Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 6, 2018, стр. 13 – 32

СХОДИМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ ЖАДНОГО АЛГОРИТМА ПО СИСТЕМАМ ВИЛЕНКИНА

М. Г. ГРИГОРЯН, С. А. САРГСЯН

Ереванский государственный университет
E-mails: *gmarting@ysu.am; stepansargsyan@ysu.am*

Аннотация. В работе доказано, что для любого $\varepsilon \in (0,1)$ существует измеримое множество $E \subset [0,1)$ с мерой $|E| > 1-\varepsilon$, такое что для любой функции $f \in L[0,1)$ можно построить функцию $\widetilde{f} \in L[0,1)$, совпадающую с f на E с $\int_0^1 |\widetilde{f}(x) - f(x)|dx < \varepsilon$, такую, что как ряд Фурье так и жадный алгоритм функции $\widetilde{f}$ по системе Виленкина ограниченного типа сходятся почти всюду на $[0,1)$.

MSC2010 number: 42C10, 42C20.

Ключевые слова: Система Виленкина; сходимость; ряд Фурье; жадный алгоритм.

1. Введение

Настоящая работа продолжает исследования авторов в области сходимости жадного алгоритма и поведении коэффициентов Фурье по классическим системам с точки зрения широко известных классических теорем об "исправлении функций" Н. Н. Лузина [1] и Д. Е. Меньшова [2] (см. также [3] – [6]).

Напомним определение класса мультипликативных систем функций (см. [7] – [8]). Пусть $P = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ произвольная последовательность простых чисел, где $p_k \geq 2$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Положим

$$m_0 = 1 \text{ и } m_k = \prod_{j=1}^{k} p_j, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{1.1}$$

Легко заметить, что для каждой точки $x \in [0,1)$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ существуют числа $x_j, \alpha_j \in \{0, 1, \ldots p_j - 1\}$ такие, что

$$n = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j m_{j-1} \text{ и } x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{m_j}. \tag{1.2}$$

[0]Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 18T-1A148.

Формулы (1.2) называют P–ичными разложениями натурального числа n и $x \in [0, 1)$.

Отметим, что точки вида $\frac{l}{m_k}, l \in \mathbb{N}$, $0 \le l \le m_k - 1$, имеют два различных разложения - конечное и бесконечное. В дальнейшем для таких точек условимся рассматривать только конечные разложения. Для заданной последовательности P мультипликативная система $\mathbb{W} = \{W_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ определяется следующим образом:

$$(1.3) \qquad W_0(x) \equiv 1;\ W_n(x) = \exp\left(2\pi \mathrm{i} \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \frac{x_j}{p_j}\right),\ (\mathrm{i}\text{- мнимая единица}).$$

Выражение (1.3) можно записать в форме

$$W_n(x) = \exp\left(2\pi \mathrm{i} \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \frac{x_j}{p_j}\right) = \prod_{j=1}^{k}\left(\exp\left(2\pi \mathrm{i}\frac{x_j}{p_j}\right)\right)^{\alpha_j}.$$

Ввиду (1.3) имеем $W_{m_{j-1}}(x) = \exp\left(2\pi \mathrm{i}\frac{x_j}{p_j}\right)$, следовательно для n-ой мультипликативной функции получаем выражение

$$W_n(x) = \prod_{j=1}^{k}(W_{m_{j-1}}(x))^{\alpha_j}.$$

В случае когда $P = \{2, 2, \ldots\}$ система $\mathbb{W} = \{W_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ совпадает с системой Уолша-Пэли (см. [9]), а в случае $P = \{a, a, \ldots\}$, где $a > 2$ простое число, система $\mathbb{W}$ совпадает с системой Крестенсона-Леви (см. [10]). Системы вида (1.3) были введены Н. Я. Виленкиным в 1946 году (см. [8]), и поэтому эти системы часто называют системами Виленкина.

В случае $\sup\{p_k\} < \infty$ система $\mathbb{W} = \{W_n(x)\}$ называется мультипликативной системой ограниченного типа. В противном случае - неограниченного типа. Пусть f вещественнозначная функция из $L[0, 1)$. Обозначим коэффициенты Фурье функции f по системе Виленкина через $c_n(f)$, а частичные суммы ряда Фурье по этой системе через $S_n(x, f)$ т.е.

$$(1.4) \qquad c_n(f) = \int_0^1 f(x)\overline{W}_n(x)dx,\ S_n(x, f) = \sum_{k=0}^{n} c_k(f)W_k(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

где $\int_0^1 W_n(t)\overline{W}_k(t)dt = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$ $\overline{W}_k(t)$-комплексное сопряженное $W_k(t)$.

Обозначим через $spec(f)$ спектр функции f (т.е. $spec(f)$– множество номеров ненулевых коэффициентов $\{c_k(f)\}_{k=0}^{\infty}$ (см. (1.4))).

В работах [11] -[14] для мультипликативных систем получены интересные результаты. Большинство результатов по мультипликативным системам получены для систем ограниченного типа. Многие результаты пока не имеют своих аналогов для систем неограниченного типа и изучение вопросов с точки зрения поведения последовательности $P = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет самостоятельный интерес. В частности, неизвестно верна ли Теорема Карлесона для мультипликативных систем неограниченного типа.

Отметим, что в 1957 году К. Ватари [11] доказал, что система Виленкина с $\sup\{p_k\} < \infty$ является базисом в $L^r[0,1)$ при $r > 1$. Затем, в 1976 году, В. Янг [12] для произвольной последовательности $\{p_k\}$ установил базисность системы Виленкина в $L^r[0,1)$, при $r > 1$. В случае $\limsup p_n < \infty$ известно, что $c_n(f) = O(n^{-1})$, если f имеет конечную вариацию и $c_n(f) = O(n^{-\alpha})$ в случае $f \in \mathrm{Lip}\ \alpha$.

В сравнении с этими результатами отметим, что Прайс [13] показал, что если $\limsup p_n = \infty$, то $\limsup n|c_n(\psi)| = \infty$ для $\psi(x) = x - [x]$. Более того, существует $f_0 \in \mathrm{Lip}\ \alpha$ такая, что $\limsup n|c_n(f_0)| = \infty$. Далее, при условии $\limsup p_n = \infty$ найдется $f_0 \in C(0,1)$-ряд Фурье, которой по соответствующей мультипликативной системе не суммируем методом $(C,1)$ в некоторой точке. Для мультипликативной системы с $p_n \uparrow$ и $m_{k-1}^{-1} \log p_k \to \infty$, $(C,1)$ средние функции $x - [x]$ расходятся на счетном множестве. Отметим также [14], что в случае $\limsup p_n < \infty$, $(C,1)$ средние любой непрерывной функции f по мультипликативной системе равномерно сходятся к f.

Напомним определение жадного алгоритма. Пусть $\Psi = \{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ – базис в банаховом пространстве X. Для каждого $f \in X$ будем иметь разложение

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f, \Psi)\psi_k \ .$$

Перестановку неотрицательных целых чисел $\sigma = \{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty}$ назовем убывающей, если $|c_{\sigma(k)}(f)| \geq |c_{\sigma(k+1)}(f)|, \quad k = 1, 2, ...$ Множество таких перестановок обозначим через $D(f, \Psi)$. В случае строгих неравенств $D(f, \Psi)$ содержит только одну убывающую перестановку. Для каждой функции $f \in X$ и для любого элемента $\sigma \in D(f, \Psi)$ определим последовательность нелинейных операторов $\{G_m(f, \Psi, \sigma)\}_{m=1}^{\infty}$, которая известна как жадный алгоритм (см. [15]), следующим образом

$$G_m(f) = G_m(f, \Psi, \sigma) := \sum_{k=1}^{m} c_{\sigma(k)}(f)\psi_{\sigma(k)} \ .$$

Заметим, что оператор $G_m(f)$ зависит от σ. Говорят, что жадный алгоритм функции f по системе Ψ сходится в X, если при некотором $\sigma \in D(f, \Psi)$ имеем

$$\lim_{m\to\infty} \|G_m(f, \Psi, \sigma) - f\|_X = 0 .$$

Метод приближения функции f последовательностью нелинейных операторов $\{G_m(f, \sigma)\}_{m=1}^{\infty}$ называется жадным (гриди) алгоритмом функции f по системе $\Psi = \{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Жадные алгоритмы для банаховых пространств, относительно нормированных базисов изучены в работах [16]-[22].

В настоящей работе мы изучим некоторые вопросы о поведении жадного алгоритма, а также, поведения коэффициентов Фурье по мультипликативной системе после исправления функции, такие вопросы были рассмотрены для классических систем в работах [23]-[26].

Приведем результаты, имеющие непосредственное отношение к данной работе.

