Известия НАН Армении, Математика, том 53, н. 6, 2018, стр. 3 – 12

СИНУС ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

Р. Г. АРАМЯН

Российско-Армянский университет, Ереван, Армения
Институт Математики НАН Армении
E-mail: *rafikaramyan@yahoo.com*

Аннотация. В статье изучается проблема синус-представления для опорной функции центрально-симметричного выпуклого тела. Определяется подкласс центрально-симметричных выпуклых тел, плотный в классе центрально-симметричных выпуклых тел. Также найдена формула обращения для синус преобразования.

MSC2010 number: 53C45, 52A15, 53C65.

Ключевые слова: интегральная геометрия; выпуклое тело; зоноид; опорная функция.

1. Введение

Косинус-представление опорной функции центрально-симметричного выпуклого тела играет фундаментальную роль в интегральной геометрии и ряде связанных областей (см. [2], [8] – [11], [17], [21]). В статье изучается (в некотором дуальном смысле) синус-представление для опорной функции центрально-симметричного выпуклого тела.

Обозначим через $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ евклидово n -мерное пространство. Пусть $\mathbb{S}^{n-1}$ - единичная сфера $n-1$ размерности в $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат O, λ_{n-1} -поверхностная мера Лебега на $\mathbb{S}^{n-1}$ и σ_{n-1} - ее полная поверхностная мера $(\lambda_k(\mathbb{S}^k) = \sigma_k)$. Обозначим через $\mathbb{S}_\omega \subset \mathbb{S}^{n-1}$ большую $(n-2)$ - мерную сферу с полюсом в $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$. Класс выпуклых тел (непустые компактные выпуклые множества) симметричных относительно начала координат в $\mathbb{R}^n$ обозначим через $\mathcal{B}^n_o$ (так называемые *центрированные* тела), а класс центрально-симметричных выпуклых тел в $\mathbb{R}^n$ обозначим через $\mathcal{B}^n$.

[0]Исследования были частично поддержаны фондами, выделенными по гранту МОН ПФ на финансирование деятельности РАУ и при финансовой поддержке ГКН МОН РА и РФФИ (РФ) в рамках совместной научной программы 18RF–019 и 18-51-05010, соответственно.

Наиболее полезным аналитическим описанием выпуклого тела является его опорная функция ([16]). Опорная функция $H : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ выпуклого тела $\mathbf{B}$ определяется как

$$H(\mathbf{B}, x) = H(x) = \sup_{y \in \mathbf{B}} \langle y, x \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь и ниже $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Известно, что (см.[16]) опорная функция выпуклого тела $\mathbf{B}$ является положительно однородной и выпуклой. Ниже мы рассмотрим опорную функцию H как функцию, определенную на единичной сфере $\mathbf{S}^{n-1}$ (из-за положительной однородности H). Также известно (см. [16]), что выпуклое тело $\mathbf{B}$ однозначно определяется своей опорной функцией. Выпуклое тело $\mathbf{B}$ является k-гладким, если его опорная функция k раз непрерывно дифференцируема. Через $\mathcal{C}_e^k$ обозначим класс четных k раз непрерывно дифференцируемых функций определенных на $\mathbf{S}^{n-1}$.

Известно ([9], [8], [21]), что *опорная функция H симметричного относительно начала координат выпуклого тела $B \in \mathcal{B}_o^n$, являющееся пределом зонотопов (сумма конечного числа отрезков) в смысле метрики Хаусдорфа, имеет следующее представление*

$$H(\xi) = \int_{\mathbf{S}^{n-1}} | \langle \xi, \Omega \rangle | \, m(d\Omega), \quad \xi \in \mathbf{S}^{n-1} \tag{1.1}$$

с четной мерой m.

Возникает вопрос. Имеет ли опорная функция любого центрированного выпуклого тела косинус-представление.

Известно также ([9], [8], [17], [21]), что *опорная функция H достаточно гладкого симметричного относительно начала координат выпуклого тела $B \in \mathcal{B}_o^n$ допускает следующее представление*

$$H(\xi) = \int_{\mathbf{S}^{n-1}} | \langle \xi, \Omega \rangle | \, h(\Omega) \, \lambda_{n-1}(d\Omega), \quad \xi \in \mathbf{S}^{n-1} \tag{1.2}$$

с четной непрерывной функцией $h(\cdot)$ (не обязательно положительной), определенной на $\mathbf{S}^{n-1}$. Заметим, что h единственна. Выпуклое тело (опорная функция которого имеет интегральное представление (1.1) *с знакопеременной четной мерой m) называется* обобщенным зоноидом. *Если m мера на $\mathbf{S}^{n-1}$ то центрированное выпуклое тело $\mathbf{B}$ является зоноидом.*

(1.2) указывает, что класс обобщенных зоноидов плотен в $\mathcal{B}^n$. Правая часть (1.2) называется косинус преобразованием h.

