tag{3.3}$$

Теорема 3.1. *Пусть ядро K имеет вид* (1.4), *где функция λ удовлетворяет условиям* (1.5) *и* (3.3). *Тогда $K\in W_U$ и тем самым имеет место утверждение теоремы 2.1.*

Доказательство. Можно считать, что функция T задана на всей вещественной оси и равна 0 вне промежутка $(-r,r)$. Проверим, что ядро (1.4) удовлетворяет условию (1.6). Воспользуемся неравенством

$$|K(x,y)-K(x,t)|\le|\lambda(x,y)-\lambda(x,t)||T(x-y)|+|\lambda(x,t)||T(x-y)-T(x-t)|.$$

С учетом (3.1) и (1.5) получаем

$$\int_a^b|K(x,y)-K(x,t)|dx\le\omega(|y-t|)\int_{-r}^{r}|T(z)|dz+\lambda_0\int_{-\infty}^{\infty}|T(z)-T(z-(y-t))|\,dz. \tag{3.4}$$

Нам остается воспользоваться свойством абсолютной непрерывности интеграла Лебега, согласно которому второй интеграл в правой части (3.4) стремится к 0 при $|y-t|\to 0$. □

4. Метод усреднения ядра

Метод усреднения ядра основан на приближенной замене уравнения (1.2) уравнением с ядром K_Γ вида (2.3):

$$\bar{f}(x)=g(x)+\int_a^b K_\Gamma(x,t)\bar{f}(t)dt\,. \tag{4.1}$$

Из оценки (2.5) следует, что если оператор $I - \hat{K}$ (где I - единичный оператор) обратим в $L_1(a, b)$, то при достаточно малом δ уравнение (4.1) имеет единственное решение, которое сходится к решению уравнения (1.2) при $\delta \to 0+$. Имеет место известная оценка близости f и $\tilde{f}$ через $\left\|\hat{K} - \hat{K}_\Gamma\right\|$, $\left\|\left(I - \hat{K}\right)^{-1}\right\|$ и $\|g\|_{L_1}$.

Сведем уравнение (4.1) к алгебраической системе. Из (4.1) и (2.3) имеем

$$\tilde{f}(x) = g(x) + \sum_{m=0}^{n-1} K(x, \eta_m) f_m, \tag{4.2}$$

где $f_m = \int\limits_{G_m} \tilde{f}(t)dt$. Интегрируя (4.2) по x на G_j, $j = 0, \cdots, (n-1)$ приходим к следующей линейной алгебраической системе относительно (f_j):

$$f_j = g_j + \sum_{m=0}^{n-1} a_{jm} f_m, \tag{4.3}$$

где

$$a_{jm} = \int\limits_{G_j} K(x, \eta_m)dx, \quad g_j = \int\limits_{G_j} g(x)dx, \quad m, j = 0, \cdots, (n-1). \tag{4.4}$$

Известными рассуждениями проверяется эквивалентность уравнений (3.4) и (4.3). Отсюда следует единственность решения уравнения (4.3). Приближенное решение уравнения (1.2) определяется по формуле (4.2).

4.1. **Замечания.** Применения метода усреднения ядра к уравнению (1.2) предполагает выбор набора Γ и вычисление интегралов (4.4) (это небольшая цена, которую мы должны платить за дискретизацию уравнения (1.2)). В этом отношении достаточно благоприятным является ядро вида (1.4) в случае (3.2) (выбор равноотстоящих узлов аналогичен [2]). Как уже было отмечено, уравнение (1.2) с ядром, удовлетворяющим (1.4), (3.2) возникает в теории переноса. Способ дискретизации, рассмотренный в настоящей работе, может быть использован в вопросе построения треугольной факторизации интегральных операторов второго рода в пространстве L_1 (см. [6]).

Abstract. In this paper we obtain a sufficient condition for quite continuity of Fredholm type integral operators in the space $L_1(a, b)$. Uniform approximations by operators with degenerate kernels of horizontally striped structures are constructed. A quantitative error estimate is obtained. We point out the possibility of application of the obtained results to second kind integral equations, including convolution equations

on a finite interval, equations with polar kernels, one-dimensional equations with potential type kernels, and some transport equations in non-homogeneous layers.

Список литературы

[1] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский, Интегральные Операторы в Пространствах Суммируемых Функций, М., Наука (1966).

[2] А. Г. Барсегян, Н. Б. Енгибарян, "Приближенное решение интегральных и дискретных уравнений Винера-Хопфа", Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **55**. no 5, 836 – 845 (2015).

[3] Математическая Энциклопедия, **4**, Изд. "Советская энциклопедия" (1984).

[4] В. С. Владимиров, Уравнения Математической Физики, М., Наука (1981).

[5] С. Г. Крейн, Линейные Уравнения в Банаховом Пространстве, М., Наука (1971).

[6] Н. Б. Енгибарян, "О факторизации интегральных операторов в пространствах суммируемых функций", Известия РАН, Математика, **73**, no. 5, 67 – 82 (2009).

Поступила 12 января 2018