Теорема 1.1. [25] *Для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $| E |> 1 - \epsilon$ такое, что для любой функции $f \in L(E)$ можно построить функцию $\widetilde{f} \in L[0, 1)$, которая совпадает с f на E, и как жадный алгоритм так и ряд Фурье функции $\widetilde{f}$ по системе Уолша сходится к ней почти всюду на $[0, 1)$.*

Теорема 1.2. [26] *Для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $| E |> 1 - \epsilon$ такое, что для любой функции $f \in L(E)$ можно построить функцию $\widetilde{f} \in L[0, 1)$, которая совпадает с f на E, ряд Фурье которой по системе Уолша сходится к ней по $L^1[0, 1]$- норме и $|b_n(\widetilde{f})| > |b_{n+1}(\widetilde{f})|$, $n = 0, 1, 2, \ldots$*

Отметим, что нам неизвестен ответ следующего вопроса.

Вопрос 1.1. *Верны ли Теоремы 1.1 и 1.2 для любой мультипликативной системы и для тригонометрической системы ?*

В связи с этим вопросом в настоящей работе для систем Виленкина ограниченного типа доказывается следующая теорема.

Теорема 1.3. *Пусть $\mathbb{W} = \{W_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ — мультипликативная система функций определяемая ограниченной последовательностью $P = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1)$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$,* *такое что для любой функции $f \in L(E)$ можно построить функцию $\widetilde{f} \in L[0,1)$, которая совпадает с f на E, такую, что*

(1) *как жадный алгоритм так и ряд Фурье функции $\widetilde{f}$ по системе $\mathbb{W}$ сходятся к ней почти всюду на $[0,1)$,*

(2) *множество $D(\widetilde{f}, \mathbb{W})$ содержит только один элемент.*

(3) $\int_0^1 |\widetilde{f}(x) - f(x)|dt < \epsilon.$

Отметим, что нам не известно верна ли Теорема 1.3 для любой мультипликативной системы $\mathbb{W} = \{W_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ функций определяемой неограниченной последовательностью $P = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$. Для таких систем нам удалось получить лишь следующий результат (см. [27]): для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $| E |> 1 - \epsilon$ такое, что для любой функции $f \in L(E)$ можно построить функцию $\widetilde{f} \in L[0,1)$, которая совпадает с f на E и все ненулевые коэффициенты Фурье функции $\widetilde{f}$ по системе Виленкина по модулью расположены в убывающем порядке .

2. Вспомогательные утверждения

Пусть $\mathbb{W} = \{W_k\}_{k=1}^{\infty}$ мультипликативная система функций, определяемая последовательностью $P = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$. Мы будем использовать следующее обозначение (см. (1.1)):

$$\Delta_n^{(k)} = \left[\frac{n}{m_k}, \frac{n+1}{m_k}\right), \text{ где } n = 0,1,...,m_k - 1, \quad k = 0,1,2,3,\dots \tag{2.1}$$

Рассмотрим множество пар $\{\gamma, \Delta\}$, где γ пробегает множество всех действительных чисел ($\gamma \neq 0$), а Δ пробегает множество всех интервалов вида $\Delta_n^{(k)}$. Положим

$$\mathcal{B} = \{f(x) : f(x) = \sum_{k=1}^{\nu_0} \gamma_k \chi_{\Delta_k};\ (\gamma_k, \Delta_k) \in \{\gamma, \Delta\},\ \Delta_k \bigcap \Delta_{k'} = \emptyset,\ k \neq k'\}. \tag{2.2}$$

Пусть $x, y \in [0,1)$. Напомним, что операция $x \oplus y$ определяется следующим образом:

$$x \oplus y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k \oplus y_k}{m_k}, \tag{2.3}$$

где $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ коэффициенты P-ичных разложений чисел x и y (см. (1.2)), а

$$x_k \oplus y_k = \begin{cases} x_k + y_k, & \text{если } x_k + y_k < p_k \\ x_k + y_k - p_k, & \text{если } x_k + y_k \geq p_k. \end{cases}$$

Отметим, что операция $\ominus$ определяется как обратная операция для $\oplus$. При $P = \{2, 2, \dots\}$, операции $\oplus$ и $\ominus$ совпадают.

Далее нам понадобятся следующие свойства системы $\mathbb{W}$ (см. также (1.1)):

$$W_n(x) = W_n(\frac{j}{m_k}), \forall x \in \Delta_j^{(k)}, \text{ при } 0 \le n \le m_k - 1 \text{ и } 0 \le j < m_k \, , \tag{2.4}$$

$$\int_{\Delta_j^{(k)}} W_n(x)dx = 0, \text{ при } n \ge m_k \text{ и } 0 \le j < m_k \, , \tag{2.5}$$

$$W_{lm_k+\beta}(x) = W_{lm_k}(x)W_\beta(x), \text{ при } \beta < m_k \ (l, \beta \in \mathbb{N}), \tag{2.6}$$

$$W_n(x)W_n(y) = W_n(x \oplus y), \quad W_n(x)\overline{W}_n(y) = W_n(x \ominus y), \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{2.7}$$

Пусть $D_n(x)$ ядро Дирихле системы $\mathbb{W}$, т.е.

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} W_k(x), \quad x \in [0, 1), \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{2.8}$$

тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ имеет место соотношение (см. [7], (1.5.21))

$$D_{m_k}(x) = \begin{cases} m_k, & \text{если } x \in \left[0, \frac{1}{m_k}\right), \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{2.9}$$

Лемма 2.1. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{W} = \{W_j(x)\}_{j=0}^\infty$ -система Виленкина определяемая последовательностью $P = \{p_1, p_2, \dots\}$, и $\widetilde{\mathbb{W}} = \{\widetilde{W}_j(x)\}_{j=0}^\infty$ -система Виленкина определяемая последовательностью $\widetilde{P} = \{p_{k+1}, p_{k+2}, \dots\}$. Тогда для любых $\alpha \in \mathbb{N}$ и $l \in \{0, 1, \dots, m_k - 1\}$*

$$W_{\alpha m_k}\left(x + \frac{l}{m_k}\right) = \widetilde{W}_\alpha(m_k x), \text{ для всех } x \in \left[0, \frac{1}{m_k}\right).$$

Доказательство. Обозначим

$$\widetilde{p}_{j+1} = p_{k+j+1}, \ \widetilde{m}_j = \frac{m_{k+j}}{m_k}, \ j = 0, 1, \dots \tag{2.10}$$

Пусть $x \in \left[0, \frac{1}{m_k}\right)$ и $\alpha \in \mathbb{N}$, тогда существует $\nu \in \mathbb{N}$, такое, что $\widetilde{m}_{\nu-1} \le \alpha < \widetilde{m}_\nu$. Пусть $\{\widetilde{\alpha}_j\}_{j=1}^\nu$ и $\{\alpha_j\}_{j=1}^{k+\nu}$ коэффициенты разложения числа α соответственно по последовательностям $\widetilde{P}$ и P, а $\{x_j\}_{j=1}^\infty$-коэффициенты разложения x по P. Рассмотрим разложение натурального числа α по $\widetilde{P}$:

$$\alpha = \sum_{j=1}^{\nu} \widetilde{\alpha}_j \widetilde{m}_{j-1}. \tag{2.11}$$

Отсюда и из (2.10) следует, что $\alpha m_k = \sum_{j=1}^{\nu} \widetilde{\alpha}_j m_{k+j-1}$. Учитывая также, что $0 \le \widetilde{\alpha}_j \le \widetilde{p}_j - 1 = p_{j+k} - 1$, $j = 1, \dots, \nu$ отсюда получаем

$$\alpha_{j+k} = \begin{cases} \widetilde{\alpha_j}, & \text{если } 0 \le j \le \nu \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{2.12}$$

Отсюда, для разложения числа αm_k по P имеем $\alpha m_k = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_{j+k} m_{j+k-1}$. С другой стороны, так как $x < \frac{1}{m_k}$, то $x_j = 0$, для $j = 1, \dots, k$ и P–ичное разложение числа x имеет вид

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_{j+k}}{m_{j+k}}. \tag{2.13}$$

Пусть $l \in \{0, 1, \dots, m_k - 1\}$ произвольное число. Очевидно, что начиная с номера $k+1$ коэффициенты P–ичного разложения числа $x + \frac{l}{m_k}$ совпадают с $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$, и следовательно из определения системы Виленкина получаем

$$W_{\alpha m_k}\left(x + \frac{l}{m_k}\right) = \prod_{j=1}^{\nu} \exp\left(2\pi i \frac{x_{j+k}\alpha_{j+k}}{p_{j+k}}\right).$$