В. Вейл [20] показал, что локальная характеризация зоноидов не существует. Позднее было показано, что в четных размерностях существует экваториальная характеристика зоноидов (см. [18], [11]), а в нечетных измерениях экваториальная характеристика зоноидов не существует (см. [15]). В [4] был определен подкласс зоноидов, позволяющий экваториальную характеризацию.

В этой статье рассматривается сумма конечного числа $n-2$ мерных центрированных шаров и их пределы. Пусть $b = (r, \Omega)$ - $(n-2)$ мерный центрированный шар в $\mathbb{R}^n$ с радиусом r и $\Omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ единичный вектор, нормальный к b. Опорная функция b имеет вид

$$H(b, \xi) = r\sin(\widehat{\xi, \Omega}), \quad \xi \in \mathbb{S}^{n-1}. \tag{1.3}$$

Здесь и далее через $(\widehat{\xi, \Omega})$ мы обозначаем угол между двумя направлениями. Теперь рассмотрим конечную сумму (сумму Минковского) $n-2$ мерных центрированных шаров в $\mathbb{R}^n$. Опорная функция конечной суммы $b_i = (r_i, \Omega_i)$, $i = \overline{1, m}$ (обозначим через P) имеет вид

$$H(P, \xi) = \sum_{i=1}^{m} r_i \sin(\widehat{\xi, \Omega_i}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{r_i}{2}[\sin(\widehat{\xi, \Omega_i}) + \sin(\widehat{\xi, -\Omega_i})], \quad \xi \in \mathbb{S}^{n-1}. \tag{1.4}$$

Определим класс выпуклых тел $\mathfrak{D}$ так называемых дискоидов, которые являются пределами конечных сумм $n-2$ мерных шаров в смысле метрики Хаусдорфа. Для опорной функции центрированного дискоида сумма (1.4) преобразуется в интеграл

$$H(\xi) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \sin(\widehat{\xi, \Omega})\, v(d\Omega), \quad \xi \in \mathbb{S}^{n-1}, \tag{1.5}$$

где v четная мера на $\mathbb{S}^{n-1}$.

Возникает вопрос. Имеет ли опорная функция любого центрированного выпуклого тела синус-представление. В этой статье доказывается следующая теорема.

Теорема 1.1. *Центрированное выпуклое тело B является дискоидом тогда и только тогда, когда его опорная функция имеет представление* (1.5) *с четной мерой v on $\mathbb{S}^{n-1}$.*

Заметим, что класс дискоидов является подмножеством класса зоноидов, потому что любой дискоид является зоноидом. Также заметим, что существует зоноид, который не является дискоидом, например сегмент не является дискоидом. Таким образом, имеем: *дискоиды нигде не плотны в $\mathcal{B}^n$.*

Теперь мы определяем класс *обобщенных дискоидов* (см. также [21]). Центрированное выпуклое тело $\mathbf{B}$ является *обобщенным дискоидом*, если его опорная функция H допускает следующее представление

$$H(\xi) = \int_{\mathbf{S}^{n-1}} \sin(\widehat{\xi, \Omega})\, v(d\Omega), \quad \xi \in \mathbf{S}^{n-1} \tag{1.6}$$

с знакопеременной четной мерой m, или эквивалентное определение (см. также [19]): $\mathbf{B}$ является *обобщенным дискоидом* если $\mathbf{B} + \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$, где $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ дискоиды.

В этой статье мы доказываем утверждение, что класс обобщенных дискоидов плотен в $\mathcal{B}^n$.

Теорема 1.2. *Опорная функция H достаточно гладкого симметричного относительно начала координат выпуклого тела $B \in \mathcal{B}^n_o$ допускает следующее представление*

$$H(\xi) = \int_{\mathbf{S}^{n-1}} \sin(\widehat{\xi, \Omega})\, h(\Omega)\, \lambda_{n-1}(d\Omega), \quad \xi \in \mathbf{S}^{n-1} \tag{1.7}$$

с четной непрерывной функцией h (не обязательно положительной), определенной на $\mathbf{S}^{n-1}$. Заметим, что h единственная.