И следовательно (см. (2.10)-(2.12) и (2.13))

$$W_{\alpha m_k}\left(x + \frac{l}{m_k}\right) = \prod_{j=1}^{\nu} \exp\left(2\pi i \frac{x_{j+k}\widetilde{\alpha}_j}{\widetilde{p}_j}\right) = \widetilde{W}_\alpha\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_{j+k}}{\widetilde{m}_j}\right) = \widetilde{W}_\alpha(m_k x). \qquad \square$$

Лемма 2.2. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{W} = \{W_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ -система Виленкина определяемая последовательностью $P = \{p_1, p_2, \dots\}$. Для любых $\nu, \alpha_0 \in \mathbb{N}$ справедливы следующие соотношения*

(1) $$\sum_{\alpha=1}^{\frac{m_{k+\nu}}{m_k}-1} W_{\alpha m_k}(x) = \begin{cases} \frac{m_{k+\nu}}{m_k} - 1, & \text{если } x \in \left[\frac{l}{m_k}; \frac{l}{m_k} + \frac{1}{m_{k+\nu}}\right),\ l = 0, 1 \dots, m_k - 1, \\ -1, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

(2) $$\left|\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} W_{\alpha m_k}(x)\right| \le \frac{m_{k+\nu}}{m_k} + 1, \text{ если } x \in \left[\frac{l}{m_k} + \frac{1}{m_{k+\nu}}, \frac{l+1}{m_k}\right),\ l = 0, 1 \dots, m_k - 1.$$

Доказательство. Сперва докажем, что для любой системы Виленкина справедливо следующее утверждение:

$$|D_n(x)| < m_k, \text{ для любой } x \in \left[\frac{1}{m_k}, 1\right), k, n \in \mathbb{N}. \tag{2.14}$$

Действительно, если $n < m_k$ то получим $|D_n(x)| = \left|\sum_{j=0}^{n-1} W_j(x)\right| \le n < m_k$, для любой $x \in [0, 1)$. Теперь предположим, что $n \ge m_k$, тогда существуют $A \in \mathbb{N}$, и $B \in \{0, 1, \dots, m_k - 1\}$, для которых $n = Am_k + B$, следовательно (см. (2.4)-(2.6), (2.8)):

$$D_n(x)=\sum_{j=0}^{n-1}W_j(x)=\sum_{\alpha=0}^{A-1}\sum_{\beta=0}^{m_k-1}W_{\alpha m_k+\beta}(x)+\sum_{\beta=0}^{B-1}W_{Am_k+\beta}=$$

$$=\left(\sum_{\alpha=0}^{A-1}W_{\alpha m_k}(x)\right)D_{m_k}(x)+W_{Am_k}(x)\sum_{\beta=0}^{B-1}W_\beta(x),\ \text{где}\ \sum_{\beta=0}^{B-1}W_\beta(x)=0,\ \text{если}\ B=0.$$

Учитывая (см. (2.9)), что $D_{m_k}(x)=0$, при $x\in[0,1)\setminus\Delta_0^{(k)}$, получим (2.14).

Докажем первое утверждение леммы. Пусть $\widetilde{\mathbb{W}}=\{\widetilde{W}_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ -система Виленкина для последовательности $\widetilde{P}=\{\widetilde{p_1},\widetilde{p_2},\ldots\}$ с $\widetilde{p_j}=p_{j+k}$ и $\widetilde{m}_j=\frac{m_{k+j}}{m_k}$, $j=0,1,\ldots$ Пусть $x\in\left[\frac{l}{m_k},\frac{l+1}{m_k}\right)$, где $l\in\{0,1,\ldots,m_k-1\}$ произвольное число, отсюда и из Леммы 2.1 получим

$$\sum_{\alpha=1}^{\widetilde{m}_\nu-1}W_{\alpha m_k}(x)=\sum_{\alpha=1}^{\widetilde{m}_\nu-1}\widetilde{W}_\alpha\left(m_k\left(x-\frac{l}{m_k}\right)\right)=\widetilde{D}_{\widetilde{m}_\nu}\left(m_k\left(x-\frac{l}{m_k}\right)\right)-1.$$

Учитывая также, что

$$m_k\left(x-\frac{l}{m_k}\right)\in\left[0,\frac{1}{\widetilde{m}_\nu}\right),\ \text{при}\ x\in\left[\frac{l}{m_k},\frac{l}{m_k}+\frac{1}{m_{k+\nu}}\right),$$

$$m_k\left(x-\frac{l}{m_k}\right)\in\left[\frac{1}{\widetilde{m}_\nu},1\right),\ \text{при}\ x\in\left[\frac{l}{m_k}+\frac{1}{m_{k+\nu}};\frac{l+1}{m_k}\right),\tag{2.15}$$

имеем (см. также (2.9))

$$\sum_{\alpha=1}^{\frac{m_{k+\nu}}{m_k}-1}W_{\alpha m_k}(x)=\begin{cases}\frac{m_{k+\nu}}{m_k}-1, & \text{если}\ x\in\left[\frac{l}{m_k};\frac{l}{m_k}+\frac{1}{m_{k+\nu}}\right),\ l=0,1\ldots,m_k-1\\ -1, & \text{в остальных случаях}\ .\end{cases}$$

Теперь докажем второе утверждение леммы. Пусть $x\in\left[\frac{l}{m_k},\frac{l+1}{m_k}\right)$, из Леммы 2.1 следует

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0}W_{\alpha m_k}(x)=\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0}\widetilde{W}_\alpha\left(m_k\left(x-\frac{l}{m_k}\right)\right)=\widetilde{D}_{\alpha_0+1}\left(m_k\left(x-\frac{l}{m_k}\right)\right)-1$$

Учитывая также (2.14) и (2.15), будем иметь

$$\left|\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0}W_{\alpha m_k}(x)\right|\le\frac{m_{k+\nu}}{m_k}+1,\ \text{если}\ x\in\left[\frac{l}{m_k}+\frac{1}{m_{k+\nu}},\frac{l+1}{m_k}\right);\ l=0,1\ldots,m_k-1.$$

Лемма 2.2 доказана. □

Лемма 2.3. *Пусть $\mathbb{W}=\{W_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ -мультипликативная система функций определяемая ограниченной последовательностью $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $b=\sup\{p_j\}$. Тогда для любого интервала $\Delta=\left[\frac{l_0}{m_{k_0}};\frac{l_0+1}{m_{k_0}}\right)$, $k_0\in\mathbb{N}$, $0\le l_0\le m_{k_0}-1$, для любых чисел $\varepsilon,\delta\in(0,1)$, $\gamma\in\mathbb{R}$ и для любого натурального N_0 существуют полиномы $Q(x)$*

и $P(x) = \sum_{j=N_0}^{N} a_j W_j(x)$ *и измеримое множество* $E \subset \Delta$ *с мерой* $|E| > (1-\varepsilon)|\Delta|$ *такие, что*

(1) $|a_j| < \delta$ *и* $|a_j| \searrow$ *для* $j \in spec(P)$,

(2) $Q(x) = \begin{cases} \gamma, & \text{если } x \in E, \\ 0, & \text{если } x \notin \Delta, \end{cases}$ $\int_0^1 |Q(x)|dx \le 2|\gamma||\Delta|$, $\int_0^1 |Q(x) - P(x)|dx \le \delta$,

(3) $\sup\limits_{N_0 < M \le N} \left| \sum_{j=N_0}^{M} a_j W_j(t) \right| \le \begin{cases} \frac{3b|\gamma|}{\varepsilon}, & \text{если } x \in \Delta, \\ 2|\gamma|, & \text{в противном случае,} \end{cases}$

(4) *Пусть* $\eta \in (0,1), \eta > \varepsilon$, *существует множество* $G \subset \Delta$ *с* $|G| > (1-\eta)|\Delta|$ *для которого* $\sup\limits_{N_0 < M \le N} \left| \sum_{j=N_0}^{M} a_j W_j(x) \right| \le \frac{2b|\gamma|}{\eta}$, *если* $x \in G$.