Правая часть (1.7) называется синус-преобразованием h и обозначается через Qh. Теорема 2.1 (см. ниже) показывает, что мера v в (1.6) (h в (1.7)) единственна. Следовательно, преобразование $Q : \mathcal{C}^\infty_e \longrightarrow \mathcal{C}^\infty_e$ обратимо. h (в (1.7)) называется порождающей плотностью $\mathbf{B} \in \mathcal{B}^n_o$. Заметим, что обратимость косинус преобразования была показана А. Александровым в [2].

Теорему 1.2 можно доказать используя разложение h по сферическим функциям ([3]). В этой статье теорема доказывается нахождением формулы обращения для (1.7).

Р. Шнайдер, Р. Шустер в [19] и С. Алескер в [3] доказали несколько результатов для сумм подобных выпуклых тел и сферических функции. Заметим, что класс Минковского $\mathcal{M}_{b,GL(n)}$, где b - $(n-2)$ мерный центрированный шар, совпадает с классом зоноидов. В [13] рассмотрели синус-преобразования изотропных мер и получены изопериметрические неравенства.

Формула обращения для синус преобразования. Через R обозначим преобразование Радона на сфере (преобразование Функа), определяемое формулой:

$$RH(\xi) = \frac{1}{\sigma_{n-2}} \int_{\mathbf{S}_\xi} H(\omega)\, \lambda_{n-2}(d\omega), \quad \xi \in \mathbf{S}^{n-1} \tag{1.8}$$

для $H \in \mathcal{C}_c^\infty$. Для $n \geq 3$ формула обращения для R была получена Хелгасоном в [14] (для $n = 3$ формула обращения была получена Минковским и Бляшке [9]). В [5] рассматривалось обобщенное преобразование Радона на сфере и найдена формула обращения (см. также [6]).

Также через Ξ мы будем обозначать следующее преобразование $\Xi : \mathcal{C}_c^\infty \longrightarrow \mathcal{C}_c^\infty$ определяемое формулой:

$$\Xi = ((n-1) + \Delta), \tag{1.9}$$

где Δ является оператором Лапласа-Бельтрами на $\mathbf{S}^{n-1}$. Также в этой статье найдена формула обращения синус-преобразования.

Теорема 1.3. *Пусть H - опорная функция достаточно гладкого центрированного выпуклого тела $B \in \mathcal{B}_o^n$. Тогда*

$$h = Q^{-1}H = \frac{\sigma_{n-3}}{(n-2)\sigma_{n-2}^2}\Xi R^{-2}H. \tag{1.10}$$

является решением интегрального уравнения (1.7).

2. Синус-представление для центрированного выпуклого тела

Доказательство Теоремы 1.1. Необходимость: Пусть $\mathbf{B}$ является дисконом. Тогда существует последовательность P_m (конечная сумма $(n-2)$ мерных шаров) которая сходится к $\mathbf{B}$ в смысле метрики Хаусдорфа. Каждому P_m, через (1.4), соответствует четная мера v_m с конечным носителем на $\mathbf{S}^{n-1}$. Последовательность v_m равномерно ограничена в полной вариационной норме, поскольку

$$v_m(\mathbf{S}^{n-1}) < C \cdot \mu([\mathbf{K}]),$$

где C некоторая константа, $\mathbf{K} \in \mathcal{B}_o^n$ - выпуклое тело, содержащее $\mathbf{B}$ и $\mu([\mathbf{K}])$ - инвариантная мера гиперплоскостей пересекающих $\mathbf{K}$. Следовательно можно выбрать подпоследовательность v'_m которая слабо сходятся к некоторой четной v (мера заданная на $\mathbf{S}^{n-1}$) и опорная функция $H(\mathbf{B}, \cdot)$ имеет представление (1.5) с мерой ν.

Достаточность: Пусть опорная функция $\mathbf{B}$ имеет представление (1.5) с четной мерой v на $\mathbf{S}^{n-1}$. Тогда существует последовательность четных мер v_m с конечным носителем, которая сходится (слабая сходимость) к v. Каждой v_m соответствует P_m (конечная сумма $(n-2)$ мерных шаров) через (1.4). Мы имеем $H(P_m, \cdot)$ сходятся поточечно к $H(\mathbf{B}, \cdot)$. Также известно, что поточечная сходимость последовательности выпуклых функций влечет равномерную сходимость на каждом компакте. Таким образом, мы получаем, что $H(P_m, \cdot)$ равномерно сходится к $H(\mathrm{B}, \cdot)$ на S^{n-1}. Следовательно, P_m сходится к B в метрике Хаусдорфа, а B является дискоидом. Теорема 1.1 доказана.

Следующая теорема показывает, что мера v в (1.5) единственна (см. также [13]).

Теорема 2.1. *Пусть v четная знакопеременная мера на S^{n-1} такая, что*

$$\int_{\mathrm{S}^{n-1}} \sin(\widehat{\xi, \Omega})\, v(d\Omega) = 0 \tag{2.1}$$

для любого $\xi \in \mathrm{S}^{n-1}$, тогда $v \equiv 0$.

Доказательство можно дать, используя разложения по сферическим функциям. Пусть Q_d - сферическая функция порядка d. Умножим (2.1) на Q_d и проинтегрируем по S^{n-1}. Используя теорему Фубини, получим

$$\int_{\mathrm{S}^{n-1}} \left(\int_{\mathrm{S}^{n-1}} \sin(\widehat{\xi, \Omega})\, v(d\Omega) \right) Q_d(\xi) \lambda_{d-1}(d\xi) = \int_{\mathrm{S}^{n-1}} \left(\int_{\mathrm{S}^{n-1}} \sin(\widehat{\xi, \Omega})\, Q_d(\xi) \lambda_{d-1}(d\xi) \right) v(d\Omega) = 0. \tag{2.2}$$

Формула Функ-Гекке утверждает, что (см. [12])

$$\int_{\mathrm{S}^{n-1}} \sin(\widehat{\xi, \Omega})\, Q_d(\xi) \lambda_{d-1}(d\xi) = a_{n,d} Q_d(\Omega), \tag{2.3}$$

где $a_{n,d}$ - коэффициент, зависящий только от d и n и $a_{n,d} \neq 0$, если d четный. Таким образом, для всех сферических функции порядка d имеем

$$\int_{\mathrm{S}^{n-1}} Q_d(\Omega)\, v(d\Omega) = 0. \tag{2.4}$$

Если d нечетно, то (2.4) верно сразу так как v четная мера. Используя равномерную аппроксимацию непрерывной функций на S^{n-1}, для каждого непрерывного g, получаем

$$\int_{\mathrm{S}^{n-1}} g(\Omega)\, v(d\Omega) = 0. \tag{2.5}$$

Принимая во внимание известные результаты теории интегрирования, можно сделать вывод, что это возможно только в случае $v \equiv 0$.

3. Формула обращения для синус-преобразования

Пусть $\mathrm{B} \in \mathcal{B}^n_o$ - выпуклое тело с достаточно гладкой границей и с положительной гауссовой кривизной в каждой точке границы $\partial\mathrm{B}$. Пусть $s(\omega)$ - точка на $\partial\mathrm{B}$, внешняя нормаль в которой сопадает с ω, $R_i(\omega)$ - главные радиусы кривизны

$(i = 1, ..., n-1)$ ∂B в $s(\omega)$ а $k_1(\omega), ..., k_{n-1}(\omega)$ - главные кривизны ∂B в $s(\omega)$ $(k_1(\omega) \cdots k_{n-1}(\omega) > 0)$.

Понятие флага в $\mathbb{R}^n$, которое естественно возникает в комбинаторной интегральной геометрии будет иметь важное значение ниже. Подробное определение флага в $\mathbb{R}^3$ можно найти в [1]. Мы рассматриваем так называемые *направленные* флаги (ниже просто флаг). Назовем пару $\{g, e\}$ флагом, если g - направленная линия, содержащая начало координат O а e - ориентированная гиперплоскость (гиперплоскость с заданной положительной нормалью), содержащее g. Существует два эквивалентных представления флага:

$$(\omega, \varphi) \text{ или } (\xi, \Phi),$$

где $\omega \in \mathbf{S}^{n-1}$ - нормаль e а φ - направление из $\mathbf{S}_\omega$ которое совпадает с направлением g; $\xi \in \mathbf{S}^{n-1}$ - пространственное направление g а Φ - направление из $\mathbf{S}_\xi$ которое совпадает с нормалью e.