Доказательство. Возьмем натуральное число k такое, что $m_k > \max\left\{\frac{2|\gamma|}{\delta}, N_0, m_{k_0}^2 \frac{b}{\varepsilon}\right\}$. Обозначим

$$q_0 = \frac{m_k}{m_{k_0}},\quad x^{(q)} = \frac{l_0}{m_{k_0}} + \frac{q-1}{m_k},\quad \Delta_q = [x_q, x_{q+1}),\ \text{где } q = 1, \dots, q_0. \tag{2.16}$$

Ясно, что

$$\Delta = \bigcup_{q=1}^{q_0} \Delta_q \text{ и } \Delta_{q'} \cap \Delta_{q''} = \emptyset, \text{ если } q' \ne q''. \tag{2.17}$$

Далее, будем определять по индукции числа $\{k_q\}_{q=1}^{q_0}$, $\{\nu_q\}_{q=1}^{q_0}$, полиномы $\{Q_q(x)\}_{q=1}^{q_0}$ и множества $\{E_q\}_{q=1}^{q_0}$. Возьмем $k_1 = k$. Очевидно, что для любого $j \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{m_{j+\nu-1}}{m_j}, \frac{m_{j+\nu}}{m_j}\right) = [1, \infty). \tag{2.18}$$

Отсюда следует, что существует единственное $\nu_1 \in \mathbb{N}$ такое, что $\frac{m_{k_1+\nu_1-1}}{m_{k_1}} \le \frac{1}{\varepsilon} < \frac{m_{k_1+\nu_1}}{m_{k_1}}$. Пусть j натуральное число и $j \in [m_{k_1}, m_{k_1+\nu_1})$, тогда существуют целые числа $\alpha \in \left[1, \frac{m_{k_1+\nu_1}}{m_{k_1}}\right)$ и $\beta \in [0, m_{k_1})$, такие, что $j = \alpha m_{k_1} + \beta$, положим

$$c_j^{(1)} = -\frac{\gamma}{m_k} \overline{W}_\beta\left(\frac{l_0}{m_{k_0}}\right),$$

$$Q_1(x) = \sum_{j=m_{k_1}}^{m_{k_1+\nu_1-1}} c_j^{(1)} W_j(x) \text{ и } E_1 \doteq \Delta_1 \setminus \left[x^{(1)}, x^{(1)} + \frac{1}{m_{k_1+\nu_1}}\right).$$

Предположим, что уже определены числа $k = k_1 < k_2 < \ldots < k_{q-1}$, полиномы $Q_1(x), Q_2(x), \ldots, Q_{q-1}(x)$ и множества $E_1, E_2, \ldots, E_{q-1}$. Положим $k_q = k_{q-1} + \nu_{q-1}$. Из (2.18) следует, что существует натуральное число ν_q такое, что

$$\frac{m_{k_q+\nu_q-1}}{m_{k_q}} \le \frac{1}{\varepsilon} < \frac{m_{k_q+\nu_q}}{m_{k_q}}. \tag{2.19}$$

Учитывая ограниченность последовательности $P - \{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ и равенство $m_{j+1} - p_{j+1}m_j$, из (2.19) получим

$$\frac{1}{\varepsilon} < \frac{m_{k_q+\nu_q}}{m_{k_q}} = p_{k_q+\nu_q}\frac{m_{k_q+\nu_q-1}}{m_{k_q}} \leq b\frac{m_{k_q+\nu_q-1}}{m_{k_q}} < \frac{b}{\varepsilon}. \tag{2.20}$$

Пусть $j \in [m_{k_q}, m_{k_q+\nu_q})$. Тогда существуют целые числа $\alpha \in \left[1, \frac{m_{k_q+\nu_q}}{m_{k_q}}\right)$ и $\beta \in [0, m_{k_q})$, такие, что $j = \alpha m_{k_q} + \beta$, положим

(2.21)
$$c_j^{(q)} = \begin{cases} -\frac{\gamma}{m_k}\overline{W}_\beta\left(x^{(q)}\right), & \text{если } 0 \leq \beta \leq m_k - 1, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad Q_q(x) = \sum_{j=m_{k_q}}^{m_{k_q+\nu_q}-1} c_j^{(q)} W_j(x),$$

$$E_q := \Delta_q \setminus \left(\bigcup_{j=0}^{\frac{m_{k_q}}{m_k}-1} \left[x^{(q)} + \frac{j}{m_{k_q}}, x^{(q)} + \frac{j}{m_{k_q}} + \frac{1}{m_{k_q+\nu_q}}\right)\right). \tag{2.22}$$

Отсюда и из (2.16), (2.22) следует, что

$$|E_q| = |\Delta_q| - \sum_{j=0}^{\frac{m_{k_q}}{m_k}-1} \left|\left[x^{(q)} + \frac{j}{m_{k_q}}, x^{(q)} + \frac{j}{m_{k_q}} + \frac{1}{m_{k_q+\nu_q}}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{m_k}\left(1 - \frac{m_{k_q}}{m_{k_q+\nu_q}}\right) > |\Delta_q|(1-\varepsilon). \tag{2.23}$$

Далее положим

(2.24)
$$c_j = c_j^{(q)}, a_j = sign(c_j)\left(|c_j| + \frac{\min(\delta, |\gamma||\Delta|)}{2^{j+1}}\right), \text{ где } j = m_{k_1}, \ldots, m_{k_{q_0}+\nu_{q_0}} - 1,$$

$$Q(x) = \sum_{q=1}^{q_0} Q_q(x) \equiv \sum_{j=N_0}^{N} c_j W_j(x), \text{ где } N_0 = m_k, N = m_{k_{q_0}+\nu_{q_0}} - 1, \tag{2.25}$$

$$E = \bigcup_{q=1}^{q_0} E_q, \quad P(x) = \sum_{j=N_0}^{N} a_j W_j(x). \tag{2.26}$$

Покажем, что $Q(x)$, $P(x)$ и E удовлетворяют требованиям леммы.

Учитывая, что $|\Delta| = \sum_{q=1}^{q_0} |\Delta_q|$ (см. (2.17)) из (2.22) – (2.24) и (2.26) получим

$$|E| = \sum_{q=1}^{q_0} |E_q| > \sum_{q=1}^{q_0} |\Delta_q|(1-\varepsilon) = |\Delta|(1-\varepsilon), \int_0^1 |Q(x) - P(x)|dx \leq \delta.$$

Из (2.6), (2.7) и (2.21) для любого натурального $q \in [1, q_0]$ получим

$$Q_q(x) = \sum_{j=m_{k_q}}^{m_{k_q+\nu_q}-1} c_j W_j(x) = \sum_{\alpha=1}^{H} \sum_{\beta=0}^{m_{k_q}-1} c_{\alpha m_{k_q}+\beta} W_{\alpha m_{k_q}+\beta}(x) =$$

$$= -\frac{\gamma}{m_k} \sum_{\alpha=1}^{H} W_{\alpha m_{k_q}}(x) \sum_{\beta=0}^{m_k-1} \overline{W}_\beta(x^{(q)}) W_\beta(x) =$$

$$= -\frac{\gamma}{m_k} \left(\sum_{\alpha=1}^{H} W_{\alpha m_{k_q}}(x) \right) \left(\sum_{\beta=0}^{m_k-1} W_\beta(x \ominus x^{(q)}) \right) =$$

$$= -\frac{\gamma}{m_k} D_{m_k}(x \ominus x^{(q)}) \left(\sum_{\alpha=1}^{H} W_{\alpha m_{k_q}}(x) \right),$$

где $H = \frac{m_{k_q+\nu_q}}{m_{k_q}} - 1$. Отсюда и из Леммы 2.2 будем иметь

$$Q_q(x) = \begin{cases} \gamma, & \text{если } x \in E_q, \\ \gamma\left(1 - \frac{m_{k_q+\nu_q}}{m_{k_q}}\right), & \text{если } x \in \Delta_q \setminus E_q, \\ 0, & \text{если } x \notin \Delta_q. \end{cases} \tag{2.27}$$

Поэтому учитывая также (2.16), (2.22), (2.25), (2.26) получим

$$Q(x) = \begin{cases} \gamma, & \text{если } x \in E, \\ 0, & \text{если } x \notin \Delta. \end{cases}$$

Пусть натуральное число $M \in [N_0, N]$ (см. (2.25)), тогда существует $q \in [1, q_0]$, такое, что $m_{k_q} \leq M < m_{k_{q+1}}$ ($k_{q_0+1} = k_{q_0} + \nu_{q_0}$). Следовательно, существуют целые числа $\alpha_0 \in \left[1, \frac{m_{k_{q+1}}}{m_{k_q}}\right)$ и $\beta_0 \in [0, m_{k_q})$, такие, что

$$M = \alpha_0 m_{k_q} + \beta_0. \tag{2.28}$$

Очевидно, что

$$\sum_{j=m_k}^{M} c_j W_j(x) = \sum_{j=1}^{q-1} Q_j(x) + \sum_{j=m_{k_q}}^{M} c_j W_j(x).$$

Следовательно

$$\int_0^1 \left| \sum_{j=m_k}^{M} c_j W_j(t) \right| dt \leq \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{q-1} Q_j(t) \right| dt + \int_0^1 \left| \sum_{j=m_{k_q}}^{M} c_j W_j(t) \right| dt. \tag{2.29}$$