Пусть $\xi \in \mathbf{S}^{n-1}$ и $\Phi \in \mathbf{S}_\xi$. Через $B(\Phi)$ обозначим проекцию B на гиперплоскость с нормалью Φ содержащую $O \in \mathbb{R}^n$. Для $n-1$ мерного объема $B(\Phi)$ имеем

$$V_{n-1}(B(\Phi)) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{S}^{n-1}} |\langle \Phi, \omega\rangle| \prod_{i=1}^{n-1} R_i(\omega)\, \lambda_{n-1}(d\omega). \tag{3.1}$$

Через $\mathbf{D}(O,1)$ обозначим n-мерный шар радиуса 1 с центром в начале координат. Запишем (3.1) для суммы Минковского $\mathbf{B} + \varepsilon\mathbf{D}(O,1)$ (здесь $\varepsilon > 0$). Используя классическую формулу Штейнера для объема, получим

$$V_{n-1}(B(\Phi) + \varepsilon\,\mathbf{D}(O,1)) = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon^i \binom{n-1}{i} W_i(B(\Phi)) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{S}^{n-1}} |\langle \Phi, \omega\rangle| \prod_{i=1}^{n-1} (R_i(\omega) + \varepsilon)\, \lambda_{n-1}(d\omega). \tag{3.2}$$

Здесь $W_i(B(\Phi))$ является i-й основной мерой $B(\Phi)$ (см [16]). Сравнивая порядки ε с обеих сторон (3.2), получим следующую формулу

$$(n-1)W_{n-2}(B(\Phi)) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{S}^{n-1}} |\langle \Phi, \omega\rangle| \sum_{i=1}^{n-1} R_i(\omega)\, \lambda_{n-1}(d\omega). \tag{3.3}$$

Напишем $\omega = (\nu, \varphi)$ в сферических координатах где $\nu = (\widehat{\xi, \omega})$ - полярный угол, измеренный от ξ (зенитное направление) и $\varphi \in \mathbf{S}_\xi$. Применяя правило сферического косинуса, находим

$$|\langle \omega, \Phi\rangle| = \sin\nu\, |\cos(\widehat{\varphi, \Phi})|. \tag{3.4}$$

Теперь интегрируя (3.3) относительно Φ по S_ξ и используя (3.4) получим

$$(3.5)\quad \frac{1}{\sigma_{n-2}}\int_{\mathrm{S}^{n-2}}(n-1)W_{n-2}(B(\Phi))\,\lambda_{n-2}(d\Phi) = \frac{1}{2\sigma_{n-2}}\int_{\mathrm{S}^{n-1}}\sin(\widehat{\xi,\omega})\sum_{i=1}^{n-1}R_i(\omega)\,\lambda_{n-1}(d\omega)\int_{\mathrm{S}_\xi}|\cos(\widehat{\varphi,\Phi})|\,\lambda_{n-2}(d\Phi).$$

Принимая во внимание, что для любого $\varphi\in\mathrm{S}^{n-2}$ (см [4])

$$\int_{\mathrm{S}^{n-2}}|\cos(\widehat{\varphi,\Phi})|\,\lambda_{n-2}(d\Phi) = \frac{2\sigma_{n-3}}{n-2}$$

мы получаем следующую теорему.

Теорема 3.1. *Пусть $B\in\mathcal{B}_o^n$ - выпуклое тело с достаточно гладкой границей и с положительной гауссовой кривизной. Для любого $\xi\in\mathrm{S}^{n-1}$ имеем*

$$(3.6)\quad \int_{\mathrm{S}_\xi}(n-1)W_{n-2}(B(\Phi))\,\lambda_{n-2}(d\Phi) = \frac{\sigma_{n-3}}{(n-2)}\int_{\mathrm{S}^{n-1}}\sin(\widehat{\xi,\omega})\sum_{i=1}^{n-1}R_i(\omega)\,\lambda_{n-1}(d\omega).$$

Здесь $W_{n-2}(B(\Phi))$ - $(n-2)$-ая основная мера проекции B на гиперплоскость, ортогональная к $\Phi\in\mathrm{S}_\xi$.