Из (2.22) и (2.27) легко вывести, что $|Q_j(x)| \leq 2|\gamma||\Delta_j|$, где $j = 1, \dots q_0$. Отсюда

$$\int_0^1 |Q(t)|\, dt \leq \sum_{j=1}^{q_0} \int_0^1 |Q_j(t)|\, dt \leq \sum_{j=1}^{q_0} 2|\gamma||\Delta_j| = 2|\gamma||\Delta|. \tag{2.30}$$

Следовательно, доказали утверждение 2. Для доказательства утверждения 3) рассмотрим полином

$$\sum_{j=N_0}^{M} c_j W_j(x) = Q_M^{(1)}(x) + Q_M^{(2)}(x) + Q_M^{(3)}(x), \text{ где} \tag{2.31}$$

$$Q_M^{(1)}(x) = \sum_{j=1}^{q-1} Q_j(x),\ Q_M^{(2)}(x) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha_0-1} \sum_{\beta=0}^{m_{k_q}-1} c_{\alpha m_{k_q}+\beta} W_{\alpha m_{k_q}+\beta}(x), \tag{2.32}$$

$$Q_M^{(3)}(x) = \sum_{\beta=0}^{\beta_0} c_{\alpha_0 m_{k_q}+\beta} W_{\alpha_0 m_{k_q}+\beta}(x). \tag{2.33}$$

Не ограничивая общности, мы можем считать, что $\beta_0 < m_k$. Действительно, в случае $\beta_0 \geq m_k$, как уже известно, $c_{\alpha_0 m_{k_q}+\beta} = 0$, для $m_k \leq \beta \leq \beta_0$, следовательно

$$\sum_{\beta=0}^{\beta_0} c_{\alpha_0 m_{k_q}+\beta} W_{\alpha_0 m_{k_q}+\beta}(x) \equiv \sum_{\beta=0}^{m_k-1} c_{\alpha_0 m_{k_q}+\beta} W_{\alpha_0 m_{k_q}+\beta}(x).$$

Принимая во внимание (см. (2.7)), что

$$W_{\alpha m_{k_q}+\beta}(x) = W_{\alpha m_{k_q}}(x) W_\beta(x) \text{ и } \overline{W}_\beta(x^{(q)}) W_\beta(x) = W_\beta(x \ominus x^{(q)}),$$

из (2.21) и (2.24) получаем

$$Q_M^{(2)}(x) = -\frac{|\gamma|}{m_k} D_{m_k}\left(x \ominus x^{(q)}\right) \sum_{\alpha=1}^{\alpha_0-1} W_{\alpha m_{k_q}}(x), \tag{2.34}$$

$$Q_M^{(3)}(x) = -\frac{|\gamma|}{m_k} W_{\alpha_0 m_{k_q}}(x) D_{\beta_0+1}(x \ominus x^{(q)}). \tag{2.35}$$

Из (2.20), (2.27) и (2.32) имеем

$$\begin{aligned} &|Q_M^{(1)}| \leq \frac{b|\gamma|}{\varepsilon}, \quad \text{если } x \in \Delta_j,\ j = 1, \dots, q-1, \\ &|Q_M^{(1)}| = 0, \quad \text{в противном случае.} \end{aligned} \tag{2.36}$$

Учитывая, что из условия $x \ominus x^{(q)} \in \left[0, \frac{1}{m_k}\right)$ следует, что $x \in \Delta_q$ и наоборот, то из (2.9) и (2.34) следует, что

$$\left|Q_M^{(2)}(x)\right| = \left|\gamma \sum_{\alpha=1}^{\alpha_0-1} W_{\alpha m_{k_q}}(x)\right| \chi_{\Delta_q}, \tag{2.37}$$

где χ_{Δ_q}—характеристическая функция множества Δ_q. Следовательно используя $k_q = k_{q-1} + \nu_{q-1}$, получаем (2.28))

$$|Q_M^{(2)}(x)| \le \frac{b|\gamma|}{\varepsilon}, \quad \text{если } x \in \Delta_q,$$

$$|Q_M^{(2)}(x)| = 0, \quad \text{в противном случае.} \tag{2.38}$$

Далее, из (2.35) следует, что

$$\left|Q_M^{(3)}(x)\right| \le |\gamma|. \tag{2.39}$$

Окончательно, из (2.31), (2.36), (2.38) и (2.39) следует справедливость утверждения 4).

Пусть $\eta \in (0,1), \eta > \varepsilon$, очевидно, что для любого $q \in \{1,\ldots,q_0\}$ существует число $\mu_q \in \mathbb{N}$, для которого справедливо следующее соотношение

$$\frac{m_{k_q+\mu_q-1}}{m_{k_q}} \le \frac{1}{\eta} < \frac{m_{k_q+\mu_q}}{m_{k_q}}. \tag{2.40}$$

Обозначим

$$G_q = \bigcup_{j=0}^{\frac{m_{k_q}}{m_k}-1} \left[x^{(q)} + \frac{j}{m_{k_q}} + \frac{1}{m_{k_q+\mu_q}}, x^{(q)} + \frac{j+1}{m_{k_q}}\right), \quad q = 1,2,\ldots,q_0, \tag{2.41}$$

$$G = \bigcup_{q=1}^{q_0} G_q. \tag{2.42}$$

Для меры множеств G_q (см. (2.41)) имеем

$$|G_q| = \frac{m_{k_q}}{m_k}\left(\frac{1}{m_{k_q}} - \frac{1}{m_{k_q+\mu_q}}\right) = \frac{1}{m_k}\left(1 - \frac{m_{k_q}}{m_{k_q+\mu_q}}\right) > |\Delta_q|(1-\eta).$$

Отсюда, и из (2.42) получим $|G| > |\Delta|(1-\eta)$.

Теперь докажем утверждение 4). Пусть $x \in G$, из (2.41) и (2.42) следует существование чисел $\widetilde{q} \in \{1,2,3,\ldots,q_0\}$ и $\widetilde{j} \in \left\{0,1,\ldots,\frac{m_{k_{\widetilde{q}}}}{m_k}-1\right\}$, для которых

$$x \in \left[x^{(\widetilde{q})} + \frac{\widetilde{j}}{m_{k_{\widetilde{q}}}} + \frac{1}{m_{k_{\widetilde{q}}+\mu_{\widetilde{q}}}}, x^{(\widetilde{q})} + \frac{\widetilde{j}+1}{m_{k_{\widetilde{q}}}}\right).$$

Ясно, что

$$x \in \left[\frac{l}{m_{k_{\widetilde{q}}}} + \frac{1}{m_{k_{\widetilde{q}}+\mu_{\widetilde{q}}}}, \frac{l+1}{m_{k_{\widetilde{q}}}}\right), \text{ где } l = l_0\frac{m_{k_{\widetilde{q}}}}{m_{k_0}} + (\widetilde{q}-1)\frac{m_{k_{\widetilde{q}}}}{m_k} + \widetilde{j}. \tag{2.43}$$

Рассмотрим натуральное число $M \in [N_0, N]$. Учитывая формулу (2.28), (2.32)-(2.33) получим

1) Если $M < m_{k_{\widetilde{q}}}$ то $Q_M^{(1)}(x) = Q_M^{(2)}(x) = 0$, $\left|\sum\limits_{j=m_k}^{M} c_j W_j(x)\right| = |Q_M^{(3)}(x)| \le |\gamma|$.

2) Если $M \geq m_{k_{\bar{q}+1}}$, то $Q_M^{(1)}(x) = |\gamma|$, $Q_M^{(2)}(x) = 0$ и тогда $\left|\sum_{j=m_k}^{M} c_j W_j(x)\right| \leq |Q_M^{(1)}(x)| + |Q_M^{(3)}(x)| \leq 2|\gamma|$.

3) Если же $m_{k_{\bar{q}}} \leq M < m_{k_{\bar{q}+1}}$ то тогда $Q_M^{(1)}(x) = 0$, и из утверждения 2, Леммы 2.2, получим $|Q_M^{(2)}(x)| \leq b|\gamma|\frac{m_{k_{\bar{q}}+\mu_{\bar{q}}}}{m_{k_{\bar{q}}}}$, с другой стороны ясно, что $|Q_M^{(3)}(x)| \leq |\gamma|$ и, следовательно, $\left|\sum_{j=m_k}^{M} c_j W_j(x)\right| \leq \frac{2b|\gamma|}{\eta} + |\gamma|$, для всех $M \in [N_0, N]$. Отсюда и из (2.24) получаем справедливость утверждения 4). □

3. Доказательство Теоремы 1.3

Пусть $\epsilon > 0$. Выберем последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ (см. 2.2) которая плотна в $L[0,1)$. Определим числа η_n следующим образом :

$$\eta_n = \min_{1 \leq n}\left\{\frac{1}{2}, \left(\int_0^1 |f_n(x)|dx\right)^{1/2}\right\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.1}$$

Нетрудно видеть, что по индукции и лемме 2.3, можем найти последовательности множеств $\{G_n\}$, $\{E_n\}$, полиномы $\{g_n(x)\}$ и

$$Q_n(x) = \sum_{k=\mu_{n-1}}^{\mu_n - 1} a_{s_k}^{(n)} W_{s_k}(x), \quad \mu_0 = 1, \ |a_{s_k}^{(n)}| > 0, \tag{3.2}$$

которые удовлетворяют условиям:

$$g_n(x) = f_n(x), \quad x \in E_n, \quad |E_n| > 1 - \epsilon \cdot 4^{-8(n+2)}, \quad |G_n| > 1 - \eta_n. \tag{3.3}$$

$$\int_0^1 |g_n(x) - Q_n(x)|dx < \epsilon 4^{-8(n+2)}, \tag{3.4}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 |f_n(x)|dx < \int_0^1 |g_n(x)|dx < 3\int_0^1 |f_n(x)|dx, \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{n} > |a_{s_k}^{(n)}| > |a_{s_{k+1}}^{(n)}| > |a_{\mu_n}^{(n)}| > 0, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall k \in [\mu_{n-1}, \mu_n - 1), \tag{3.6}$$

$$\max_{\mu_{n-1} \leq N < \mu_n}\left|\sum_{k=\mu_{n-1}}^{N} a_{s_k}^{(n)} W_{s_k}(x)\right| \leq \frac{5b\,|f_n(x)|}{\eta_n} + \frac{3b^2 \int_0^1 |f_n(x)|dx}{\eta_n}, \text{ при } x \in G_n. \tag{3.7}$$

Положим

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n, \quad a_{s_k} = a_{s_k}^{(n)}, \quad \text{для любого} \quad k \in [\mu_{n-1}, \mu_n), \tag{3.8}$$

Очевидно, что (см. (3.3)) $|E| > 1 - \epsilon$.

2) Если $M \geq m_{k_{\bar{q}+1}}$, то $Q_M^{(1)}(x) = |\gamma|$, $Q_M^{(2)}(x) = 0$ и тогда $\left|\sum_{j=m_k}^{M} c_j W_j(x)\right| \leq |Q_M^{(1)}(x)| + |Q_M^{(3)}(x)| \leq 2|\gamma|$.

3) Если же $m_{k_{\bar{q}}} \leq M < m_{k_{\bar{q}+1}}$ то тогда $Q_M^{(1)}(x) = 0$, и из утверждения 2, Леммы 2.2, получим $|Q_M^{(2)}(x)| \leq b|\gamma|\frac{m_{k_{\bar{q}}+\mu_{\bar{q}}}}{m_{k_{\bar{q}}}}$, с другой стороны ясно, что $|Q_M^{(3)}(x)| \leq |\gamma|$ и, следовательно, $\left|\sum_{j=m_k}^{M} c_j W_j(x)\right| \leq \frac{2b|\gamma|}{\eta} + |\gamma|$, для всех $M \in [N_0, N]$. Отсюда и из (2.24) получаем справедливость утверждения 4). □

3. Доказательство Теоремы 1.3

Пусть $\epsilon > 0$. Выберем последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ (см. 2.2) которая плотна в $L[0,1)$. Определим числа η_n следующим образом :

$$(3.1) \qquad \eta_n = \min_{1 \leq n}\left\{\frac{1}{2}, \left(\int_0^1 |f_n(x)| dx\right)^{1/2}\right\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Нетрудно видеть, что по индукции и лемме 2.3, можем найти последовательности множеств $\{G_n\}$, $\{E_n\}$, полиномы $\{g_n(x)\}$ и

$$(3.2) \qquad Q_n(x) = \sum_{k=\mu_{n-1}}^{\mu_n - 1} a_{s_k}^{(n)} W_{s_k}(x), \quad \mu_0 = 1, \ |a_{s_k}^{(n)}| > 0,$$

которые удовлетворяют условиям:

$$(3.3) \qquad g_n(x) = f_n(x), \quad x \in E_n, \quad |E_n| > 1 - \epsilon \cdot 4^{-8(n+2)}, \quad |G_n| > 1 - \eta_n.$$

$$(3.4) \qquad \int_0^1 |g_n(x) - Q_n(x)| dx < \epsilon 4^{-8(n+2)},$$

$$(3.5) \qquad \frac{1}{2}\int_0^1 |f_n(x)| dx < \int_0^1 |g_n(x)| dx < 3\int_0^1 |f_n(x)| dx,$$

$$(3.6) \qquad \frac{1}{n} > |a_{s_k}^{(n)}| > |a_{s_{k+1}}^{(n)}| > |a_{\mu_n}^{(n)}| > 0, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall k \in [\mu_{n-1}, \mu_n - 1),$$

$$(3.7) \qquad \max_{\mu_{n-1} \leq N < \mu_n}\left|\sum_{k=\mu_{n-1}}^{N} a_{s_k}^{(n)} W_{s_k}(x)\right| \leq \frac{5b\,|f_n(x)|}{\eta_n} + \frac{3b^2\int_0^1 |f_n(x)| dx}{\eta_n}, \text{ при } x \in G_n.$$

Положим

$$(3.8) \qquad E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n, \quad a_{s_k} = a_{s_k}^{(n)}, \quad \text{для любого} \quad k \in [\mu_{n-1}, \mu_n),$$

Очевидно, что (см. (3.3)) $|E| > 1 - \epsilon$.

Пусть $f(x) \in L^1(0,1)$. Нетрудно видеть, что можно выбрать последовательность k_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ такую, что

(3.9)
$$\lim_{N\to\infty} \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^N f_{k_n}(x) - f(x) \right| dx = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N f_{k_n}(x) = f(x) \text{ п. в. на } [0,1) \text{ и}$$

(3.10)
$$\bar{\epsilon} 4^{-4(n+3)} \le \int_0^1 |f_{k_n}(x)|\, dx \le \bar{\epsilon} 4^{-4(n+2)}, \quad n \ge 2, \text{ где } \bar{\epsilon} = \min\left\{ \frac{\epsilon}{2}, \int_0^1 |f(x)| dx \right\},$$

$$\int_0^1 |f(x) - f_{k_1}(x)| dx < \frac{\bar{\epsilon}}{2}, \; f_{k_1}(x) = \sum_{k=0}^{\mu_{k_1}-1} b_k W_k(x). \tag{3.11}$$

Положим

$$\widetilde{G}_1 = G_{k_1}, \; \widetilde{g}_1 = f_{k_1}, \; \widetilde{Q}_1 = f_{k_1}. \tag{3.12}$$

Предположим, что уже определены числа $k_1 = \nu_1 < \ldots < \nu_{q-1}, \beta_{l(1)}, \ldots, \beta_{l(q-1)}, 1 \le n \le q-1$, функции $f_{\nu_n}(x)$, $\widetilde{g}_n(x)$, $1 \le n \le q-1$, множества $\widetilde{G}_2, \ldots, \widetilde{G}_{q-1}$ и полиномы

$$\widetilde{Q}_n(x) = Q_{\nu_n}(x) = \sum_{j=r_n}^{\overline{r}_n} a_{s_j} W_{s_j}(x), \text{ где } r_n = \mu_{\nu_n - 1}, \; \overline{r}_n = \mu_{\nu_n} - 1,$$

которые для всех $n \le q-1$ удовлетворяют условиям

$$\widetilde{g}_n(x) = f_{k_n}(x), \quad x \in E \subset E_{k_n},$$

$$\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^n [(\widetilde{Q}_j(x) + \beta_{l(j)} W_{l(j)}(x)) - \widetilde{g}_j(x)] \right| dx < 2^{-4(n+1)}, \quad 1 \le n \le q-1, \tag{3.13}$$

$$l(n) = \min\left\{ k \in N : \; k \notin [1, \mu_{\nu_1}) \cup \left(\bigcup_{j=2}^{n-1} [r_j, \overline{r}_j] \right) \cup \{l(s)\}_{s=1}^{n-1} \right\},$$

$$\beta_{l(n)} = \min\left\{ 2^{-8(n+1)}, \frac{1}{2} |a_{s_{\overline{r}_n}}^{(\nu_n)}| \right\}, \tag{3.14}$$

$$|\widetilde{G}_n| > 1 - 2^{-n}, \tag{3.15}$$

$$\max_{r_n \le M < \overline{r}_n} \left| \sum_{j=r_n}^M a_{s_j} W_{s_j}(x) \right| \le \frac{|f_{\nu_n}(x)|}{\sqrt{\int_0^1 |f_{\nu_n}(x)| dx}} + \sqrt{\int_0^1 |f_{\nu_n}(x)| dx} < 2^{-n} \text{ для всех } x \in \widetilde{G}_n.$$