Известно (см. [16]): для $W_{n-2}(B(\Phi))$ в $n-1$ мерном пространстве имеем

$$(3.7)\quad (n-1)W_{n-2}(B(\Phi)) = \int_{\mathrm{S}^{n-2}}H(B(\Phi),u)\,\lambda_{n-2}(du) = \int_{\mathrm{S}_\Phi}H(\mathrm{B},u)\,\lambda_{n-2}(du),$$

где $H(B(\Phi),\cdot)$ - опорная функция $B(\Phi)$ что есть сужение опорной функции B на S_Φ. Пусть $\mathrm{B}\in\mathcal{B}_o^n$ - выпуклое тело. В [7] доказано, что

$$(3.8)\quad ((n-1)+\Delta)H(\mathrm{B},\cdot) = \sum_{i=1}^{n-1}R_i(\cdot),$$

здесь Δ является оператором Лапласа-Бельтрами на S^{n-1}. Подставляя (3.8) и (3.7) в (3.6), получим

$$(3.9)\quad \int_{\mathrm{S}_\xi}\left[\int_{\mathrm{S}_\Phi}H(u)\,\lambda_{n-2}(du)\right]\lambda_{n-2}(d\Phi) = \frac{\sigma_{n-3}}{(n-2)}\int_{\mathrm{S}^{n-1}}\sin(\widehat{\xi,\omega})\,[((n-1)+\Delta)H(\xi)]\,\lambda_{n-1}(d\omega).$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3.2. *Пусть $B\in\mathcal{B}_o^n$ - выпуклое тело с достаточно гладкой границей и с положительной гауссовой кривизной. Для его опорной функции H имеем*

$$(3.10)\quad R(RH)(\xi) = R^2H(\xi) = \frac{\sigma_{n-3}}{(n-2)\sigma_{n-2}^2}Q(\Xi H)(\xi)\quad \xi\in\mathrm{S}^{n-1}.$$

Теорема 1.3 является следствием Теоремы 3.2.

4. Пример выпуклого тела с знакопеременной порождающей плотностью

У нас нет оснований утверждать, что решение уравнения (1.7) для опорной функции любого достаточно гладкого центрированного выпуклого тела является неотрицательной функцией. В этом разделе мы приводим пример достаточно гладкого центрированного выпуклого тела $\mathbf{B} \in \mathfrak{B}^3_o$, для которого решение уравнения принимает также отрицательные значения. Пусть $U = \{\xi \in S^2 : \widehat{(\xi, \Omega)} < \varepsilon\}$ есть ε окрестность точки $\Omega_0 \in \mathbf{S}^2$ и g - достаточно гладкая четная функция, определенная на $\mathbf{S}^2$, такая, что

$$g(\Omega) = \begin{cases} \geq \ 1 \ \text{для} \ \Omega \in \mathbf{S}^2 \backslash \{U \cup \{-U\}\} \\ \geq -1 \ \text{для} \ \Omega \in \{U \cup \{-U\}\}. \end{cases} \tag{4.1}$$

Рассмотрим следующую функцию, определенную на $\mathbf{R}^3$

$$F(\xi) = |\xi| \int_{\mathbf{S}^2} \sin(\widehat{\overrightarrow{\xi}, \Omega})\, g(\Omega)\, \lambda_2(d\Omega), \quad \xi \in \mathbf{R}^3 \backslash O \tag{4.2}$$

где $|\xi|$ -норма ξ и $\overrightarrow{\xi} = \xi/|\xi|$. Заметим, что F является положительно однородной, и теперь мы докажем, что при достаточно малом ε функция F также выпукла. Для частной производной первого порядка F имеем

$$\frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi_1} = \int_{\mathbf{S}^2} \frac{\xi_1 - \Omega_1 \langle \xi, \Omega \rangle}{|\xi| \sin(\widehat{\overrightarrow{\xi}, \Omega})}\, g(\Omega)\, \lambda_2(d\Omega), \quad \xi \in \mathbf{R}^3 \backslash O \tag{4.3}$$

здесь $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$.

Для фиксированного $\xi \in \mathbf{S}^2$ и $\psi \in \mathbf{S}_\xi$ выбирем ξ как зенитное направление и ψ как азимутальное направление. Для производной второго порядка по направлению ψ в $\xi = (0, 0, 1)$ получим

$$\frac{\partial^2 F(\xi)}{\partial^2 \xi_1} \Big|_{\xi = (0,0,1)} = \int_{\mathbf{S}^2} \frac{\sin^2 \varphi}{\sin \nu}\, g(\Omega)\, \lambda_2(d\Omega), \tag{4.4}$$

здесь (ν, φ) - обычные сферические координаты Ω на $\mathbf{S}^2$ основанный на выборе ξ в качестве северного полюса а Ψ в качестве опорного направления на $\mathbf{S}_\xi$.

Из (4.4) следует, что при достаточно малом ε для всех $\xi \in \mathbf{S}^2$ имеем

$$\frac{\partial^2 F(\xi)}{\partial^2 \xi_1} > 0. \tag{4.5}$$

Следовательно, функция F выпукла и существует центрированное выпуклое тело $\mathbf{B} \in \mathfrak{B}^3_o$, для которого F является его опорной функцией.

Abstract. The problem of the sine representation for the support function of a centrally symmetric convex bodies is studied. We describe a subclass of centrally symmetric convex bodies which is dense in the class of centrally symmetric convex bodies. Also, we obtain an inversion formula for the sine-transform.

Список литературы

[1] R. V. Ambartzumian, "Combinatorial integral geometry, metrics and zonoids", Acta Appl. Math., **29**, 3 – 27 (1987).

[2] A. D. Alexandrov, "On the theory of mixed volumes. New inequalities between mixed volumes and their applications", Mat. Sb., **44**, 1205 – 1238 (1937).

[3] S. Alesker, "On $GLn(R)$-invariant classes of convex bodies", Mathematika **50**, 57 – 61 (2003).

[4] R. Aramyan, "Zonoids with an equatorial characterization", Applications of Mathematics (No. AM 333/2015), **61**(4), 413 – 422 (2016).

[5] R. H. Aramyan, "Generalized Radon transform on the sphere", Analysis Oldenbourg, **30** (3), 271 – 284 (2010).

[6] Р. Г. Арамян, "Решение одного интегрального уравнения на сфере методами интегральной геометрии", Доклады Академии наук, **426** (2), 151 – 155 (2009) [Doklady Mathematics, **79**(3), 325 – 328 (2009)].

[7] C. Berg, "Corps convexes et potentiels spheriques", Mat.-Fyz.Medd. Danske Vid. Selsk. **37**, 3 – 58 (1969).

[8] E. D. Bolker, "A class of convex bodies", Trans. Amer. Math. Soc., **145**, 323 – 345 (1969).

[9] W. Blaschke, Kreis und Kugel, 2nd Ed., W. de Gruyter, Berlin (1956).

[10] R. J. Gardner, Geometric Tomography, Second ed., Cambridge University Press, Cambridge (2006).

[11] P. Goodey, W. Weil, "Zonoids and generalizations", In Handbook of convex geometry, ed. by P. M. Gruber and J. M. Wills, North Holland, Amsterdam, 1297 – 1326 (1993).

[12] H. Groemer, Geometric Applications of Fourier Series and Spherical Harmonics. Encyclopedia of Mathematics and its Applications **61**, Cambridge University Press, Cambridge (1996).

[13] G. Maresch, F. E. Schuster, "The Sine Transform of Isotropic Measures", International Mathematics Research Notices **4**, 717 -Ц 739 (2012).

[14] S. Helgason, The Radon Transform, Birkhauser, Basel and Boston, Massachusetts (1980).

[15] F. Nazarov, D. Ryabogin, A. Zvavitch, "On the local equatorial characterization of zonoids and intersection bodies", Advances in Mathematics **217** (3), 1368 – 1380 (2008).

[16] K. Leichtweiz, Konvexe Mengen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1980).

[17] R. Schneider, "Uber eine Integralgleichung in der Theorie der konvexen Korper", Math. Nachr. **44**, 55 – 75 (1970).

[18] Г. Ю. Панина, "Представление n-мерного тела в виде суммы $(n-1)$- мерных тел", Изв. АН Арм. ССР сер. матем. **23(4)**, 385 – 395 (1988) [Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences), **23**, no. 4, 91 – 103 (1988)].

[19] R. Schneider, F.E. Schuster, "Rotation invariant Minkowski classes of convex bodies", Mathematika **54**, 1 -Ц 13 (2007).

[20] W. Weil, "Blaschkes Problem der lokalen Charakterisierung von Zonoiden", Arch. Math., **29**, 655 – 659 (1977).

[21] W. Weil, R. Schneider, "Zonoids and related Topics", in: P. Gruber, J. Wills (Eds), Convexity and its Applications, Birkhauser, Basel, 296 – 317 (1983).

Поступила 19 марта 2018