Нетрудно видеть, что можно выбрать натуральное число $\nu_q > \nu_{q-1}$ такое, что функция $f_{\nu_q}(x)$ из последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяла бы следующему условию

$$(3.16) \quad \int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} \left[(\widetilde{Q}_i(x) + \beta_{l(i)} W_{l(i)}(x)) - \widetilde{g}_i(x) \right] \right) \right| dx < 2^{-8q-1}.$$

В силу (3.10) и (3.13) имеем

$$\int_0^1 \left| f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} \left[(\widetilde{Q}_i(x) + \beta_{l(i)} W_{l(i)}(x)) - \widetilde{g}_i(x) \right] \right| dx < 2^{-4q}.$$

Отсюда и из (3.16) имеем

$$(3.17) \qquad 2^{-4q-1} < \int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) \right| dx < 2^{-4q}.$$

Положим

$$(3.18) \qquad \widetilde{g}_q(x) = f_{k_q}(x) + [g_{\nu_q}(x) - f_{\nu_q}(x)],$$

$$(3.19) \qquad \widetilde{Q}_q(x) = Q_{\nu_q}(x) = \sum_{j=r_q}^{\overline{r}_q} a_{s_j}^{(\nu_q)} W_{s_j}(x), \text{ где } r_q = \mu_{\nu_q-1},\ \overline{r}_q = \mu_{\nu_q} - 1,$$

$$(3.20) \qquad \widetilde{G}_q = G_{\nu_q},$$

$$(3.21) \qquad l(q) = \left\{ k \in N, k \notin \bigcup_{j=1}^{q-1} [r_j, \overline{r}_j) \cup \bigcup_{j=1}^{q-1} l(j) \right\},$$

$$(3.22) \qquad \beta_{l(q)} = \min \left\{ 2^{-8q-8}, \frac{1}{2} |a_{s_{\overline{r}_q}}^{(\nu_q)}| \right\}.$$

Учитывая соотношения (3.3), (3.8) и (3.18) получаем

$$(3.23) \qquad \widetilde{g}_q(x) = f_{k_q}(x), \quad x \in E.$$

В силу (3.4), (3.13), (3.16), (3.18), (3.19) и (3.22) имеем

$$\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{q} \left[(\widetilde{Q}_i(x) + \beta_{l(i)} W_{l(i)}(x)) - \widetilde{g}_i(x) \right] \right| dx =$$

$$= \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{q-1} \left[(\widetilde{Q}_i(x) + \beta_{l(i)} W_{l(i)}(x)) - \widetilde{g}_i(x) \right] + \widetilde{Q}_q(x) + \beta_{l(q)} W_{l(q)}(x) - \widetilde{g}_q(x) \right| dx \le$$

$$\le \int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} \left[(\widetilde{Q}_i(x) + \beta_{l(i)} W_{l(i)}(x)) - \widetilde{g}_i(x) \right] \right) \right| dx +$$

$$(3.24) \qquad + \beta_{l(q)} + \int_0^1 \left| g_{\nu_q}(x) - \widetilde{Q}_q(x) \right| dx < 2^{-4q-4}.$$

Из (3.5), (3.13)-(3.17) и (3.24) вытекает, что

$$\int_0^1 |\widetilde{g}_q(x)|\,dx \le \int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} \left[(\widetilde{Q}_i(x) + \beta_{l(i)} W_{l(i)}(x)) - \widetilde{g}_i(x) \right] \right) \right| dx +$$

$$+ \int_0^1 |g_{\nu_q}(x)|\,dx + \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{q-1} \left[(\widetilde{Q}_i(x) + \beta_{l(i)} W_{l(i)}(x)) - \widetilde{g}_i(x) \right] \right| dx <$$

$$< 3 \int_0^1 |f_{\nu_q}(x)|\,dx + 2^{-2q} < 2^{-q+3}. \tag{3.25}$$

Из (3.1), (3.7), (3.19) для всех $x \in \widetilde{G}_q$ получим

$$\max_{r_q \le M < \overline{r}_q} \left| \sum_{j=r_q}^{M} a_{s_j} W_{s_j}(x) \right| \le \frac{|f_{\nu_q}(x)|}{\sqrt{\int_0^1 |f_{\nu_q}(x)| dx}} + \sqrt{\int_0^1 |f_{\nu_q}(x)| dx} < 2^{-q}, \tag{3.26}$$

$$|\widetilde{G}_q| > 1 - 2^{-q}, \tag{3.27}$$

Ясно, что по индукции определяются последовательности функций $\{g_q(x)\}_{q=1}$, множеств $\{G_q\}_{q=1}$, числа $\{l(q)\}_{q=1}^{\infty}$, $\{\beta_{l(q)}\}_{q=1}^{\infty}$ и полиномов $\{Q_q(x)\}_{q=1}$, удовлетворяющих условиям (3.31)-(3.40) для всех $q \ge 1$.

Обозначив

$$B_q = \left\{ x \in [0,1], |f_{\nu_q}(x)| \le 2^{-3(q+2)} \right\}, \ q \ge 2, \tag{3.28}$$

будем иметь

$$|[0,1) \setminus B_q| 2^{-3(q+2)} \le \int_{[0,1)\setminus B_q} |f_{\nu_q}(x)|\,dx \le \overline{\epsilon} \cdot 2^{-4(q+2)}, \quad q \ge 2\,.$$

Следовательно

$$|B_q| > 1 - \epsilon \cdot 2^{-(q+2)}. \tag{3.29}$$

Далее положим

$$A_q = \{ x \in [0,1) : |\widetilde{g}_q(x)| < 2^{-q} \}, \tag{3.30}$$

$$F_q = \left\{ x \in [0,1) : \left| \sum_{j=1}^{q-1} \left[(\widetilde{Q}_j(x) + \beta_{l(j)} W_{l(j)}(x)) - \widetilde{g}_j(x) \right] \right| < 2^{-q} \right\}. \tag{3.31}$$

Аналогично (3.29) из (3.24), (3.25), (3.30), (3.31) получим

$$|A_q| > 1 - 2^{-q}, \ |F_q| > 1 - 2^{-q}. \tag{3.32}$$

Положим

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} (B_j \cap \widetilde{G}_j \cap A_j \cap F_j). \tag{3.33}$$

Отсюда и из (3.27), (3.29) и (3.32) вытекает $|B| = 1$.

Учитывая выбор чисел $\{s_j\}_{j=1}^{\infty} \nearrow$, $\{[r_q, \overline{r}_q)\}_{q=1}^{\infty}$, $\{l(q)\}_{q=1}^{\infty}$ получим, что последовательность чисел

$$\{0, 1, ..., \mu_{\nu_1} - 1, l(1), s_{r_2}, ..., l(n-1); s_{r_n} ... s_{\overline{r}_n}; l(n); s_{r_{n+1}}, ... \},$$

есть некоторая перестановка натуральных чисел. Запишем последовательность в виде

$$\sigma = \{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty} = \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(k), \dots\}. \tag{3.34}$$

Определим ряд $\sum_{k=0}^{\infty} d_{\sigma(k)} W_{\sigma(k)}(x)$ следующим образом

(3.35)
$$\sum_{k=0}^{\infty} d_{\sigma(k)} W_{\sigma(k)}(x) = \sum_{k=0}^{\mu_{\nu_1}-1} b_k W_k(x) + \beta_{l(1)} W_{l(1)}(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\sum_{k=r_n}^{\overline{r}_n} a_{s_k} W_{s_k}(x) + \beta_{l(n)} W_{l(n)}(x) \right],$$

где

(3.36)
$$\{d_{\sigma(k)}\}_{k=0}^{\infty} = \{b_0, b_1, ..., b_{\mu_{\nu_1}-1}, \beta_{l(1)}, a_{s_{r_2}}^{(\nu_2)} ..., \beta_{l(n-1)}; a_{s_{r_n}}^{(\nu_n)} ... a_{s_{\overline{r}_n}}^{(\nu_n)}; \beta_{l(n)}; a_{s_{r_{n+1}}}^{(\nu_{n+1})} ... \}.$$

Из (3.25) вытекает, что

$$\int_0^1 \left| \sum_{q=1}^{\infty} \widetilde{g}_q(x) \right| dx \le \sum_{q=1}^{\infty} \int_0^1 |\widetilde{g}_q(x)|\, dx < \infty. \tag{3.37}$$

Положим $\widetilde{f}(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \widetilde{g}_q(x)$. Из (3.6), (3.8)- (3.9), (3.12), (3.22), (3.23), (3.36) и (3.37) следует $\widetilde{f}(x) \in L^1[0,1]$, $\widetilde{f}(x) = f(x)$, $x \in E$; $\int_0^1 |\widetilde{f}(x) - f(x)| dx < \epsilon$; $|d_{\sigma(k)}| > |d_{\sigma(k+1)}|$, $\forall k \ge 2$, т.е. множество $D(\widetilde{f}, \mathbb{W})$ содержит только один элемент.

Учитывая выбор чисел $\{l(k)\}_{k=1}^{\infty}$ получим, что она является перестановкой натуральных чисел $\{k \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [\overline{r}_n + 1, r_{n+1}]\}$. Следовательно для каждого натурального q существуют натуральные числа n_q и J_q такие, что

$$\{\beta_{l(k)}\}_{k=1}^{q} \subset \{d_k, k \in \mathbb{N} \cap \cup_{n=1}^{n_q} [\overline{r}_n + 1, r_{n+1}]\} =$$
$$= \{\beta_k, k \in \mathbb{N} \cap \cup_{n=1}^{n_q} [\overline{r}_n + 1, r_{n+1}]\} \subset \{\beta_{l(k)}\}_{k=1}^{J_q}.$$

отсюда и из соотношений (3.24), (3.25) для каждого $q \ge 2$ будем иметь

$$\left(\int_0^1 \left| \sum_{\gamma=2}^{q} \left[\left(\widetilde{Q}_j(x) + \beta_{l(j)} W_{l(j)}(x) \right) \right] - \widetilde{f}(x) \right| dx \right) \le$$

$$\le \int_0^1 \left| \sum_{\gamma=2}^{q} \left[\left(\widetilde{Q}_j(x) + \beta_{l(j)} W_{l(j)}(x) \right) - \widetilde{g}_j(x) \right] \right| dx + \sum_{s=q+1}^{\infty} \int_0^1 |\widetilde{g}_s(x)| dx < 2^{-q}, \forall q \ge 2$$

Следовательно, $d_k = \int_0^1 \widetilde{f}(x) W_k(x) dx = c_k(\widetilde{f})$ для любого $k \ge 0$.

Теперь покажем, что на множестве B (т.е. почти всюду на $[0,1)$) жадный алгоритм функции $\widetilde{f}(x)$ сходится к ней. Пусть $x \in B$, тогда существует натуральное число j_0 такое, что $x \in B_j \cap \widetilde{G}_j \cap A_j \cap F_j \; \forall j \geq j_0$.

Пусть далее $m > r_{j_0}$, тогда существует натуральное число q, $q \geq j_0$ такое, что

$$N_q \leq m < N_{q+1}, \text{ где } N_q = r_1 + 1 + \sum_{k=2}^{q} [\overline{r}_k - r_k + 2] \quad \forall q \geq 2. \tag{3.38}$$

В силу (3.33)- (3.38) имеем

$$|G_m(x, \widetilde{f}) - \widetilde{f}(x)| = \left| \sum_{k=0}^{m} d_{\sigma(k)} W_{\sigma(k)}(x) - \widetilde{f}(x) \right| \leq$$

$$\leq \left| \sum_{j=1}^{q-1} \left[\left(\widetilde{Q}_j(x) + b_{l(j)} W_{l(j)}(x) \right) - g_j(x) \right] \right| +$$

$$+ \sum_{s=q}^{\infty} |g_s(x)| + \max_{r_q \leq n \leq \overline{r}_q} \left| \sum_{k=r_q}^{n} a_{s_k} W_{s_k}(x) \right| + b_{l(q)} < 2^{-q}.$$

Аналогичным образом убеждаемся в справедливости соотношения

$$|S_N(x, \widetilde{f}) - \widetilde{f}(x)| \to 0, N \to \infty, \forall\, x \in B.$$

Теорема 1.3 доказана.

Abstract. In this paper, we prove that for any $\varepsilon \in (0,1)$ there exists a measurable set $E \in [0,1)$ with measure $|E| > 1 - \varepsilon$ such that for any function $f \in L^1[0,1)$, it is possible to construct a function $\widetilde{f} \in L^1[0,1)$ coinciding with f on E and satisfying $\int_0^1 |\widetilde{f}(x) - f(x)| dx < \varepsilon$, such that both the Fourier series and the greedy algorithm of $\widetilde{f}$ with respect to a bounded Vilenkin system are almost everywhere convergent on $[0,1)$.

Список литературы

[1] Н. Н. Лузин, "К основной теореме интегрального исчисления", Матем. сб., **28**, no. 2, 266 – 294 (1912).

[2] D. E. Men'shov, "Sur la representation des fonctions measurables des series trigonometriques", Mat. Sbornik, **9**, 667 – 692 (1941).

[3] А. А. Талалян, "О зависимости сходимости ортогональных рядов от изменения значений разлагаемой функции", Мат. заметки, **33**, no. 5, 715 – 722 (1983).

[4] А. М. Олевский, "Модификация функций и ряды Фурье", УМН, **40**, no. 3, 157 – 193 (1985).

[5] M.G. Grigorian, "On the L^p_μ-strong property of orthonormal systems", Matem. Sbornik, **194**, no. 10, 1503 – 1532 (2003).

[6] М. Г. Григорян, "О сходимости в метрике L^1 и почти всюду рядов Фурье по полным ортонормированным системам", Матем. сб., **181**, no. 8, 1011 – 1030 (1990).

[7] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, Ряды и Преобразования Уолша: Теория и Применения, М.: Наука (1987).

[8] Н. Я. Виленкин, "Об одном классе полных ортогональных систем", Изв. АН СССР. Сер. мат., 11, 363 – 400 (1947).

[9] J. L. Walsh, "A closed set of normal orthogonal functions", Amer. J. Math., 45, 5 – 24 (1923).

[10] H. E. Chrestenson, "A class of generalized Walsh functions", Pacif. J. Math., 5, no. 1, 17 – 31 (1955).

[11] C. Watari, "On generalizes Walsh-Fourier series", I. PProc. Japan Acad., 73, no. 8, 435 – 438 (1957).

[12] W. S. Young, "Mean convergence of generalized Walsh-Fourier series", Trans. Amer. Math. Soc., 218, 311 – 320 (1976).

[13] J. J. Price, "Certain groups of orthonormal step functions", Canad. J. Math., 9, no. 3, 413-425 (1957).

[14] T. Ohkuma, "On a certain system of orthogonal step functions", Tohoku Math J., 5, 166 – 177 (1953).

[15] P. Wojtaszczyk, "Greedy Algorithm for General Biorthogonal Systems", Journal of Approximation Theory, 107, 293 – 314 (2000).

[16] R. A. DeVore, V. N. Temlyakov, "Some remarks on greedy algorithms", Advances in Computational Math., 5, 173 – 187 (1996).

[17] S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, "A remark on Greedy approximation in Banach spaces", East Journal on Approximations, 5, no. 1, 1 – 15 (1999).

[18] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "Two remarks on quasi-greedy bases in the space", Journal Contemporary Mathematical Analysis, 40, no. 1, 2 – 14 (2005).

[19] T. W. Körner, "Divergence of decreasing rearranged Fourier series", Ann. of Math., 144, 167 – 180 (1996).

[20] T. W. Körner, "Decreasing rearranged Fourier series", J. Fourier Anal. Appl., 5, 1 – 19 (1999).

[21] V. N. Temlyakov, "Nonlinear methods of approximation", Found. Comput. Math., 3, 33 – 107 (2003).

[22] М. Г. Григорян, С. А. Саргсян, "Нелинейная аппроксимация функций класса L^r по системе Виленкина", Изв. вуз. Матем., 2, 30 – 39 (2013).

[23] M. G. Grigorian, R. E. Zink, "Greedy approximation with respect to certain subsystems of the Walsh orthonormal system", Proc. of the Amer. Mat. Soc., 134, no. 12, 3495 – 3505 (2006).

[24] М. Г. Григорян, О сходимости в метрике L^p гриди алгоритма по тригонометрической системе, Изв. НАН Армении, серия Математика, 39, no. 5, 37 – 52 (2004).

[25] М. Г. Григорян, "Модификации функций, коэффициенты Фурье и нелинейная аппроксимация", Матем. сб., 203, no. 3, 49 – 78 (2012).

[26] М. Г. Григорян, К. А. Навасардян, "О поведении коэффициентов Фурье по системе Уолша", Изв. НАН Армении, серия Математика, 51, no. 1, 3 – 20 (2016).

[27] M. G. Grigorian, S. A. Sargsyan "On the Fourier-Vilenkin coefficients", Acta Mathematica Scientia, 37(B), no. 2, 293 – 300 (2017).

Поступила 7 апреля 2017